Multivariable Calculus

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

II. Differentiation (part 1) 61

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

রামচন্দ্র শুনেছি চোদ্দ বছর বনে ছিলেন। তা এই বইটা শেষ করতেও আমার সেই পরিমাণ সময়ই লেগেছে। ফাঁকে ফাঁকে অন্য কত বই লিখে ফেললাম, কিন্তু কী করে যেন এই বইয়ের লেখাটাই পিছিয়ে যেতে লাগল। এর মধ্যে সিলেবাসও গেল বদলে, CBCS-এর জমানায় অনেক নতুন জিনিসও ঢুকল, ফলে আরো দেরী হয়ে গেল বইটা শেষ করতে। এত দীর্ঘ সময় লাগায় একটা লাভ এই হয়েছে, যে এর মধ্যে বহু বছরের প্রশ্নের আলোচনা আছে (যেগুলো এখনকার সিলেবাসের অন্তর্ভুক্ত)। এমন কি, গত পাঁচ বছরের JAM-এর প্রশ্নগুলোও আলোচনা করেছি।
এটা হল আমাদের "বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই" সিরিজের তেরো নম্বর বই। এই সিরিজের মূল উদ্দেশ্য হল সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কাছে অংক পৌঁছে দেওয়া যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। এই বইগুলোতে যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়।

যাদের ইংরাজী বুঝতে অসুবিধা হয় না, তারাও অনেক সময়ে বুঝতে পারো না যে একটা অংকের উত্তর কি করে ইংরাজীতে লিখতে হয়। অংক লেখার ইংরাজী আর সাধারণ ইংরাজী ঠিক এক জিনিস নয়। কি করে একটা উত্তর ইংরাজীতে গুছিয়ে লিখতে হয় সেটা এই বইতে handwriting-এর মত লিখে দেখানো আছে। বইটা Day 1, Day 2, ... এইভাবে অনেকগুলো Day-তে ভাগ করে লেখা। প্রত্যেকটা ভাগ একদিনে পড়ে শেষ করার জন্য, মোটামুটি কোচিং ক্লাসের দুঘন্টার পড়া। এক দিনে ওর বেশী পড়তে যেও না। মাথা গুলিয়ে যাবে।

আমাদের এই সিরিজের সব বইতেই প্রচুর ছবি দেওয়া থাকে, এই বইটাও তার ব্যতিক্রম নয়। কিন্তু এখানে আবার কিছু কিছু ছবি নড়াচড়াও করে! মানে ছবি নয় ভিডিও। এ হল ভিডিওর যুগ। এই বইতে অনেক ধরণাই আছে যেগুলো ভিডিওর মাধ্যমে বোঝালে বুঝতে বেশী সুবিধা হবে। সেই কথা ভেবে তেরোটা ভিডিও বানিয়েছি, যেগুলোকে QR code আকারে বইয়ের বিভিন্ন প্রয়োজনীয় জায়গায় দেওয়া আছে। মোবাইল দিয়ে QR code-গুলো স্ক্যান করলে ওই ভিডিওগুলোতে পৌঁছে যাবে। যদি QR code স্ক্যান করতে না পারো, তবে Google Playstore-এ গিয়ে android qr code scanner বলে খুঁজলেই গুচ্ছের অ্যাপ পাবে। তাদের যেকোনো একটা দিয়েই তোমার কাজ চলবে। কিন্তু যদি বাবা-মা তোমাকে স্মার্ট ফোনই না কিনে দিয়ে থাকেন, তবে? তবে তোমাকে বাজে সময় নষ্ট করার থেকে বাঁচানোর জন্য তাঁদের ধন্যবাদ দিও। এরকম ভাগ্যবানদের জন্য আমি ভিডিওগুলোর address দিয়েছি, যেগুলো ব্যবহার করে তুমি কম্পিউটারে ভিডিওগুলো দেখতে পারবে (অবশ্যই ইন্টারনেট লাগবে তার জন্য)। আর সেটাও যারা পারছ না, তাদেরও দুশ্চিন্তার কোনো কারণ নেই, কারণ ভিডিওগুলো বাদেও বইটা স্বয়ংসম্পূর্ণ।

কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের সাম্প্রতিক প্রশ্নপত্রগুলো পেয়েছি গুরুদাস কলেজের লাইব্রেরীর ওয়েবসাইট থেকে। এতে আমার খুব সুবিধা হয়েছে, ওঁদের কাছে আমি তাই কৃতজ্ঞ। এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। তাও কিছু ভুল থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। কোনো ভুলের সন্ধান পেলে, ভিডিও কাজ না করলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে ইমেইল (arnabc74@gmail.com) বা Whatsapp (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। আর এই বইয়ের জন্য একটা ওয়েবপেজ আছে--

`https://arnabc74.github.io/mult/`

ভুলত্রুটি যা ধরা পড়বে, সেখানে বলা থাকবে। সেখানে তোমার মন্তব্য লেখারও একটা জায়গা থাকবে, যার মাধ্যমেও যোগাযোগ রাখতে পারো।

তবে, হ্যাঁ, "আমাকে একটু প্রাইভেটে পড়াবেন, স্যার?" বললে আমি কিন্তু "না" বলব। সময়ের বড্ড অভাব যে!

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Function, continuity, limit

DAY 1
গোড়ার কথা

আমরা এ বইতে multivariable analysis শিখব। হায়ার সেকণ্ডারীতে যে calculus শিখেছিলে, বা first year-এ যে real analysis শিখেছিলে, এটা হল তাদেরই পরবর্তী ধাপ। Calculus-এ আমরা মূলতঃ বিভিন্ন function নিয়ে কাজ করতাম, যেমন $f(x) = \sin x$ বা $f(x) = 2x^2 + 4$. এরকম function সাধারণতঃ হত $\mathbb{R}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ, মানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হত, অর্থাৎ এরকম function-এর ইনপুট হত একটা real number, এবং আউটপুটও হত একটা real number. এরকম function-দের limit, continuity, differentiation, integration ইত্যাদি আলোচনা করাই ছিল calculus-এর কাজ। তা, এখানেও ব্যাপারটা একইরকম, খালি ইনপুট বা আউটপুটের সংখ্যা একাধিক হতে পারবে।
যেমন ধরো--

$$f(x, y) = 2x + 3y.$$

লক্ষ করো এখানে দুটো ইনপুট নিয়েছি, x আর y, যদিও আউটপুট এখনও সেই একটাই। যেমন, $x = 2$ আর $y = \pi$ নিলে $f(2, \pi) = 4 + 3\pi$ হবে। এরকম function-এর বেলায় আমরা লিখি $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. এখানে $\mathbb{R}^2$ মানে হল যতরকমভাবে এক জোড়া real সংখ্যা নেওয়া যায়, তাদের set. যেমন $(2, \pi)$ হল এর একটা সদস্য। একে f-এর মধ্যে ইনপুট হিসেবে ঢুকিয়ে পেয়েছিলে $4 + 3\pi$. যদি $x = \pi$ আর $y = 2$ নিতে, তবে জোড়াটা হত $(\pi, 2)$. সেক্ষেত্রে আউটপুটটা হত $2\pi + 6$. বুঝতেই পারছ $(2, \pi)$ আর $(\pi, 2)$ আলাদা জিনিস। তাই অংকের ভাষায় $\mathbb{R}^2$-র সদস্যদের আমরা বলি **ordered pair**. এখানে ordered শব্দটা দিয়ে বোঝানো হচ্ছে যে, কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ।
একইভাবে আমরা $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ নিয়েও কাজ করতে পারি, এখানে তিনটে ইনপুট আর একটা আউটপুট। একটা উদাহরণ হল $f(x, y, z) = xy - e^{y+z}$. এখানে domain-টা হল $\mathbb{R}^3$, যার প্রতিটা সদস্য হল তিনটে সংখ্যা নিয়ে তৈরী। এখানেও কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ, তাই বলব **ordered triple**. যদি ইনপুটের সংখ্যা আরো বাড়াই, তবে domain-টা $\mathbb{R}^4$ বা $\mathbb{R}^5$ বা $\mathbb{R}^{1000}$-ও হতে পারে। এদের general রূপটা হল $\mathbb{R}^n$, যেখানে $n = 1, 2, 3, \ldots$। এর প্রতিটা সদস্য হল $(x_1, \ldots, x_n)$-এর মত দেখতে, যেখানে x_i-রা একেকটা real number. একজোড়া সংখ্যার বেলায় pair বলেছিলাম, তিনটের বেলায় triple. এখানে কী বলব? এখানে একটা নতুন শব্দ ব্যবহার করব, **tuple** (টুপ্‌ল্)। যেহেতু n-টা সংখ্যা আছে, তাই $(x_1, \ldots, x_n)$-কে বলব একটা n-tuple. আর যেহেতু কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ, তাই বলব **ordered n-tuple**. এদেরকে অনেক সময়ে **vector**-ও বলা হয়। আমরা প্রায়শঃই $(x_1, \ldots, x_n)$-কে খালি একটা অক্ষর দিয়ে লিখব $\mathbf{x}$. ওই যে মোটা করে লিখলাম তার মানে $\mathbf{x}$ খালি একটা সংখ্যা নয়, ওর ভিতর একাধিক সংখ্যা আছে। হাতে লেখার সময়ে অবশ্য মোটা করে লেখা কঠিন, তাই তখন লোকে অনেক সময়ে $\vec{x}$ বা $\underset{\sim}{x}$ লেখে।

$\mathbb{R}^3$-এর বেলায় আরেকটা notation-এরও চল আছে। এর জন্য প্রথমে তিনটে vector বানিয়ে রাখা হয়--

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ এবং } \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

ছবি দিয়ে ভাবলে Fig 1-এর মত। এবার কোনো (a, b, c)-কে লিখতে পারি $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ হিসেবে। অনেক সময়ে লোকে $\mathbf{i}$ ইত্যাদির বদলে $\hat{i}$ ইত্যাদি লেখে।

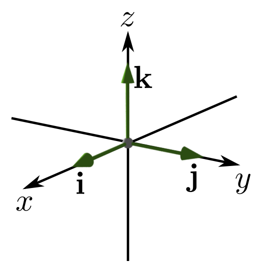


Fig 1

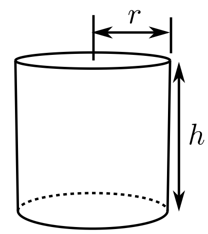


Fig 2

দুটো n-tuple সমান হওয়া মানে ওদের প্রতিটা সংখ্যা সমান হওয়া, যেমন $(a,b,c) = (x,y,z)$ হওয়া মানে $a = x$, $b = y$ এবং $c = z$ হওয়া। সুতরাং বুঝতে পারছ, n-tuple-দের একটা equation মানে $\mathbb{R}$-এর উপর n-খানা equation.

Exercise 1: $(a+b, b+c, c+a) = (2,2,2)$ হলে $a,b,c = ?$ ■

Exercise 2: নীচে কয়েকটা $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ আর $(x_1,...,x_n)$ দিলাম। তোমার কাজ হল $f(x_1,...,x_n)$-এর value বার করা।

1. $f(x_1,...,x_n) = \sum_i x_i$ আর $(x_1,...,x_n) = (1,2,...,n)$.
2. $f(x_1,...,x_n) = \sum_i x_i^2$ আর $(x_1,...,x_n) = (1,2,...,n)$.
3. $f(x_1,...,x_n) = \sum_i (i + x_i)$ আর $(x_1,...,x_n) = (n, n-1, ...2, 1)$.
4. $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$ আর $(x_1,...,x_n) = (1,2,...,n)$.

■

এতক্ষণ আমরা খালি ইনপুটের সংখ্যা নিয়েই খেলা করছিলাম। আউটপুটের সংখ্যা কিন্তু সেই একই থাকছিল। এবার দেখি আউটপুটের সংখ্যা বাড়ানো যায় কিনা। ধরো, ইনপুটের সংখ্যা 1 রেখে আউটপুটের সংখ্যা 2 করতে চাই। তার মানে একটা সংখ্যা থেকে দুটো সংখ্যা তৈরী করতে চাইছি। অংকের ভাষায় এরকম কোনো function-কে লিখব $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. একটা উদাহরণ হল $f(x) = (2x, x^2)$. যদি $x = 10$ নিই, তবে আউটপুট হবে $(20, 100)$. এবার একটা ঠকানো প্রশ্ন--

Example 1: এমন একটা function বলতে পারো, যার ইনপুট একটা আর আউটপুট দশটা? বাচ্চাদের সেটা ধরে ধরে খুব মুখস্থ করানো হয়?

SOLUTION: নামতা! যেই তুমি একটা বাচ্চাকে নামতা আওড়াতে বলবে, অমনি সে জিজ্ঞাসা করবে কোন্ সংখ্যার নামতা (মানে ইনপুটটা কী?)। ধরো ইনপুট দিলে 5, অমনি বাচ্চাটা গড়গড় করে দশটা আউটপুট আউড়ে যাবে, 5, 10, 15, ... 50. এটাকে ফর্মুলা দিয়ে লিখলে হয়

$$f(x) = (x, 2x, ..., 10x).$$

■

অবশ্য বাচ্চাদের নামতার বেলায় domain-টা হয় খালি কয়েকটা ছোটো ছোটো integer-এর set. কিন্তু ফর্মুলাটা যেকোনো real number-এর বেলাতেই খাটে। তাই আমরা বলতে পারি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{10}$.
এবার একটা উদাহরণ বলি যেখানে আমরা একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ নিয়ে কাজ করব। এটাও আমরা স্কুলে থাকতেই শিখে থাকি।

Example 2: Fig 2-এ একটা cylinder-এর উচ্চতা বলা আছে h আর radius বলা আছে r. তার volume আর

মোট surface area লেখো।

SOLUTION: আমরা জানি যে, volume হল $\pi r^2 h$ আর মোট surface area হল $2\pi r(r+h)$. এই দুটো জিনিসকে আমরা একসঙ্গে "প্যাক" করে একটা $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ বলে ভাবতে পারি যেখানে

$$f(h,r) = (\ \pi r^2 h, 2\pi r(r+h)\ ).$$

এখানে দুটো ইনপুট, h আর r, এবং দুটো আউটপুট, volume আর surface area. ■

1.1 $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ ইত্যাদিরা কি সত্যিই আছে?

এই প্রশ্নটা আমি বেশ কিছু ছাত্রকেই করতে শুনেছি। যখন প্রথম আমরা $\mathbb{R}$-এর কথা শিখি, তখন ওটাকে number line বলে ভাবতে বলা হয়। একইভাবে $\mathbb{R}^2$ হল একটা plane, যেটাকে একটা গ্রাফ কাগজের মত কল্পনা করা যায়। তারপর আসে $\mathbb{R}^3$, যেটা আমাদের চারদিকের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-উচ্চতা-ওয়ালা 3D (ত্রিমাত্রিক) জগৎ। কিন্তু তার উপরে আর উঠব কী করে? আইনস্টাইন শুনেছি বলে গেছেন যে, সময় হল fourth dimension. তাহলে কি $\mathbb{R}^4$ ব্যাপারটা খালি উচ্চাঙ্গের relativity করতেই কাজে লাগে? তাও যদি হয়, তো $\mathbb{R}^5$ কোথায় লাগে, বা $\mathbb{R}^n$? নাকি এগুলো নিতান্তই পণ্ডিতদের বিলাসিতা মাত্র?

আসলে ব্যাপারটা তা নয়, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^n$, এরা খুব দৈনন্দিন জিনিসেই কাজে লাগে। আমরা যখন number line-কে $\mathbb{R}$, গ্রাফ কাগজকে $\mathbb{R}^2$ আর আমাদের চারধারের 3D জগতকে $\mathbb{R}^3$ ভাবি, তখন আমরা সংখ্যাগুলো ব্যবহার করছি কেবলমাত্র কোনো বিন্দুর অবস্থান বোঝাতে। এ কথা ঠিক যে, এমন কোনো বাস্তব জগত আমাদের জানা নেই, যেখানে কোনো একটা বিন্দুর অবস্থান বোঝাতে তিনের বেশী সংখ্যার প্রয়োজন হয়। কিন্তু সংখ্যা দিয়ে যে কেবল একটা বিন্দুর অবস্থানই বোঝাতে হবে, এমন তো কোনো কথা নেই। যদি ঘরের মধ্যে 30 লক্ষ বায়ুকণা থাকে, এবং আমরা তাদের সবার অবস্থান বোঝাতে চাই, তবে প্রত্যেকটার জন্য তিনটে করে সংখ্যা লাগবে। সব মিলিয়ে আমরা পাব $\mathbb{R}^{9000000}$-এর একটা সদস্য। সংখ্যার গুনতিতে সেটা যতই লম্বা হোক, চিন্তা করার পক্ষে মোটেই সাংঘাতিক বা অতিপ্রাকৃত কিছু নয়।

বস্তুতঃ, যখনই আমাদেরকে একগুচ্ছ সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে হয়, তখনই সেটাকে অংকের ভাষায় লেখার জন্য $\mathbb{R}^n$-দের ডাক পড়ে। যেমন--

- একটু আগেই বললাম, একটা বাচ্চা যখন পাঁচের নামতা বলে $(5, 10, 15, .., 50)$ পর্যন্ত, অমনি সেটা আসলে $\mathbb{R}^{10}$-এর একটা সদস্য।
- ক্রিকেটে ব্যাট্স্‌ম্যান একটা বল মেরেছে (Fig 3)। কোনো একটা মুহূর্তে সেটার গতির অবস্থা বোঝানোর জন্য ছয়টা সংখ্যা লাগবে, তিনটে লাগবে তার অবস্থান বোঝানোর জন্য (x, y, z), আর তিনটে লাগবে তার velocity বোঝানোর জন্য (v_x, v_y, v_z). সুতরাং সব মিলিয়ে তুমি $\mathbb{R}^6$-এর একটা সদস্য পেয়ে গেলে।
- ধরো তোমাকে Fig 4-এর মত একটা জিনিসের মাপ বোঝাতে হবে। জিনিসটা দেখতে একটা 'L'-এর মত, এটুকু জানা আছে। সুতরাং মাপ বোঝানোর জন্য খালি চারটে দৈর্ঘ্য জানাই যথেষ্ট, a, b, c আর d. অতএব এরকম যে কোনো জিনিসকেই তুমি $\mathbb{R}^4$-এর একটা সদস্য বলে ভাবতে পারো!

1.2 ছবি দিয়ে বোঝা

Fig 3

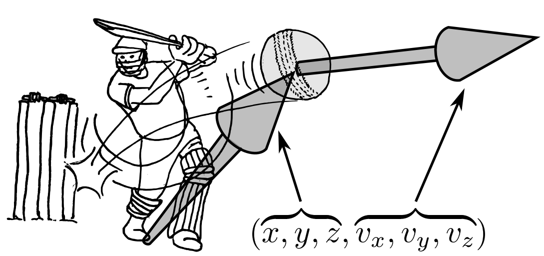
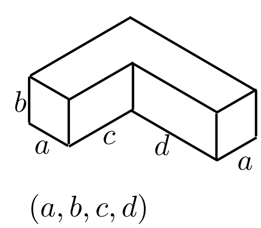


Fig 4



যখন আমরা calculus বা real analysis শিখি, তখন গ্রাফ আঁকতে পারাটা খুব কাজে লাগে। বাজারে প্রচলিত অনেক বই অবশ্য ছবি-টবির বড় একটা তোয়াক্কা রাখে না। কিন্তু ভেবে দ্যাখো $\sin x$ নিয়ে অংক করার সময়ে যদি তার ঢেউখেলানো চেহারাটা কল্পনা না করো, তবে কাজটা হবে যেন দুধের কথা ভাবা তার সাদা রংটাকে বাদ দিয়ে।

এই ছবি আঁকার ব্যাপারটা আমরা multivariate calculus-এও করতে চাই। অবশ্য প্রথমেই বলে রাখি যেকোনো একটা $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-কেই কিন্তু ছবি দিয়ে বোঝানো যায় না। সে কাজটা কোথায় কোথায় কী কীভাবে করা যায়, সে বিষয়ে একটা ধারণা দিচ্ছি।

- কিছু ক্ষেত্রে curve দিয়েই কাজ চলে যায়--
  - যদি $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয়, তবে তো সেটা আমাদের পরিচিত গ্রাফের জগত। আশা করি এদের কথা তুমি ভালো করেই জানো। তাই আর এখানে আলোচনা করছি না। চাইলে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের plus two level-এর Differential Calculus বইটা দেখে নিতে পারো।
  - যদি $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ হয়, তাহলেও curve দিয়ে গ্রাফ আঁকা যায়। এর সবচেয়ে পরিচিত উদাহরণ হল $f(t) = (\cos t, \sin t)$, যেখানে $t \in \mathbb{R}$. এর গ্রাফটা হল origin-কে কেন্দ্র করে একটা circle, যার radius হচ্ছে 1. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 5-এ। যখন t-টা 0 থেকে 2π অব্দি যাবে, তখন একটা পাক সম্পূর্ণ হবে। তারপর t যতই বাড়বে, ততই ওই একই circle-এর উপর পাক খেয়ে চলবে গ্রাফটা। একই ব্যাপার হবে $t < 0$ হলেও। এইরকম গ্রাফ হল **2D parametric curve**-এর উদাহরণ। সাধারণ গ্রাফ কাগজেই এদের আঁকা চলে।
  - যদি $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ হয়, তবে পাবে **3D parametric curve**. এদের কিন্তু কম্পিউটার ছাড়া আঁকা কঠিন। একটা সহজ উদাহরণ হল $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, যেখানে $t \in \mathbb{R}$. এটা দেখতে একটা স্প্রিঙের মত (Fig 6)। এখানে ওই গোড়ার $\cos t, \sin t$-র জন্য গ্রাফটা পাক খাচ্ছে, আর শেষের t-টার জন্য পাক খেতে খেতে উপরের দিকে উঠছে।

- কিছু কিছু ক্ষেত্রে গ্রাফটা আমরা surface দিয়ে আঁকতে পারি--
  - যদি $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ হয়, তবে গ্রাফটাকে অনেক সময়ে একটা **surface**-এর মত ভাবা যেতে পারে। এগুলোও কম্পিউটার ছাড়া আঁকা কঠিন। আমাদের বইতে এরাই সবচেয়ে বেশী কাজ লাগবে। একটা উদাহরণ হল $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$. এর surface-টা দেখতে ঠিক যেন পুকুরের জলে ঢিল ছোঁড়া হয়েছে (Fig 7)।
  - যদি $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ হয়, তাহলেও গ্রাফগুলোকে surface-এর মত করে ভাবা যায়, অনেকটা শূন্যে ভাসমান রুমালের মত, অবশ্য রুমালটা পাটিসাপটা পিঠের মত হলেও আটক নেই (Fig 8)। এটা কী করে পেলাম বুঝে নাও। শুরু করেছিলাম $\mathbb{R}^2$ থেকে, মানে গ্রাফ কাগজ থেকে। ধরো সেখানকার কোনো একটা বিন্দু হল (u, v). এর উপরে f লাগালে পাব $\mathbb{R}^3$-এর একটা বিন্দু, ধরো (x, y, z). ঠিক যেন f লাগানোর ফলে (u, v) বিন্দুটা শূন্যে ভেসে উঠে (x, y, z)-এ পৌঁছোলো। এইভাবে পুরো গ্রাফ কাগজটাই শূন্যে ভেসে উঠে surface-টা সৃষ্টি করেছে।

Fig 5

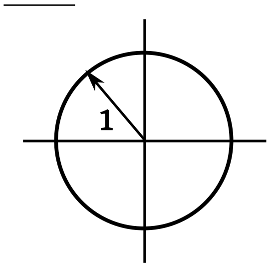


Fig 6

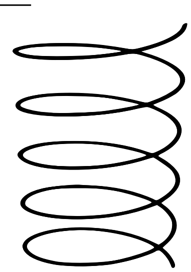


Fig 7

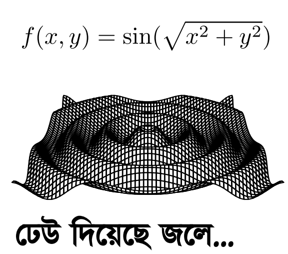
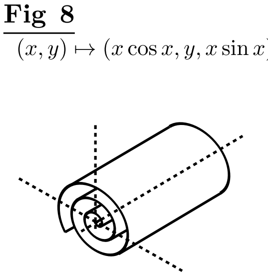


Fig 8



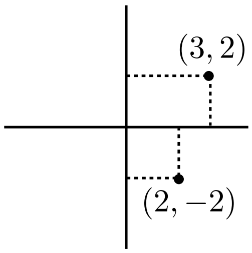


Fig 9

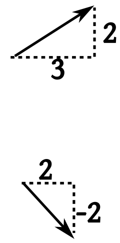


Fig 10

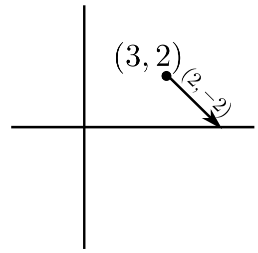


Fig 11

এই ভেসে ওঠার ব্যাপারটার অ্যানিমেশন দেখতে চাইলে এই QR code-টা স্ক্যান করো। তবে কিনা QR code বানানো নতুন শিখেছি, তার উপর ছাপার মানের উপরেও আমার কোনো নিয়ন্ত্রণ নেই। তাই নেহাত যদি QR code-টা কাজ না করে, তবে একটু কষ্ট করে নীচের web address-টা কোনো browser-এ ঢোকালেও চলবে।
`https://arnabc74.github.io/mult/surf.html`

- তীর চিহ্ন দিয়ে--
  - যদি $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ হয়, তবে সেটা বোঝানোর একটা কায়দা হল অনেকগুলো তীর চিহ্ন এঁকে। কায়দাটা এইরকম--যদি তোমাকে $\mathbb{R}^2$-র কোনো সদস্য দিই, তবে সেটাকে তুমি দুভাবে ভাবতে পারো। এক, একটা বিন্দু হিসেবে (Fig 9), আর দুই, একটা তীর চিহ্ন হিসেবে (Fig 10)। যদি $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ দেওয়া থাকে, তবে $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ থেকে আমরা $f(x,y) \in \mathbb{R}^2$ পাব। এদের মধ্যে প্রথমটাকে আমরা বিন্দু হিসেবে ভাবব, আর দ্বিতীয়টাকে সেই বিন্দুতে একটা তীর চিহ্ন হিসেবে। যেমন যদি $f(3,2) = (2,-2)$ হয়, তবে আমরা পাব Fig 11। অবশ্য যাবতীয় বিন্দুতে এরকম তীর আঁকতে গেলে পুরো কাগজটাই কালো হয়ে যাবে। কিন্তু যদি অনেকগুলো বিন্দুতেও আঁকা যায়, তাহলেও function-টার চেহারা সম্পর্কে একটা ধারণা পাওয়া যায়।
  - যদি $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ হয়, তাহলেও তীর চিহ্ন আঁকার কায়দাটা চলতে পারে, কিন্তু কম্পিউটার ছাড়া আঁকা কঠিন। এরকম ছবি অনেকটা মাঠের উপর দিয়ে নানা দিকে হাওয়া বইবার মত হয়। সত্যিই, যারা হাওয়ার গতি বা নদীতে জলের প্রবাহ নিয়ে কাজ করে, তারা যখন বিভিন্ন বিন্দুতে গতির বিভিন্নতা বোঝাতে চায়, সেটাকে একটা $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ হিসেবে প্রকাশ করে। এই বইতে এক জায়গায় এই কায়দাটা খুব কাজে আসবে।

এতবার কম্পিউটারের কথা শুনে যারা মুষড়ে পড়েছ, তাদের অভয় দিয়ে দুটো কথা বলি। প্রথমতঃ, গ্রাফগুলো দরকার মূলতঃ তোমার কল্পনাশক্তিকে উস্কে দেবার জন্য। এই বইতে আমরা এরকম নানা গ্রাফ দেব। সেগুলো ভালো করে দেখলেই তোমার কল্পনাশক্তির যথেষ্ট চর্চা হবে, যাতে অংক করার সময়ে তুমি গ্রাফগুলো আঁকতে না পারলেও অন্ততঃ মনশ্চক্ষে দেখতে পারো। অতএব কোন কম্পিউটার বা স্মার্টফোন না থাকলেও দুঃখ করার কারণ নেই। হাজার হোক, এইসব ধারণা যখন আবিষ্কার হয়েছিল, তখন কম্পিউটার বা স্মার্টফোনের নামও কেউ শোনেনি। দ্বিতীয়তঃ, আজকাল বিস্তর ফ্রী অ্যাপ্ আছে যেগুলো দিয়ে দিয়ে তুমি এরকম সব গ্রাফ অনায়াসে এঁকে ফেলতে পারবে। এরকম একটার নাম হল GeoGebra. হাতে সময় থাকলে Google করে দেখতে পারো।

এতসব কায়দার মধ্যে আমাদের সবচেয়ে বেশী কাজে লাগবে কোনো $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-কে surface হিসেবে কল্পনা করতে পারাটা। কিছু ক্ষেত্রে কাজটা খালি হাতেই করা যায়। সেগুলো শিখে রাখি।

1.2.1 কিছু গ্রাফ যাদের সহজে কল্পনা করা যায়

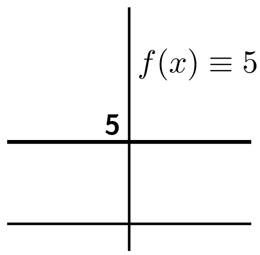


Fig 12

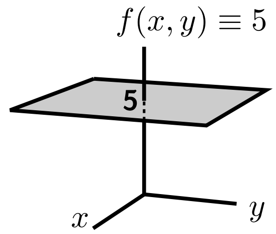


Fig 13

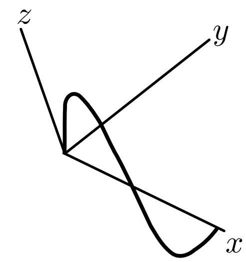


Fig 14

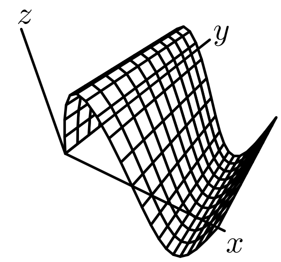


Fig 15

এই জায়গাটা অ্যানিমেশন দিয়ে বুঝতে চাইলে এই QR code-টা মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করো।
`https://arnabc74.github.io/mult/graph.html`

Example 3: আমরা জানি যে, যদি $f(x) \equiv 5$ হয়, তবে তার গ্রাফটা হয় 5 উচ্চতায় একটা horizontal লাইন (Fig 12)। একইভাবে $f(x, y) \equiv 5$-এর গ্রাফ হবে 5 উচ্চতায় একটা horizontal plane, যেমন দেখিয়েছি Fig 13-এ। যদি 5-এর জায়গায় 0 নিতাম, তবে গ্রাফটা xy-plane-এর সঙ্গে মিশে যেত। ■

লক্ষ করো, $f(x, y) \equiv 5$ কিন্তু x আর y-এর value-গুলো মোটেই ব্যবহার করছে না। এমনও হতে পারে যে x আর y-এর মধ্যে কেবলমাত্র একটা ব্যবহৃত হল, যেমন $f(x, y) = \sin x$ বা $f(x, y) = \cos y$. এরকমক্ষেত্রে গ্রাফটা কল্পনা করা খুব সহজ। একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝাই।

Example 4: $f(x, y) = \sin x$-এর গ্রাফ কী করে আঁকবে?

SOLUTION: প্রথমে xz-plane-এ $z = \sin x$-এর গ্রাফটা নাও (Fig 14)। এবার সেটাকে y-axis-এর সঙ্গে সমান্তরালভাবে টেনে বার করে আনো (Fig 15)। ■

Exercise 3: $f(x, y) = \cos y$-এর গ্রাফ কীরকম দেখতে হবে? ■

একরকমের surface আছে, যাদের কল্পনা করাও সহজ, ফর্মুলা বার করাও সহজ। এরা হল **surface of revolution**. একটা উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

Example 5: ধরো $z = x^2$ নিয়ে শুরু করলাম, যেখানে $x > 0$. এই গ্রাফটা একটা parabola-র অর্ধেক হবে (Fig 16)। যদি এটাকে z-axis-কে কেন্দ্র করে একপাক ঘুরিয়ে দিই, তবে কীরকম দেখাবে? এর ফলে যে function-টা পাওয়া গেল তার ফর্মুলা কী হবে?

SOLUTION: Surface-টাকে দেখতে হবে যেন একটা কাপের মত, যেমন রয়েছে Fig 17-এ। ফর্মুলাটা হল $f(x, y) = x^2 + y^2$. কী করে এটা পেলাম বলি। আমরা $z = x^2$-কে এইভাবে ভাবতে পারি--যতই z-axis থেকে দূরে যাবে ততই উপরে উঠবে, যতটা দূরে (মানে x), তার square পরিমাণ উপরে উঠবে (মানে x^2)। এবার যখন ঘোরাচ্ছ, তখন কোনো (x, y)

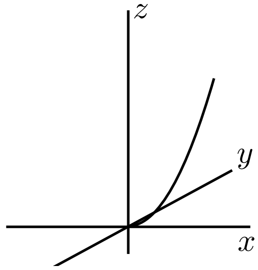


Fig 16

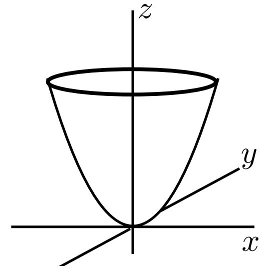


Fig 17

বিন্দুর z-axis থেকে দূরত্ব হল $\sqrt{x^2+y^2}$. আমাদের বলেছে সেই বিন্দুতে surface-টার উচ্চতা হবে এই দূরত্বের square, তাই $z = x^2 + y^2$. ■

একই যুক্তিতে তুমি যাই $z = f(x), \quad x > 0$, নিয়ে z-axis-কে কেন্দ্র করে এক পাক ঘোরাও, যে surface-টা পাবে, তার ফর্মুলা হবে $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Exercise 4: এই কায়দায় বলো তো $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$-এর গ্রাফটা কীরকম দেখতে হবে? ■

1.3 Component এবং slice

আমরা দেখেছি যে একটা $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ মানে হল আসলে m-খানা $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ function-এর সমাহার। যেমন $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ যদি হয়

$$f(x,y) = (x+y, xy),$$

তবে এটার মধ্যে দুটো function ঢুকে আছে, $f_1(x,y) = x+y$ এবং $f_2(x,y) = xy$. এদের বলে f-এর একেকটা **component function**. সাধারণতঃ component function-দের নিয়ে কাজ করা সহজতর, সেই জন্যেই লোকে ওদের কদর করে।

Exercise 5: $f(x,y,z) = (xy, yz, zx)$-এর component function-গুলো কী কী? ■

আরেকভাবেও একটা function-কে সহজতর function-এ ভেঙে লেখা যায়। তাকে বলে **slice** করা (যদিও এটা খুব প্রচলিত ভাষা নয়)। বোঝার জন্য একটা function নিই, যেটা $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, যেমন ধরো

$$f(x,y) = \sin(x+y^2).$$

এখানে দুটো variable রয়েছে। অনেক সময়ে এদেরকে একসঙ্গে সামলানো মুস্কিল হয়, তখন $f(x,y)$-কে একটা এক variable-এর function-এ পরিণত করে নিলে সুবিধা হয়। এই কাজটা করার অনেক কায়দা আছে, একটা হল x বা y কোনোটার জায়গায় একটা সংখ্যা বসিয়ে দেওয়া। যেমন $x = 1$ বসালে পাব খালি y-এর একটা function

$$g(y) = f(1,y) = \sin(1+y^2).$$

একইভাবে যদি $y = 3$ বসাতাম, তবে পড়ে থাকত খালি x-এর একটা function

$$h(x) = f(x,3) = \sin(x+9).$$

এখানে $g(y)$ আর $h(x)$ হল $f(x,y)$-এর দুটো **slice function**.

Exercise 6: যদি $g(r,s) = re^{rs}$ হয়, তবে $r = 1$-এ slice করলে কী function পাবে? ■

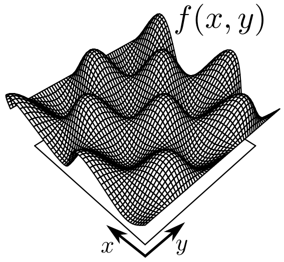


Fig 18

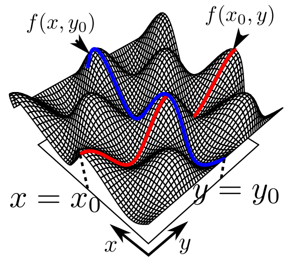


Fig 19

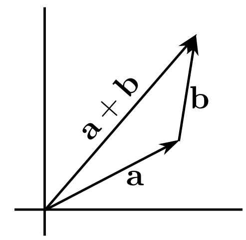


Fig 20

অনেক সময়ে এই slice-গুলোকে নাড়াচাড়া করে মূল function-টার বিষয়ে গুরুত্বপূর্ণ তথ্য পাওয়া যায়। সেরকম উদাহরণ আমরা পরে দেখব। আপাততঃ ছবি দিয়ে বুঝে নিই, slice function-রা দেখতে কীরকম, এবং কেনই বা এদের এমনধারা নাম দেওয়া হয়েছে। Fig 18-এ কোনো একটা function-এর গ্রাফ দেখিয়েছি, যেটা $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. গ্রাফটা দেখতে একটা surface-এর মত। ধরো এর domain-এর একটা বিন্দু নিলাম (x_0, y_0). যদি এবার $x = x_0$ রেখে খালি y-টা বদলাই, তবে ব্যাপারটাকে ভাবতে পারো যেন ছুরি দিয়ে surface-টাকে y-axis-এর সমান্তরালে চিরে দিচ্ছি, মানে slice করছি। এর ফলে surface-টার গায় যে curve বরাবর আঁচড় পড়বে, সেটাই হবে $f(x_0, y)$-এর গ্রাফ (Fig 19)। একইভাবে $y = y_0$ স্থির রেখে খালি x বদলালে পাবে $f(x, y_0)$-এর গ্রাফ।

DAY 2
Open set, closed set ইত্যাদি

2.1 দূরত্ব

Real analysis শেখার সময়ে নিশ্চয়ই লক্ষ করেছিলে যে, open set, closed set, limit point ইত্যাদির ধারণা খুবই কাজে লাগে। এবং তার পিছনে প্রধান ভূমিকা পালন করে দুটো বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের ধারণাটা। যদি $x, y \in \mathbb{R}$ হয়, তবে এদের মধ্যে দূরত্ব হবে $|x - y|$. যদি $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ হয় তবে ওদের দূরত্ব হবে

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

একইভাবে $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ হলে ওদের মধ্যে দূরত্ব হবে

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

এই প্যাটার্ন মেনে আমরা $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$-এর মধ্যে দূরত্ব নেব

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

যেখানে $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ এবং $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$. এই দূরত্বকে আমরা সংক্ষেপে লিখি $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. এইভাবে লেখার কারণ যাতে আমরা $\mathbb{R}$-এর notation-এর কাছাকাছি থাকতে পারি। ওখানে লিখতাম $|x - y|$, আর এখানে লিখছি $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. এই দূরত্বের প্রচলিত নাম হল **Euclidean distance**.

DEFINITION: **Euclidean distance**

For any two points $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ and $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ we define the **Euclidean distance** between them as

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

এই $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ এবং $|x_i - y_i|$-দের মধ্যে একটা সুন্দর সম্পর্ক আছে। যদি $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ ছোটো হয়, তবে প্রতিটা $|x_i - y_i|$-ও ছোটো হতে বাধ্য। আবার যদি প্রতিটা $|x_i - y_i|$-ই ছোটো হয়, তবে $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$-ও ছোটো না হয়ে যায় না। এইটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য--

THEOREM

Let $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Let $\epsilon > 0$ be any number.

1. If $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \epsilon \implies \forall i \quad |x_i - y_i| < \epsilon$
2. If $\left(\forall i \quad |x_i - y_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right) \implies \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \epsilon$

প্রথম অংশটার জন্য লক্ষ করো--

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \geq (x_i - y_i)^2,$$

যেহেতু square-রা সকলেই ≥ 0 হয়। এবার দুপাশের non-negative square root নিলেই পাবে

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 \geq |x_i - y_i|.$$

মনে রেখো $(x_i - y_i)^2$-এর non-negative square root কিন্তু $|x_i - y_i|$. সুতরাং $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 < \epsilon$ হলে $|x_i - y_i| < \epsilon$ হতে বাধ্য। এই গেলে theorem-এর প্রথম অংশ।
দ্বিতীয় অংশটা আসছে এইভাবে--

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n \times \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon. \end{aligned}$$

ব্যস্!
দূরত্ব নিয়ে যত theorem আছে, তার মধ্যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হল নিঃসন্দেহে এইটা--

Triangle inequality

For any $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

এর প্রমাণের মধ্যে আমরা এখানে যাব না। খালি এটুকু বলব যে হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে আমরা যে দুটো vector-কে যোগ করার triangle rule শিখি, সেটা দিয়ে ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভাবা যায় Fig 20-এর মত করে। আমরা জানি যে কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুটো বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের থেকে বড় হতে পারে না। সেখান থেকেই triangle inequality নামের জন্ম।

2.2 Neighbourhood

মনে আছে নিশ্চয়ই যে real analysis-এ আমরা $N(a, \epsilon)$ নিয়ে কাজ করতাম। এটা ছিল সেই সব সংখ্যার set, যাদের a-থেকে দূরত্ব হল $< \epsilon$. মানে

$$N(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < \epsilon\}.$$

একই রকম জিনিস আমরা $\mathbb{R}^n$-এর জন্যও করব--

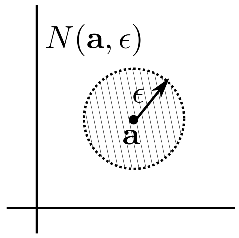


Fig 21

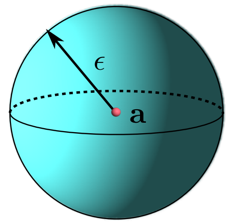


Fig 22

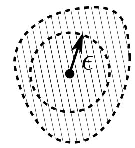


Fig 23

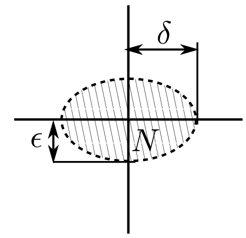


Fig 24

> DEFINITION: **ϵ-neighbourhood**
>
> Let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ and $\epsilon > 0$. Then the **ϵ-neighbourhood** of **a** is defined as
>
> $$N(\mathbf{a}, \epsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \epsilon\}.$$

ছবি দিয়ে $N(\mathbf{a}, \epsilon)$-কে কল্পনা করা শিখে রাখো। যদি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কাজ হয়, তবে $N(a, \epsilon)$ হল $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. যদি $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে থাকো, তবে $N(\mathbf{a}, \epsilon)$ হল Fig 21-এর মত চাকতি। আর $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় একটা বলের ভিতরটার মত (Fig 22)। ব্যস্, একবার যেই ϵ-neighbourhood (বা **ϵ-ball**) কাকে বলে শিখে গেলে, এবার open set, closed, limit point, continuity ইত্যাদির definition আর নতুন করে শেখার কিছু নেই, ওরা একেবারেই $\mathbb{R}$-এর বেলায় যা ছিল তাই, খালি neighbourhood-এর নতুন definition ব্যবহার করে। যারা real analysis-এর ধারণাগুলো ভুলে গেছ, তাদের ঘাবড়াবার কোনো কারণ নেই। আমরা সংক্ষেপে সেসব এখানে ফের আলোচনা করে নেব। আমরা ϵ-neighbourhood-এর কথা শিখলাম। অনেক সময়ে দেখবে neighbourhood শব্দটা আলাদা করে ব্যবহার হচ্ছে। যখন ϵ-neighbourhood বলছি, তখন সব দিকেই ϵ দূর অবধি যাচ্ছি। যদি খালি neighbourhood বলি, তার মানে সবদিকেই খানিক দূর অবধি যাচ্ছি (অন্ততঃ কোনো $\epsilon > 0$ পর্যন্ত), তার চেয়ে বেশী গেলেও আপত্তি নেই (Fig 23)। অংকের ভাষায় সংজ্ঞাটা এরকম--

> কোন কথাটা তাও ভুলেছিস? ছেড়ে দিছিস্ হাওয়াতে?
> কী বলছিলেম পরশু রাতে বিষ্টু বোসের দাওয়াতে?
> ভুলিসনি তো বেশ করেছিস, আবার শুনলে ক্ষেতি কী?
> বড় যে তুই পালিয়ে বেড়াস, মাড়াস নে আর এদিকই?
>
> --সুকুমার রায়

> DEFINITION: **Neighbourhood**
>
> Let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Then $B \subseteq \mathbb{R}^n$ is called a **neighbourhood** of **a** in $\mathbb{R}^n$ if
>
> $$\exists \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{a}, \epsilon) \subseteq B.$$

অর্থাৎ **a**-কে কেন্দ্র করে কোনো একটা ϵ-neighbourhood যদি B-এর মধ্যে থাকে, তবেই হল।

Example 6: Is $N = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{y^2}{\delta^2} < 1\right\}$ $(\epsilon, \delta > 0$ and $\epsilon \neq \delta)$ a neighbourhood of $(0, 0)$?

For what value of ϵ, δ $(\epsilon \neq \delta)$

$$N \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 < 1\}?$$

[2+1] **(2016.1a)**

SOLUTION: N-কে ছবিতে দেখতে Fig 24-এর মত একটা ellipse. বুঝতেই পারছ ওর পেটে $(0,0)$-কে কেন্দ্র করে একটা চাকতি ঢুকিয়ে দেওয়ায় কোনোই অসুবিধা নেই। খালি চাকতিটার radius যেন ϵ আর δ-কে ছাড়িয়ে না যায়।

First part:

Yes, N is a neighbourhood of $(0,0)$, ie,

$\exists \eta > 0 \quad N((0,0),\eta) \subseteq N$.

এখানে ϵ, δ দুটো অক্ষরই ব্যবহার হয়ে গেছে। তাই একটা নতুন অক্ষর η (এটা) আমদানী করতে হল।

বাঁদিকের মার্জিনে ওই ◎-টা আবার কী জিনিস? বাঁদিকের মার্জিনে লেখা ◎বা "$\exists\eta$" বা জাতীয় জিনিসগুলো প্রমাণের ধাপটা খেয়াল রাখার জন্য। এই কায়দায় প্রমাণ লেখার কায়দা যদি গুছিয়ে শিখতে চাও, তবে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের Real Analysis (vol 1) দেখে নিতে পারো। বা পাশের QR code-টা মোবাইলে স্ক্যান করে বা নীচের address-টা ব্যবহার করে একটা ভিডিও দেখে নিতে পারো।

https://arnabc74.github.io/mult/proof.html

$\boxed{\exists\eta}$ Choose $\eta = \min\{\delta,\epsilon\} > 0$.

Then, if $(x,y) \in N((0,0),\eta)$, we must have $x^2+y^2 < \eta^2$, and so $\frac{x^2}{\delta^2} + \frac{y^2}{\epsilon^2} < \frac{x^2}{\eta^2} + \frac{y^2}{\eta^2} < 1$, as required.

এবার দ্বিতীয় অংশ। এখানে আমাদের কাজ হল ellipse-টাকে unit disc-এর মধ্যে ঢোকানো। Fig 24 দেখলেই বুঝবে যে এর জন্য ϵ আর δ দুজনকেই ≤ 1 হলেই হবে।

Second part: Shall show $N \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 < 1\} \iff \epsilon,\delta \leq 1$.

এটা একটা if and only if-জাতীয় জিনিস, তাই দুটো দিক দেখাতে হবে--

$\Leftarrow$ part: Let $\epsilon,\delta \leq 1$.

Take any $(x,y) \in N$.

Then $x^2+y^2 \leq \frac{x^2}{\delta^2} + \frac{y^2}{\epsilon^2} < 1$, as required.

অন্য দিকটায় জটিলতা সামান্য বেশী। Contradiction লাগাব--

> $\Longrightarrow$ part: Let $N \subseteq \{(x, y) \;:\; x^2 + y^2 < 1\}$.
> Let, if possible, $\epsilon > 1$. We pick some t with $1 < t < \delta$.
> Then $(t, 0) \in N$, but $t^2 + 0^2 > 1 (\Rightarrow\Leftarrow)$. So $\delta \leq 1$, as required.
> Similarly, let, if possible, $\epsilon > 1$. We pick some u with $1 < u < \epsilon$.
> Then $(0, u) \in N$, but $0^2 + u^2 > 1 (\Rightarrow\Leftarrow)$. So $\epsilon \leq 1$, as required.

ওই যে $\Rightarrow\Leftarrow$ লিখেছি, ওর মানে হল contradiction, অর্থাৎ অসম্ভব। ■

2.3 Open set

Example 7: Define an open set $S \subseteq \mathbb{R}^2$. [1] **(2012.1ap1)**

SOLUTION: সংজ্ঞাটা দেওয়ার আগে ধারণাটা দিয়ে নিই। তুমি একটা open জায়গা বলতে কী বোঝো? নিশ্চয়ই এমন কোনো জায়গা যেখানে চারধারে খানিকটা হাত পা খেলানোর সুবিধা আছে। দেওয়ালে পিঠ ঠেসে দাঁড়িয়ে থাকলে অবশ্যই বলা যায় না যে আমি একটা open জায়গায় দাঁড়িয়ে আছি! অংকের জগতেও ঠিক তাই। একটা set-কে open তখনই বলব, যখন ওর যেই বিন্দুতেই তুমি দাঁড়াও না কেন, চারধারে হাত পা খেলানোর খানিকটা জায়গা তুমি পাবেই, মানে ওকে ঘিরে একটা ϵ-neighbourhood পাবে, যেটা পুরোটাই set-টার মধ্যেই আছে।

> **DEFINITION: Open set**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is called **open** in $\mathbb{R}^n$ if
>
> $$\forall \mathbf{a} \in A \quad \exists \delta > 0 \quad N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq A.$$
>
> In particular, ϕ is an open set (vacuously).

শেষের লাইনটা বুঝে নাও। যদি বলি "আমাদের বাড়ির পোষা ডাইনোসরগুলো সবাই তিনতলা বাড়ির সমান উঁচু", তবে কিন্তু মোটেই স্বীকার করা হচ্ছে না যে আমাদের বাড়িতে কোনো পোষা ডাইনোসর আছে। এতে খালি এটুকুই বলা হচ্ছে যে, যদি কোনো পোষা ডাইনোসর থেকে থাকে, তবে সেটা তিনতলা বাড়ির সমান উঁচু। অতএব আমাদের বাড়িতে কোনো পোষা ডাইনোসর না থাকলেও এই বাক্যটা দিব্যি true থাকে। তবে কিনা এই বাক্যটাকে true বলে ভাবতে একটু অস্বস্তি লাগা আশ্চর্য নয়, সেই কারণে লোকে অনেক সময়ে একে বলে **vacuously true** (ভ্যাকুয়াসলি ট্রু)। এটা অনেকটা যেমন বিচারে আসামীর খালাস পাওয়ার মত। ব্যাপারটা দুভাবে হতে পারে--এক, যদি নিরপরাধ প্রমাণ হয়, আর দুই, যদি অপরাধ প্রমাণিত

Fig 25

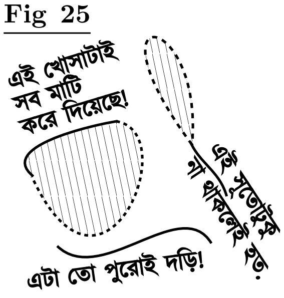


Fig 26

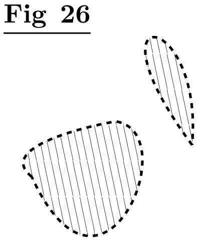


Fig 27

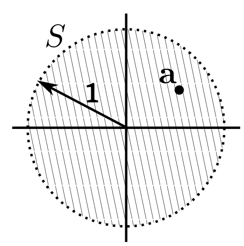
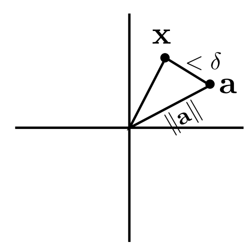


Fig 28



না হয়। এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বলা যায় যে আসামী vacuously খালাস পেল। একইভাবে, অংকের ভাষায় যদি কোনো বাক্য এইভাবে শুরু হয়--

$$\forall a \in A \quad \cdots,$$

তার মানে যদি A-র ভিতরে কোনো a থাকে, তবে তার জন্য ওই $\cdots$ অংশটা খাটবে। কোথাও বলা হচ্ছে না যে A-র মধ্যে কোনো a পাওয়া যাবেই! তাই যদি $A = \phi$ হয়, তবে বাক্যটা vacuously true হয়। এখানে "vacuously" শব্দটা বাদ দিলেও কোনো মহাভারত অশুদ্ধ হত না (বস্তুতঃ, অংকের ভাষাটা সড়গড় হয়ে গেলে লোকে আর আলাদা করে vacuously লেখেও না), কিন্তু প্রথম প্রথম অংক শেখার সময়ে এটা লিখে দেওয়াই ভালো। ■

Open set-দের কল্পনা করার জন্য এইভাবে ভাবলে সুবিধা হবে--ওরা যেন খোসা ছাড়ানো ফুলো ফুলো set[1], কোথাও খোসা গায় লেগে থাকলে বা চিমসে দড়ি হয়ে গেলে চলবে না। Fig 25-এ কিছু set দেখিয়েছি $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে, যারা কেউই open নয়। এখানে ড্যাশ ড্যাশ লাইনগুলো set-এর বাইরে আছে। এদের সঙ্গে Fig 26-এ দেখানো set-গুলোর তুলনা করো, যারা সকলেই open.

Example 8: দেখাও যে $S = \{(x, y) \; : \; x^2 + y^2 < 1\}$ হল একটা open set.

SOLUTION: এরকম অংকে একদম সংজ্ঞা ধরে ধরে এগোনোই ভালো। প্রথমে লিখে নিই কী দেখাতে হবে--

To show
$\forall \mathbf{a} \in S \quad \exists \delta > 0 \quad N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq S.$

ওই বাঁদিকে একটা টার্গেটের মত চিহ্ন দিয়েছি, ওটা খালি নিজেদের মনে রাখার জন্য যে আমাদের কী দেখাতে হবে। প্রথমেই আছে $\forall \mathbf{a} \in S$. তাই প্রমাণের শুরু হবে যেকোনো একটা $\mathbf{a} \in S$ নিয়ে--

$\boxed{\forall \mathbf{a}}$ Take any $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in S.$

এরপর আছে একটা $\exists$. যখনই $\exists$ থাকে, তখনই একটু মাথা ঘামাতে হয়। তার জন্য একটা ছবি এঁকেছি Fig 27-এর মত। যেহেতু S-এর মধ্যে পরিধিটা নেই, তাই $\mathbf{a}$-কে থাকতে হবে S-এর একটু গভীরে। সুতরাং সেই গভীরতাটুকু কাজে লাগিয়ে $\mathbf{a}$-কে ঘিরে একটা ছোট্টো neighbourhood ঢুকিয়ে দেওয়া যাবে S-এর মধ্যে। এর জন্য প্রথমে দেখি $\mathbf{a}$-টা S-এর পরিধি থেকে কত দূরে আছে। সেই দূরত্বটাকেই δ নেব।

Then $\|\mathbf{a}\| < 1.$
$\boxed{\exists \delta}$ Choose $\delta = 1 - \|\mathbf{a}\| > 0.$

এবার দেখাতে হবে যে $N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq S$, মানে $N(\mathbf{a}, \delta)$-এর যেকোনো সদস্যই S-এর মধ্যে আছে। অর্থাৎ যদি যেকোনো $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}, \delta)$ নাও, তবে $\|\mathbf{x}\| < 1$ হবে। এটা কেন হবে, সেটা প্রথমে সহজবুদ্ধিতে চিন্তা করে দ্যাখো। যদি $\mathbf{a}$ থেকে শুরু করে S-এর বাইরে যেতে চাই, তবে অন্ততঃ δ দূরত্ব যেতে হবে, অথচ $\mathbf{a}$ থেকে $\mathbf{x}$-এর দূরত্ব $< \delta$. সুতরাং $\mathbf{x}$ কী করে S-এর বাইরে যায়? এই ধরণের চিন্তাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করার জন্য triangle inequality-র ডাক পড়ে। প্রথম প্রথম সহজবুদ্ধিকে triangle inequality দিয়ে প্রকাশ করতে একটু বেগ পেতে হয়। যে ত্রিভুজের উপর triangle inequality লাগাব সেটা Fig 28-এর দেখালাম।

Let $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}, \delta)$. Then $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta.$
So, by triangle inequality, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{a} + \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\| < \delta + \|\mathbf{a}\| = 1.$

[1] এর একমাত্র ব্যতিক্রম হল ϕ.

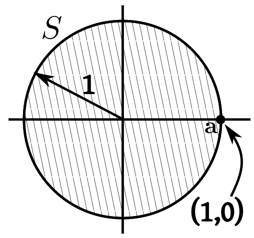


Fig 29

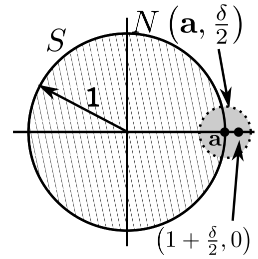


Fig 30

Hence $N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq S$, as required.

■

এই অংকটার সঙ্গে নীচের অংকটার তুলনা করো।

Example 9: দেখাও যে $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$ একটা open set নয়।

SOLUTION: এখানকার S-টা প্রায় আগের অংকের S-এর মতই, খালি এখানে পরিধিটা S-এর মধ্যেই আছে, এবং সেই জন্যই সমস্যা হচ্ছে। আমরা এখানেও শুরু করব সংজ্ঞা থেকে, বা বলা ভালো সংজ্ঞাটার negation থেকে (মানে উল্টোটা থেকে), কারণ আমরা দেখাব যে S-টা open নয়।

To show

$\exists \mathbf{a} \in S \quad \forall \delta > 0 \quad N(\mathbf{a}, \delta) \not\subseteq S.$

এই negation-টা কী করে পেলাম? সব $\forall$-কে $\exists$ এবং সব $\exists$-কে $\forall$ করে দিয়েছি, এবং সব শেষের $\subseteq$-টাকে $\not\subseteq$ করে দিয়েছি, ব্যস্!
এবার প্রথমেই একটা $\exists$ রয়েছে। তার মানে মাথা ঘামাতে হবে। এমন একটা **a** পেতে হবে, যার চারপাশে হাত পা খেলাবার জায়গা নেই, মানে দেওয়ালে পিঠ ঠেকে থাকা কোনো বিন্দু চাই। এখানে দেওয়াল মানে পরিধি, তাই পরিধির উপরে যেকোনো **a** নিলেই চলবে। আমরা এইভাবে নিলাম--

$\exists \mathbf{a}$ Choose $\mathbf{a} = (1, 0) \in S$.

Fig 29 দেখে নাও। এরপর আছে $\forall \delta > 0$. তাই যা খুশি একটা $\delta > 0$ নেব--

$\forall \delta$ Take any $\delta > 0$.

এবার দেখাতে হবে $N(\mathbf{a}, \delta) \not\subseteq S$, মানে এমন কোনো একটা বিন্দু বার করে দেখাতে হবে, যেটা $N(\mathbf{a}, \delta)$-এর মধ্যে থাকলেও S-এর মধ্যে নেই। এরকম অনেক বিন্দুই আছে। Fig 30-এ আমরা $\left(1 + \frac{\delta}{2}, 0\right)$ বিন্দুটাকে নিয়েছি।

Then $(1 + \frac{\delta}{2}, 0) \in N(\mathbf{a}, \delta)$ but $(1 + \frac{\delta}{2}, 0) \notin S$.
So $N(\mathbf{a}, \delta) \not\subseteq S$, as required.

■

Exercise 7: দেখাও যে $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে $\{(x,y) \; : \; x^2+y^2 > 1\}$ একটা open set, কিন্তু $\{(x,y) \; : \; x^2+y^2 \geq 1\}$ তা নয়। ■

এবার একই জিনিসের সামান্য কঠিন সংস্করণ।

Example 10: Show that

$$S = \{(x,y) \; : \; 2 < x^2+y^2 < 3\}$$

is an open set in $\mathbb{R}^2$.[3] **(2011.17a)**
SOLUTION:

To show

$\forall \mathbf{a} \in S \quad \exists \delta > 0 \quad N(\mathbf{a},\delta) \subseteq S.$

∀a Take any $\mathbf{a} = (a,b) \in S.$

Then $\sqrt{2} < \|\mathbf{a}\| < \sqrt{3}.$

∃δ Choose $\delta = \min\{\|\mathbf{a}\| - \sqrt{2}, \sqrt{3} - \|\mathbf{a}\|\} > 0.$

কীরকম দুদিক বাঁচিয়ে δ নিলাম, দেখলে? এর ফলে $\|\mathbf{a}\| - \delta > \sqrt{2}$ এবং $\|\mathbf{a}\| + \delta < \sqrt{3}$ হচ্ছে। এইবার আমাদের দেখাতে হবে $N(\mathbf{a},\delta) \subseteq S$.

Pick any $\mathbf{x} = (x,y) \in N(\mathbf{a},\delta).$

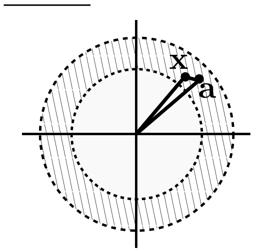
দেখাতে হবে যে $\mathbf{x}$-টা S-এর মধ্যে আছে, মানে $\sqrt{2} < \|\mathbf{x}\| < \sqrt{3}.$

Then

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|vx - \mathbf{a} + \mathbf{a}\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\| \quad \text{[by triangle inequality]} \\ &< \delta + \|va\| < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

যদি গুলিয়ে যায়, তবে Fig 31-এ দেখে নাও কোন ত্রিভুজের উপর triangle inequality লাগানো হচ্ছে। ওই একই ত্রিভুজের উপর আমরা আরেকবার triangle inequality লাগাব। পার্থক্যটা ভালো করে লক্ষ করো।

Fig 31



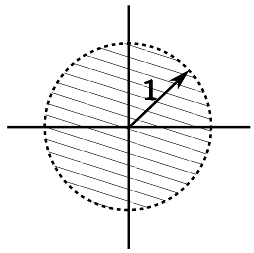


Fig 32

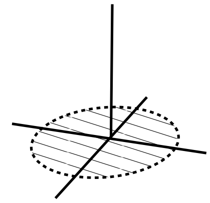


Fig 33

Also

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &\geq \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \\ &> \|\mathbf{a}\| - \delta > \sqrt{2}. \end{aligned}$$

So $\mathbf{x} \in S$, as required.

■

আমরা open set-দের কল্পনা করতে বলেছি খোসাছাড়া "ফুলো ফুলো" set হিসেবে। মনে রেখো, কোনো $\mathbb{R}^n$-এর মধ্যে "ফুলো ফুলো" ব্যাপারটা অবশ্য n-এর উপরে নির্ভর করে। যেমন ধরো, একটা তাসের সাহেবকে যদি তুমি দ্যাখো, তবে $\mathbb{R}^2$-র সাপেক্ষে দিব্যি মোটাসোটা মানুষটি। কিন্তু $\mathbb{R}^3$-র মধ্যে ওটা একটা পাতলা তাসের উপর আঁকা ছবি বই আর কিছুই নয়! এইটা নিয়েই এবারের অংকটা।

Example 11: আমরা একটু আগেই দেখলাম যে $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ হল একটা open set. এটা দেখতে একটা চাকতির মত (Fig 32)। এবার ধরো এই set-টা দিচ্ছি--

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 < 1, \, z = 0\}.$$

ছবি দিয়ে ভাবতে গেলে এটাও সেই আগের চাকতিটাই, খালি xy-plane-এ শুইয়ে রাখা আছে (Fig 33)। দেখাও যে $\mathbb{R}^3$-র মধ্যে S মোটেই open নয়।

SOLUTION: ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া সোজা। S হল একটা চ্যাপ্টা জিনিস, এর মধ্যে আস্ত একটা বলকে ঢোকালে সেটা তো ফুলকো লুচির মত ফুলে উঠবে, চ্যাপ্টা থাকবে কী করে? এটাই আমরা অংকের ভাষায় প্রকাশ করব।

To show

$\exists \mathbf{a} \in S \quad \forall \delta > 0 \quad N(\mathbf{a}, \delta) \not\subseteq S.$

এইটা পেয়েছি negation ব্যবহার করে।

$\exists \mathbf{a}$ Choose $\mathbf{a} = (0, 0, 0) \in S$.

$\forall \delta$ Take any $\delta > 0$.

এবার দেখাতে হবে যে $N(\mathbf{a}, \delta)$-টা মোটেই পুরোটা S-এর মধ্যে নেই। কারণটা আমরা জানিই, এই বলটা হল ফুলো, তাই xy-plane-এর বাইরে মাথা তুলেছে, কিন্তু S হল চ্যাপ্টা, তাই xy-plane-এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ। অতএব $N(\mathbf{a}, \delta)$-এর মধ্যে আমাদের এমন কোনো point নিতে হবে, যেটা xy-plane-এর বাইরে, তাহলেই সেটা আর S-এর মধ্যে থাকতে পারবে না। ফলে $N(\mathbf{a}, \delta) \not\subseteq S$ প্রমাণ হয়ে যাবে।

Let $\mathbf{x} = (0, 0, \frac{\delta}{2})$.
Then $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}, \delta)$, but $\mathbf{x} \notin S$.
Hence $N(\mathbf{a}, \delta) \nsubseteq S$, as required.

■

2.4 Closed set

এবার closed set-এর সংজ্ঞা। এটা দুভাবে দেওয়া যায়। প্রথম রূপটা এখানে দিচ্ছি। দ্বিতীয় রূপটা একটু পরে আসবে।

DEFINITION: Closed set (defn 1)

A set $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is called **closed** in $\mathbb{R}^n$ if A^c is open in $\mathbb{R}^n$.

অর্থাৎ, open set-দের complement-দের closed set বলে। এই সংজ্ঞা অনুযায়ী একটা set-কে closed দেখাতে হলে আমরা তার complement-টাকে open দেখাই। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 12: If $B = \{(a, 0) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$, show that B is a closed subset, but not an open subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.[4] **(2020, 2007)**

SOLUTION: প্রথমে বুঝে নাও যে এখানে B হল x-axis-টা। আমরা দেখাব যে B^c হল open, অর্থাৎ--

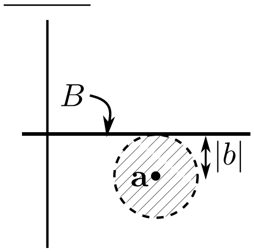
To show
$\forall \mathbf{a} \in B^c \quad \exists \delta > 0 \quad N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq B^c$.

প্রথমেই $\forall \mathbf{a} \in B^c$ আছে, তাই x-axis-এর বাইরে কোনো একটা $\mathbf{a}$ নেব--

$\forall \mathbf{a}$ Take any $\mathbf{a} = (a, b) \in B^c$.
Then $b \neq 0$.

এবার এমন একটা $\delta > 0$ নিতে হবে যাতে $N(\mathbf{a}, \delta)$ গিয়ে x-axis-এর ঘাড়ে না পড়ে। এখানে x-axis-এর থেকে $\mathbf{a}$-র দূরত্ব হল $|b|$. সেটাকেই δ হিসেবে নেওয়া যায়।

Fig 34



$\exists\delta$ Choose $\delta = |b| > 0$.

এবার দেখাতে হবে $N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq B^c$, মানে $N(\mathbf{a}, \delta)$-টা x-axis-এর ঘাড়ে গিয়ে পড়েনি। এটা ছবি দিয়ে বুঝতে সহজ (Fig 34)। কিন্তু অংকের ভাষায় লেখার জন্য triangle inequality-র ডাক পড়বে। এই জায়গাটায় মাথা গুলিয়ে যেতে পারে, ভালো করে চিন্তা করে পড়ো। প্রথমে কোনো একটা $\mathbf{x} = (x, y) \in N(\mathbf{a}, \delta)$ নেব, এবং দেখাব যে $\mathbf{x} \notin B$, মানে $y \neq 0$.

Take any $\mathbf{x} = (x, y) \in N(\mathbf{a}, \delta)$.

Then $|y - b| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta = |b|$. Hence $y \neq 0$. So $\mathbf{x} \in B^c$.

Thus $N(\mathbf{a}, \delta) \subseteq B^c$, as required.

■

Exercise 8: Correct or justify the following: The set $A = \{(x, y) : x, y \text{ both are rationals}\}$ is neither open nor closed set in $\mathbb{R}^2$.[2] **(2015.1a)**

HINT:

এই অংকের জন্য মনে রাখতে হবে যে rational-রা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense, এবং irrational-রাও তাই। ফলে A-টা দেখতে হবে যেন $\mathbb{R}^2$-এর উপরে গোলমরিচ ছড়ানো, কোথাও ফুলো ফুলো ব্যাপার নেই। তাই open নয়। আবার A^c-এর সম্পর্কেও একই কথা বলা যায়, তাই A-টা closed-ও হবে না।

The statement is correct.

দুটো জিনিস দেখাতে হবে, A-টা open নয়, এবং closed-ও নয়। একে একে দেখাই।

<u>A is not open:</u> To show

$\exists \mathbf{a} \in A\ \forall \epsilon > 0\ N(\mathbf{a}, \epsilon) \not\subseteq A$.

$\exists\mathbf{a}$ Choose $\mathbf{a} = (0, 0) \in A$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since $\mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$, hence $\exists s \in \mathbb{Q}^c \cap (-\epsilon, \epsilon)$. Then $(0, s) \in N(\mathbf{a}, \epsilon)$ but $(0, s) \notin A$.

So $N(\mathbf{a}, \epsilon) \not\subseteq A$, as required.

এবার অন্য অংশটা--

<u>A is not closed:</u> Shall show A^c is not open, ie,

$\exists \mathbf{a} \in A^c\ \forall \epsilon > 0\ N(\mathbf{a}, \epsilon) \not\subseteq A^c$.

বাকি অংশটা নিজে করার চেষ্টা করো। ■

2.5 কিছু ধর্ম

এবার আমরা open এবং closed set-দের কিছু ধর্ম আলোচনা করব। যারা real analysis ভুলে যাও নি, তাদের কাছে এগুলো সুপরিচিত।

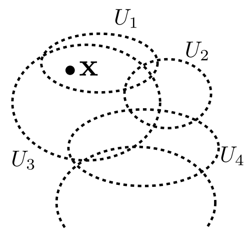


Fig 35

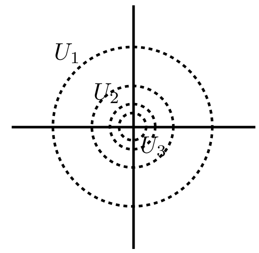


Fig 36

Example 13: Prove that union of infinite number of open sets in $\mathbb{R}^2$ is an open set in $\mathbb{R}^2$, but the intersection of infinite number of open sets in $\mathbb{R}^2$ may not be open.[5] **(2010.18)**

SOLUTION:

First part: Let $\{U_a \ : \ a \in A\}$ be an infinite collection of open sets in $\mathbb{R}^2$.

এইভাবে লেখার কায়দাটা বুঝে নাও। যদি খালি তিনটে set থাকত, তবে আমরা সাধারণতঃ তাদেরকে একসঙ্গে লিখি $\{U_1, U_2, U_3\}$. কিছু set-কে একসঙ্গে লিখলে বলে **collection of sets**. এটাকে আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম, $\{U_a \ : \ a \in \{1,2,3\}\}$. এখানে $\{1,2,3\}$-কে বলে **index set**. যদি index set-টা infinite হয়, তবে আমরা collection-টাকে বলি একটা **infinite collection**.

Shall show that $\cup_{a\in A} U_a$ is open in $\mathbb{R}^2$, ie,

$\forall \mathbf{x} \in \cup_{a\in A} U_a \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{x}, \epsilon) \subseteq \cup_{a\in A} U_a$.

$\forall \mathbf{x}$ Take any $\mathbf{x} \in \cup_{a\in A} U_a$.

Then $\mathbf{x} \in U_{a^*}$ for some $a^* \in A$.

যেমন Fig 35-এ তুমি $a^* = 1$ বা $a^* = 3$ নিতে পারো, কারণ $\mathbf{x}$ এখানে U_1 এবং U_3 দুজনের মধ্যেই আছে।

Since U_{a^*} is open in $\mathbb{R}^2$, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{x}, \epsilon) \subseteq U_{a^*}$.

$\exists \epsilon$ Choose this $\epsilon > 0$.

Then $N(\mathbf{x}, \epsilon) \subseteq U_{a^*} \subseteq \cup_{a\in A} U_a$, as required.

এবার অংকের দ্বিতীয় অংশ। এখানে কাজ হবে intersection নিয়ে--

Second part: Intersection of infinitely many open sets in $\mathbb{R}^2$ need not be open in $\mathbb{R}^2$.

এখানে একটা counter-example দিতে হবে।

We choose $U_n = N\left((0,0), \frac{1}{n}\right)$ for $n \in \mathbb{N}$.

Fig 36 দেখে নাও। লক্ষ করো, set-গুলো কীরকম $(0,0)$-র দিকে চেপে আসছে।

> Then, since $\frac{1}{n} \to 0$, we have $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{(0,0)\}$, which is not open in $\mathbb{R}^2$.

কেন open নয়, সেটাও সংক্ষেপে লিখে দেওয়া যাক--

> ⟦ Because:
>
> $\forall \epsilon > 0 \quad N\big((0,0),\epsilon\big) \not\subseteq \{(0,0)\}.$
>
> ⟧

■

Exercise 9: Show that intersection of finitely many open sets in $\mathbb{R}^n$ is again open in $\mathbb{R}^n$.
HINT:
যদি open set-গুলোকে $U_1, \ldots, U_n$ নাম দিই, তবে দুটো কেস হতে পারে--এক, ওদের intersection-টা ϕ, (সেক্ষেত্রে প্রমাণ করার কিছু নেই, কারণ ϕ একটা open set), আর দুই, intersection-টা non-empty. এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যদি intersection-টা থেকে একটা কোনো $\mathbf{a}$ নিই, তবে ওকে ঘিরে প্রতিটা U_i-এর জন্যই এমন ϵ_i পাবে, যাতে $N(\mathbf{a},\epsilon_i) \subseteq U_i$ হয় (কারণ U_i-গুলো প্রত্যেকেই open)। এবার $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ নিয়ে চিন্তা করে দ্যাখো। ■

নীচের অংকগুলো হল উপরের অংকগুলোরই closed সংস্করণ। এগুলোকে আলাদা করে প্রমাণ করার দরকার নেই, খালি de Morgan's law কাজে লাগিয়ে open set-এর ধর্মগুলো ব্যবহার করলেই হবে। De Morgan's law মনে আছে তো? মনে না থাকলে একবার লিখে দিচ্ছি--

$$(\cap_a U_a)^c = \cup_a U_a^c,$$
$$(\cup_a U_a)^c = \cap_a U_a^c.$$

Exercise 10: Show that arbitrary intersection of closed sets in $\mathbb{R}^n$ is again closed in $\mathbb{R}^n$.
HINT: এখানে arbitrary বলতে বোঝানো হচ্ছে যে, set-এর সংখ্যা finite, infinite, countable, uncountable যা খুশি হতে পারে। ■

Exercise 11: Show that union of finitely many closed sets in $\mathbb{R}^n$ is again closed in $\mathbb{R}^n$. ■

Fig 37



Fig 38

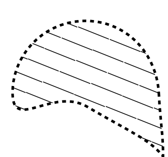


Fig 39

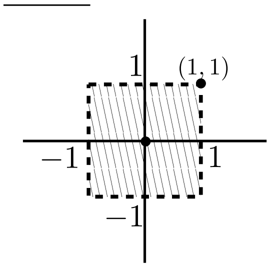
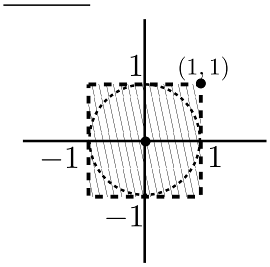


Fig 40



Exercise 12: Show that union of infinitely many closed sets in $\mathbb{R}^n$ may not be closed in $\mathbb{R}^n$. ■

DAY 3
বিভিন্ন ধরণের point

3.1 Interior point

আমরা open set-দের কল্পনা করতে বলেছি "ফুলো ফুলো" খোসা-ছাড়ানো set হিসেবে। অবশ্য ভুলে যেও না যে, ϕ-টা এই নিয়মের একমাত্র ব্যতিক্রম। অনেক set আছে, যার মধ্যে অনেকটাই "ফুলো ফুলো" অংশ থাকলেও হয়তো খানিকটা চিমসে লেজুড়ও জুড়ে আছে, বা কোথাও খানিকটা খোসা হয়তো আটকে আছে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 37-এ। যদি খোসা আর লেজুড় বাদ দিয়ে দিই, তবে যেটুকু পড়ে থাকবে (Fig 38), তাকে বলে মূল set-টার **interior**, আর এই interior-এর প্রতিটা point-কে বলে এককেটা **interior point**. ধারণাগুলো real analysis শেখার সময়েই আমরা শিখেছিলাম। সংজ্ঞাগুলো এখানেও একইরকম। প্রথমে interior point-এর সংজ্ঞা লেখার চেষ্টা করা যাক। যেহেতু খোসা আর লেজুড় বাদ দেওয়া হয়েছে, তাই interior point হল সেই সব point, যারা set-টার ভিতরে সামান্য হলেও একটু গভীরে আছে।

DEFINITION: **Interior point**

Let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ and let $A \subseteq \mathbb{R}^n$. We call $\mathbf{a}$ an **interior point** of A if

$$\exists \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{a}, \epsilon) \subseteq A.$$

Example 14: Examine whether the points $(1,1)$, $(0,0)$ are interior points of the set

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$.[2] **(2017.1a)**

SOLUTION: এরকম অংকে প্রথমেই একটা ছবি এঁকে নেওয়া ভালো। Fig 39 দ্যাখো। আশা করি ছবিটা দেখেই বুঝছ যে, $(0,0)$ হল interior point এবং $(1,1)$ মোটেই তা নয়। একবার ছবি দেখে বুঝে ফেলার পর অংক কষে প্রমাণ করতে হবে। প্রথমে set-টার একটা নাম দিয়ে নেওয়া যাক।

Let the set be S.

Shall show that $(0,0)$ is an interior point, ie,

$\exists \epsilon > 0 \quad N\big((0,0), \epsilon\big) \subseteq S.$

শুরুতে $\exists \epsilon > 0$ আছে, তাই একটা $\epsilon > 0$ নির্বাচন করে প্রমাণের সূত্রপাত হবে। উপযুক্ত ϵ নির্বাচনে ছবির ভূমিকা অনস্বীকার্য। একবার Fig 40-এর দিকে তাকালেই বুঝবে $\epsilon = 1$ বা তার চেয়ে ছোটো যেকোনো positive সংখ্যা নিলেই চলবে।

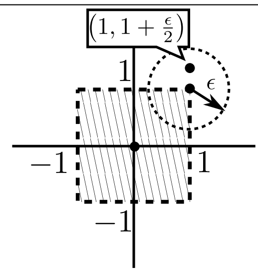


Fig 41

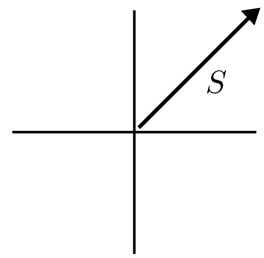


Fig 42

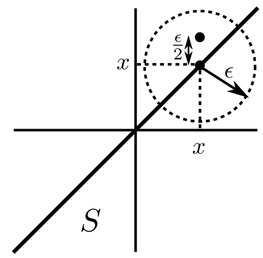


Fig 43

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = 1 > 0$.

If $(x, y) \in N((0,0), \epsilon)$, then $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$, and so $x^2 + y^2 < 1$.
Hence $x^2 < 1$ and $y^2 < 1$. Thus, $|x| < 1$ and $|y| < 1$.
So $(x, y) \in S$. Hence $N((0,0), \epsilon) \subseteq S$.

এবার দেখাব $(1, 1)$ একটা interior point নয়।

Shall show $(1, 1)$ is not an interior point of S, ie,

$\forall\epsilon > 0 \quad N((1,1), \epsilon) \quad \not\subseteq S$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমাদের কাজ হল এমন কোনো point বার করা যেটা $N((1,1), \epsilon)$-এর মধ্যে আছে, কিন্তু S-এর মধ্যে নেই। Fig 41 দেখলেই বুদ্ধি খুলে যাবে।

Then $(1, 1+\frac{\epsilon}{2}) \in N((1,1), \epsilon)$, but $(1, 1+\frac{\epsilon}{2}) \notin S$.
So $N((1,1), \epsilon) \not\subseteq S$, as required.

■

Example 15: Let $S = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\}$. Does the set contain any interior point? Justify your answer.[1] **(2018.1ap1)**

SOLUTION: আমরা set-টাকে দেখিয়েছি Fig 42-এ। আগাগোড়াই চিম্‌সে আছে। এর আবার interior point হবে কী করে?

No, S has no interior point, ie, shall show

$\forall \mathbf{a} \in S \ \forall\epsilon > 0 \ N(\mathbf{a}, \epsilon) \not\subseteq S$.

এইটা যথারীতি negation নিয়ে পেয়েছি।

∀a Take any $\mathbf{a} = (x, x) \in S$.

∀ϵ Take any $\epsilon > 0$.

এবারের ধাপটা Fig 43 দেখলেই বুঝবে।

Then $(x, x + \frac{\epsilon}{2}) \in N(\mathbf{a}, \epsilon)$ but $(x, x + \frac{\epsilon}{2}) \notin S$.
Hence $N(\mathbf{a}, \epsilon) \not\subseteq S$, as required.

■

কোনো set-এর যাবতীয় interior point-র set-কে বলে তার interior--

> DEFINITION: **Interior**
> The set of all interior points of a set is called its **interior**.

Example 16: What is the interior of $[0,1] \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^2$?

SOLUTION: সরাসরি সংজ্ঞা লাগালেই দেখবে উত্তর হল $(0,1) \times (0,1)$. ■

Exercise 13: ঠিক না ভুল বলো--The interior of $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ is $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$.
■

3.2 Boundary point

আগেই বলেছি যে, interior হল যেন কোনো set-এর শাঁসটা (খোসা আর চিম্‌সে লেজুড় বাদ দিয়ে)। যদি খোসা আর লেজুড়টা চাও, তবে তোমাকে কাজ করতে হবে boundary point নিয়ে। এরা হচ্ছে সেই সব point, যেখান থেকে একটু নড়লেই set-এর বাইরে গিয়ে পড়া যায়, আবার set-এর ভিতরেও ঢুকে পড়া যায়, মানে b যদি একটা boundary point হয়, তবে যাই $\epsilon > 0$ নাও না কেন, $N(b, \epsilon)$-এর খানিকটা থাকবে set-এর মধ্যে, খানিকটা বাইরে গিয়ে পড়বে। অংকের ভাষায়--

Fig 44

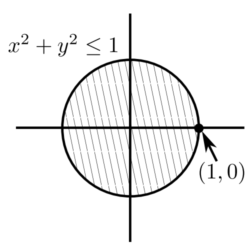


Fig 45



DEFINITION: Boundary point

Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Call $\mathbf{b}$ a boundary point of S if

$$\forall \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{b}, \epsilon) \cap S \neq \phi \text{ and } N(\mathbf{b}, \epsilon) \cap S^c \neq \phi.$$

যেমন ধরো $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ হলে $(1, 0)$ হবে S-এর একটা boundary point. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 44-এ।
এই সংজ্ঞাটা ভালো করে পড়ে নাও, তারপর নীচের প্রশ্নটার উত্তর দাও।

Exercise 14: যদি S-এর একটা boundary point হয় b, তবে কি $b \in S$ হতে বাধ্য? ■

একটা set-এর যাবতীয় boundary point-দের নিয়ে তৈরী হয় set-টার "খোসা", যার পোশাকী নাম হল **boundary**. যেমন $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে $[0, 1) \times (0, 1]$-এর boundary হল $\{(x, 0) \ : \ 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \ : \ 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) \ : \ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1, y) \ : \ 0 \leq y \leq 1\}$. ছবি এঁকে ব্যাপারটা বুঝে নাও।

3.3 Isolated point

এবার আমরা আরেক ধরণের point-এর কথা শিখব। অনেক সময়ে দেখা যায় যে, কোনো set-এর একটা point হয়তো বিচ্ছিন্নভাবে রয়েছে (Fig 45)। এরকম point-কে বলে set-টার একটা isolated point. সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: Isolated point

Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Then $\mathbf{a} \in S$ is called an **isolated point** of S if

$$\exists \epsilon > 0 \quad N(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S = \{\mathbf{a}\}.$$

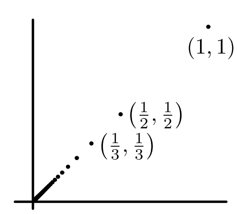
সহজ বাংলায় এর মানে হল, ওই point-টাকে ঘিরে এমন খানিকটা জায়গা পাবে, যার মধ্যে ও নিজে ছাড়া set-টার আর কোনো point নেই। সেই চৌহদ্দিটুকুর মধ্যে ও একেবারে নিঃসঙ্গ নৃপতি।

Example 17: ধরো $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 - 1 = 0\}$. এর কি কোনো isolated point আছে?

SOLUTION: এখানে শর্তটা হল

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 - 1 = 0,$$

Fig 46



মানে

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=\pm 1.$$

সুতরাং

$$\sqrt{x^2+y^2}=2 \text{ বা } 0.$$

যদি $x^2+y^2=2$ হয়, তবে পাব একটা circle, আর যদি $x^2+y^2=0$ হয়, তবে পাব খালি একটা বিন্দু, $(0,0)$. বুঝতেই পারছ $(0,0)$ হল একটা isolated point. ■

Exercise 15: ঠিক না ভুল বল--"যদি $S \subseteq \mathbb{R}^n$ হয়, তবে S-এর যেকোনো isolated point-ই S-এর একটা boundary point হতে বাধ্য।" ■

3.4 Limit point

কোনো set-এর point-গুলো অনেক সময়ে এক জায়গায় গাদাগাদি ভীড় করে থাকে। সেই সব ভীড়ের কেন্দ্রগুলোকে বলে সেই set-এর একেকটা **limit point**. ভীড়ের কেন্দ্রটা নিজে set-এর মধ্যে থাকতেও পারে, নাও পারে। এদের কল্পনা করার সময়ে তিন রকমের ছবি মাথায় রাখা ভালো--এক, কাউন্টারের সামনে লম্বা লাইনের মত, দুই, সমুদ্রের মধ্যে জলকণার মত, আর তিন, সমুদ্রের কিনারার মত। উদাহরণ দিয়ে বলি।

Example 18: Fig 46-এ $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}$ দেখিয়েছি। এই point-গুলো যদি কোনো কাউন্টারের সামনে লাইনে দাঁড়ানো লোক হয়, তবে কাউন্টারটা কোথায় বলে মনে হচ্ছে?
SOLUTION:ভীড়টা হয়েছে একেবারে $(0,0)$-র গায় গিয়ে। কাউন্টারটা নিশ্চয়ই সেখানেই হবে। এখানে ওই $(0,0)$-ই হল এই set-টার একমাত্র limit point. লক্ষ করো এই উদাহরণে limit point-টা কিন্তু মোটেই set-টার মধ্যে নেই। ■

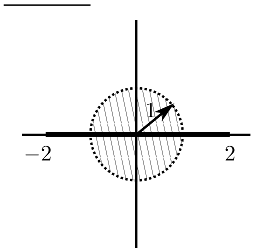
Example 19: এটাও আগের উদাহরণটারই একটা সামান্য পরিবর্তিত রূপ। এখানে আমরা কাউন্টারে বসা লোকটাকেও হিসেবে ধরব। তাই set-টা হবে $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(0,0)\}$. ওই ভীড়ের মধ্যে একটা বাড়তি point যোগ দিলে ছবিতে আলাদা করা মুশকিল, তাই ছবিটা এখনও ওই Fig 46-এর মতই দেখাবে। এর limit point কী কী?
SOLUTION: এখানেও limit point ওই একটাই, $(0,0)$. কিন্তু এখানে সেটা set-এর মধ্যেই আছে। ■

অনেক জায়গায় আলাদা করে লেডিস লাইন হয়, দেখেছো তো? নীচের অংকটায় ছবিটা সেরকম হবে।

Exercise 16: এই set-টার কী কী limit point ছবি দিয়ে ভেবে বলো--

$$\left\{\left((-1)^n,\frac{1}{n}\right) \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(0,0)\}.$$

Fig 47



■

এতক্ষণ যে কটা উদাহরণ দেখলাম, সেগুলো সব কাউন্টারের সামনে লাইনের মত। এবার সমুদ্রের জলকণা আর কিনারার মত কিছু উদাহরণ দেখা যাক।

Example 20: আবার $\mathbb{R}^2$-এর উদাহরণ নিই, এখানে set-টা হল

$$\{(x,0) \;\;:\;\; x \in (-2,2)\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

ছবি এঁকে বলো এর limit point কী কী?
SOLUTION: ছবিটা দেখিয়েছি Fig 47-এ। এখানে point-গুলোকে আলাদা করে গোণার কোনো পথই নেই। তাই লাইনে দাঁড়ানো লোকের উপমাটা এখানে ঠিক খাটছে না। এখানে বিন্দুগুলো যেন সমুদ্রের মধ্যে জলকণার মত, ওদেরকে আলাদা করার জো নেই। এখানেও ভীড় আছে, এবং সেটা সর্বত্রই আছে। তাই set-এর প্রতিটা বিন্দুই এখানে limit point. শুধু তাই নয়, ভীড়টা set-এর কিনারাতেও উপচে পড়েছে। তাই এখানে boundary point-গুলোও সব limit point হবে। সব মিলিয়ে limit point-দের set দাঁড়াচ্ছে--

$$\{(x,0) \;\;:\;\; x \in [-2,2]\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

■

Exercise 17: এই set-টার যাবতীয় limit point-এর set বার করো ছবি এঁকে--

$$\{(x,y) \;\;:\;\; x < 2y\}.$$

■

এতক্ষণ আমরা ছবি দিয়েই সব বার করছিলাম। কিন্তু সে বিলাসিতাটা তো $\mathbb{R}^4$ বা $\mathbb{R}^5$ ইত্যাদিদের ক্ষেত্রে সম্ভব নয়। বস্তুতঃ তেমন বিদ্‌ঘুটে set-এর বেলায় $\mathbb{R}^2$-র বেলাতেও ছবি আঁকা কঠিন বা অসম্ভব হতে পারে। এবার আমরা তাই অংকের ভাষায় limit point-এর সংজ্ঞা দেব। যারা real analysis এখনও ভুলে যাও নি, তাদের পক্ষে এই সংজ্ঞাটার মধ্যে নতুনত্ব কিছুই নেই। ব্যাপারটা এই--

> "একটা point ভীড়ের কেন্দ্রে আছে"

মানে

> "সেই point-টা যদি সামান্যও সরার চেষ্টা করে তবে set-এর অন্য কোনো point-এর গায় গিয়ে পড়তে পারে।"

অর্থাৎ

> যদি point-টাকে ঘিরে কোনো ϵ-neighborhood নাও, তবে তার মধ্যে set-এর অন্ততঃ একটা <u>অন্য কোনো</u> point থাকবে।

এখানে "অন্য কোনো" ব্যাপারটা গুরুত্বপূর্ণ, কারণ আমাদের point-রা কেউ সিজোফ্রেনিয়ায় ভোগে না যে, নিজেকেই নিজে ধাক্কা মেরে বলবে--উফ্ কি ভীড়!
এইভাবে "আমার ϵ-neighbourhood-এ আমি ছাড়া আর কে আছে" সেটা জানার বাসনা থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার উদ্ভব।

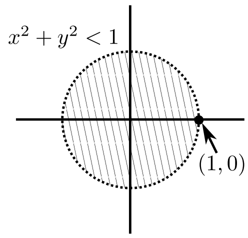


Fig 48



Fig 49

> DEFINITION: **Deleted ϵ-neighbourhood**
>
> Let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ and $\epsilon > 0$. Then the **deleted ϵ-neighbourhood** of $\mathbf{a}$ is defined as
>
> $$N'(\mathbf{a}, \epsilon) = N(\mathbf{a}, \epsilon) \setminus \{\mathbf{a}\}.$$

এখানে ওই \ (যাকে পড়া হয় set minus), ওর মানে হল একটা set থেকে আরেকটা set-কে বাদ দেওয়া। যেমন এখানে $N(\mathbf{a}, \epsilon)$ থেকে $\{\mathbf{a}\}$-কে বাদ দেওয়া হচ্ছে। যদি $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে কাজ করি, তবে $N'(\mathbf{a}, \epsilon)$-কে দেখতে হবে যেন একটা চাকতির ঠিক মধ্যিখানে একটা ফুটো!

Deleted neighbourhood-এর ধারণাটা একবার বুঝে গেলে limit point-এর সংজ্ঞা লিখে ফেলা খুব কঠিন কিছু নয়।

> DEFINITION: **Limit point in $\mathbb{R}^n$**
>
> Let $D \subseteq \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. We say that $\mathbf{a}$ is a **limit point** of D if
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad N'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D \neq \phi.$$

Limit point-এর আরেকটা নাম হল **accumulation point**.

Example 21: Define limit point of a subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. [1] **(2020, 2012, 2007)**

SOLUTION: উপরের সংজ্ঞাটায় $\mathbb{R}^n$-এর বদলে $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ বসালেই হল। ■

এই সংজ্ঞা ব্যবহার করে একটা অংক করা যাক।

Example 22: ধরো $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. প্রমাণ করো যে, $(1, 0)$ হল S-এর একটা limit point.

SOLUTION: Fig 48 দেখেই বুঝতে পারছ যে limit point হবে। সেটাই অংক কষে দেখাব এবার।

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'((1, 0), \epsilon) \cap S \neq \phi.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার দেখাতে হবে $N'((1, 0), \epsilon) \cap S \neq \phi$. এর জন্য এমন কোনো point পেতে হবে, যেটা $(1, 0)$ নয়, $N'((1, 0), \epsilon)$-এর মধ্যে আছে, এবং S-এর মধ্যেও আছে। Fig 49-র দিকে তাকালেই এরকম point-এর হদিশ পাবে।

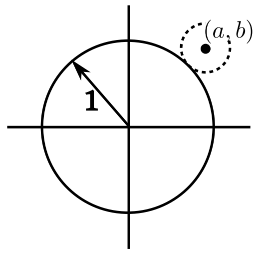


Fig 50

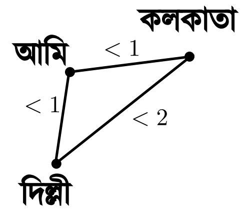


Fig 51

Then $(1 - \frac{\epsilon}{2}, 0) \in N'((1,0), \epsilon) \cap S$.
So $N'((1,0), \epsilon) \cap S \neq \phi$, as required.

■

Exercise 18: Prove that if $\mathbf{a} \in S$ is not a limit point of S, then it must be an isolated point of S. ■

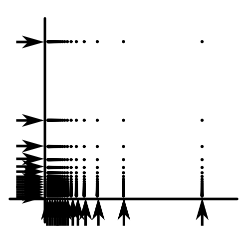
কোনো set-এর যাবতীয় limit point-এর set-কে বলে সেই set-এর **derived set**. একই ভাষা real analysis-এও ব্যবহার হত।

> DEFINITION: **Derived set**
>
> Let $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Then its **derived set** D' is defined as the set of all limit points of D.

Example 23: $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$-এর derived set কী হবে?

SOLUTION: উত্তর যে $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ হবে, সেটা তো ছবি দিয়ে ভাবলেই বোঝা যাচ্ছে (এঁকে দেখতে ভুলো না!)। প্রমাণ করার দুটো অংশ--এক, এটা দেখানো যে $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$-র যেকোনো point-ই হবে limit point. আর দুই, এটা দেখানো যে, এর বাইরে অন্য কোনো point-ই limit point নয়। কী করে limit point দেখাতে হয়, সে তো আগেই আলোচনা করেছি। এখানে তাই খালি দ্বিতীয় অংশটা আলোচনা করি, কোনো point-কে "limit point নয়" দেখানো।

Fig 52



Let $T = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
To show that no point outside T is a limit point of S, ie,

$\forall \mathbf{a} \notin T \quad \exists \epsilon > 0 \quad N'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S = \phi.$

এটা পেয়েছি negation করে।

$\boxed{\forall \mathbf{a}}$ Take any $\mathbf{a} \notin T$.
Then $\|\mathbf{a}\| > 1$.
$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose $\epsilon = \|\mathbf{a}\| - 1 > 0$.
Then $N'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S = \phi$.

এটা কেন হচ্ছে, সেটা ছবি দিয়ে বোঝা সহজ (Fig 50)। প্রমাণ করার জন্য প্রথমে একটা গল্প ভেবে নিলে সুবিধা হবে। ধরো আমি বললাম যে আমি এমন একটা জায়গায় আছি যেটা দিল্লী থেকেও এক মাইলের মধ্যে, আবার কলকাতা থেকেও এক মাইলের মধ্যে। অমনি তুমি নিশ্চয়ই আপত্তি করে বলবে যে, সেটা হতেই পারে না, কারণ সেটা হবার জন্য কলকাতা থেকে দিল্লীর দূরত্ব < 2 মাইল হতে হয় (Fig 51)। বুঝতেই পারছ, এখানে triangle inequality লাগানো হচ্ছে। প্রমাণটা গুছিয়ে লেখার জন্য সেটাই কৌশল।

⟦ Because:

Let, if possible, $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S$.
Then, by triangle inequality,

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{x} + \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| < \epsilon + 1 = \|\mathbf{a}\|.$$

Thus we have $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{a}\| (\Rightarrow\Leftarrow)$.
Hence we must have $N'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S = \phi$, as required.

⟧

■

Example 24: Show that the derived set of

$$T = \left\{ \left(\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right) \ : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

is an infinite set.[2] **(2011.17b)**

SOLUTION: প্রথমে একটু আন্দাজ করে নেওয়া যাক এই set-এর সদস্যরা দেখতে কেমন। এখানে m আর n দুটো জিনিস আছে। দুটোকে একসঙ্গে নাড়াচাড়া করা কঠিন। তাই আমরা প্রথমে ধরো $m = 1$ স্থির রেখে খালি n-টা বদলিয়ে দেখি। এভাবে পাব $(1, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, ইত্যাদি। পুরো set-টাকে দেখিয়েছি Fig 52-এ। এর limit point-গুলো আন্দাজ করার চেষ্টা করা যাক। চোখে দেখেই ভীড়ের জায়গাগুলো আন্দাজ করতে পারছ। আমরা জানি যে, $\frac{1}{n} \to 0$ হয়। সুতরাং $(1, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, ইত্যাদিরা $(1, 0)$-এ ভীড় জমাচ্ছে, মানে $(1, 0)$ নির্ঘাত set-টার একটা limit point. একইভাবে যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$-ও আরেকটা limit point. বোঝার সুবিধার জন্য ওই বিন্দুগুলোকে ছোটো ছোটো তীর চিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি। ওই বিন্দুগুলোই হল limit point-গুলো। ওদের সংখ্যা যে infinite, সেটা অনুভব করা শক্ত নয়।

> For each $m \in \mathbb{N}$, the point $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ is a limit point of T.
>
> ⟦ Because:
>
> Take any $\epsilon > 0$.
> $\because \frac{1}{n} \to 0$ as $n \to \infty$,
> $\therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \in (0, \epsilon)$.
> So distance between $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ and $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ is
>
> $$\sqrt{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} < \epsilon.$$
>
> So
>
> $$\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \in N'\left(\left(\frac{1}{m}, 0\right), \epsilon\right) \cap T.$$
>
> Hence $N'\left(\left(\frac{1}{m}, 0\right), \epsilon\right) \cap T \neq \phi$, as required.
>
> ⟧

এছাড়াও আরও limit point আছে (যেমন $(0, 0)$)। কিন্তু আমাদের তো আর সব limit point বার করতে বলে নি, তাই সেই প্রসঙ্গে আর যাচ্ছি না। যে কটা limit point পেয়েছি, তাতেই infinite দেখানো হয়ে যাবে।

> Since $\left\{\left(\frac{1}{m}, 0\right) \ : \ m \in \mathbb{N}\right\} \subseteq T'$ is an infinite set, so T' is also infinite.

■

Exercise 19: Show that the derived set of

$$S = \left\{\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \ : \ x, y \in \mathbb{N}\right\}$$

is an infinite set.[2] **(2012.1b)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

Exercise 20: উপরের অংকে আরো দেখাও যে যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ হবে একটা limit point. তারপর দেখাও যে $(0, 0)$-ও একটা limit point. ■

Exercise 21: Find the limit points of the set

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, \frac{1}{2^{nm}}\right) \ : \ m, n \text{ are positive integers}\right\}.$$

[3] **(2019.12a)**
HINT: এখানেও প্রথমে m-কে স্থির রেখে খালি n-কে বদলে দ্যাখো কী কী সদস্য পাও। সেখান থেকে দেখবে একটা limit point পাবে $\left(0, \frac{1}{m}, 0\right)$. এবার n-কে স্থির রেখে m-কে বদলালে কী হয় দ্যাখো। ■

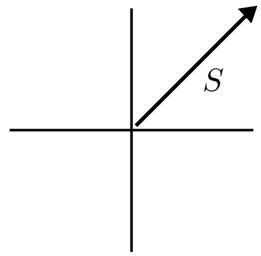


Fig 53

3.4.1 Closed set (আবার!)

আমরা আগে closed set-এর একটা সংজ্ঞা দিয়েছিলাম open set-এর complement হিসেবে। এবার আরেকটা সংজ্ঞা দেব। দুটো সংজ্ঞা দেখতে অনেকটা আলাদা হলেও আসলে একই জিনিস বোঝায়। অর্থাৎ এদের মধ্যে যেকোনো একটা থেকে অন্যটাকে প্রমাণ করা যায়। এই ব্যাপারটা আমরা real analysis শেখার সময়েই দেখেছিলাম।

> DEFINITION: **Closed set (defn 2)**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is called **closed** in $\mathbb{R}^n$ if $A' \subseteq A$.

অর্থাৎ একটা set-কে তখনই closed বলব যখন ওর সব limit point সেই set-টার মধ্যেই থাকে। সাবধান, কোনো limit point থাকবেই, এমন কিন্তু বলছি না। যদি না থাকে, তবে তো ল্যাঠা চুকেই গেল। কিন্তু যদি থাকে, তবে সেটা set-এর বাইরে যেতে পারবে না।
কোনো set-কে "closed নয়" দেখাতে এই সংজ্ঞাটা খুব কাজে দেয়। যেমন নীচের উদাহরণটায়।

Exercise 22: Is the set

$$S = \left\{ \left(\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

closed? Justify.[2] **(2016.1b)**
HINT:
কয়েকটা অংক আগেই আমরা দেখলাম যে, $(1,0)$ হল set-টার একটা limit point. কিন্তু $(1,0)$ তো set-টার মধ্যে নেই! সুতরাং set-টা closed হতেই পারে না! এই যুক্তিটা গুছিয়ে লেখার দায়িত্বটা তোমার উপরেই রইল। ■

Example 25: Let $S = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\}$. Is it closed? Justify your answer.[1] **(2018.1ap2)**

SOLUTION: আমরা set-টাকে দেখিয়েছি Fig 53-এ। যেহেতু $x > 0$ দিয়েছে, তাই লাইনটা ঠিক $(0,0)$-র মুখটায় এসে থমকে গেছে। এ থেকেই আন্দাজ করতে পারছ যে $(0,0)$-টা একটা limit point, যেটা S-এর মধ্যে নেই। অতএব closed আর হয় কী করে?

Fig 54

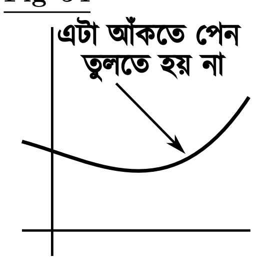
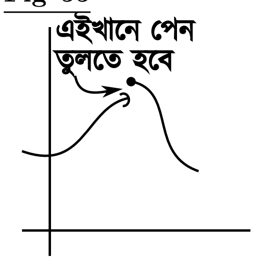


Fig 55



> No, it is not closed, because $(0,0) \notin S$ is a limit point of S.

অতি সংক্ষেপে লিখে দেওয়া যাক কেন $(0,0)$ এখানে S-এর একটা limit point হবে--

> ⟦ Because:
>
> $\forall \epsilon \quad \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \in N'((0,0), \epsilon) \cap S.$
>
> ⟧

■

DAY 4
Continuity

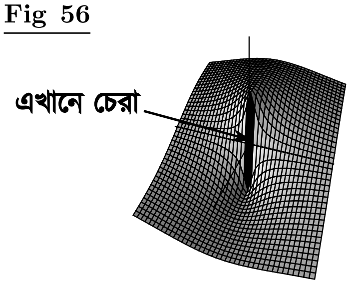
Real analysis শেখার সময়ে আমরা যখন কোনো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে continuous বলতাম, তখন সেটাকে তিনভাবে বোঝার পথ ছিল--

- এক হল ছবি দিয়ে, গ্রাফটা একটানা পেন না তুলে আঁকা যায় (Fig 54)। Discontinuous function-এর গ্রাফ ভাবলেই আমাদের মনশ্চক্ষে একাধিক টুকরোওয়ালা একটা গ্রাফের ছবি ভেসে ওঠে (Fig 55)। এইভাবে চিন্তা করাটা অবশ্য তখনই কাজ করে যখন function-টার domain একটা interval হয়।
- দ্বিতীয় পথ ছিল ϵ-δ-ওয়ালা একটা খটোমটো সংজ্ঞা ব্যবহার করে।
- তৃতীয় পথ ছিল limit দিয়ে--যদি $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $f(x)$ অবশ্যই $x = a$-তে continuous হবে।

এর মধ্যে প্রথম পথটা চিন্তা করার পক্ষে সবচেয়ে সুবিধাজনক, দ্বিতীয়টা সবচেয়ে general. তৃতীয়টা অবশ্য সর্বত্র ব্যবহার করা যায় না, খালি a যদি f-এর domain-এর limit point হয়, এবং নিজে domain-এর মধ্যে থাকে তবেই ব্যবহার করা যায়। কারণ domain-এর মধ্যে না থাকলে $f(a)$ লেখা যাবে না, ওদিকে domain-এর limit point না হলে limit-টার মানে হবে না।
যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ হয়, তাহলেও দ্বিতীয় আর তৃতীয় পথ দুটো খাটে। প্রথম পথটা কি খাটে না? আসলে তার জন্য ছবি আঁকতে পারা চাই, এবং ছবি আঁকতে হলে 2D বা 3D-র উপরে উঠলে চলবে না--

- যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ বা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ হয়, তবে গ্রাফটা একটা curve-এর মত কল্পনা করা যায়। সেই curve-টা পেন না তুলে আঁকতে পারলে f-কে continuous বলা যাবে।

Fig 56



- যদি $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ হয়, তবেও ছবি দিয়ে ভাবার একটা চেষ্টা করা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে গ্রাফটাকে শূন্যে ভাসমান একটা রুমালের মত ভাবো। সেই রুমালে যেন কোথাও কোনো ছেঁড়া বা কাটা না থাকে। থাকলেই আর continuous থাকবে না। মনে রেখো যে discontinuous function-এর বেলাতেও কিন্তু রুমালটা এক খণ্ডই থাকতে পারে, একেবারে আলাদা আলাদা কয়েক টুকরো হয়ে যেতে হবে এমন কোনো কথা নেই। এরকম একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 56-এ।

এরকম ছবি অবশ্য কেবলমাত্র $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ বা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ বা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ বা $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$-এর জন্যই কল্পনা করা সম্ভব। তবে মনে রেখো যে কল্পনা করার সময়ে আমরা সভ্যভব্য জিনিস নিয়েই কল্পনা করি। এমন বিদ্ঘুটে function সম্ভব যেগুলোর গ্রাফ ভেবে ওঠাই দুঃসাধ্য, তাতে কাটা-ছেঁড়া আছে কি নেই সে তো পরের কথা! এই সব বিদ্ঘুটে চিড়িয়াদের সামলানোর জন্যই ϵ-δ-র দরকার পড়ে।
এইবার আমরা ϵ-δ-ওয়ালা সংজ্ঞাটা শিখব, যেটা যেকোনো $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$-এর জন্যই দেওয়া যায়--

DEFINITION: Continuous ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Let $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ and $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Then f is called **continuous** at **a** if

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathbf{x}\in N_n(\mathbf{a},\delta) \quad f(\mathbf{x})\in N_m(f(\mathbf{a}),\epsilon).$$

Here $N_n(\cdot,\cdot)$ denotes neighbourhoods in $\mathbb{R}^n$ and $N_m(\cdot,\cdot)$ denotes neighbourhoods in $\mathbb{R}^m$.

অনেক সময়ে আমাদের এমন কোনো function নিয়ে কাজ করতে হয়, যেটা $\mathbb{R}^n$-এর খালি একটা subset-এর উপরে defined. সেক্ষেত্রে continuity-র সংজ্ঞাটা সামান্য বদলায়।

DEFINITION: Continuous ($D(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$)

Let $D\subseteq\mathbb{R}^n$ be any non-empty set, $f:D\to\mathbb{R}^m$ and $\mathbf{a}\in D$. Then f is called **continuous** at **a** if

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathbf{x}\in N_n(\mathbf{a},\delta)\cap D \quad f(\mathbf{x})\in N_m(f(\mathbf{a}),\epsilon).$$

আগের সংজ্ঞার সাথে পার্থক্যটা লক্ষ করো। আগে ছিল $\forall\mathbf{x}\in N_n(\mathbf{a},\delta)$, এখন তার সাথে একটা $\cap D$ এসে জুটেছে।
এই সংজ্ঞাগুলো সরাসরি লাগানো সাধারণতঃ বেশ ঝকমারি, যদি না নীচের উদাহরণটার মত খুব সহজ কিছু হয়।

Example 26: ধরো $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ হল $f(x)=\|\mathbf{x}\|$. দেখাও যে f একটা continuous function.

SOLUTION:

To show

$$\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathbf{x}\in N_n(\mathbf{a},\delta) \quad f(\mathbf{x})\in N_1(f(\mathbf{a}),\epsilon).$$

$\forall \mathbf{a}, \epsilon$ Take any $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ and any $\epsilon>0$.

এবার একটা $\exists$ আছে, তাই একটু মাথা চুলকে ভাবতে হবে। আমাদের দরকার যেন $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\epsilon$ হয়। এদিকে $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})| = |\ \|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{a}\|\ |$. আমরা triangle inequality থেকে জানি যে $|\ \|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{a}\|\ |\le\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$. এইটা কোথা থেকে এল বুঝতে না পারলে এইভাবে ভাবো--

আমরা জানি $||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{a}+\mathbf{a}|| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| + ||\mathbf{a}||$. সেখান থেকে আসছে $||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}|| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||$. এটা যেকোনো $\mathbf{x}$ আর $\mathbf{a}$-র জন্যই খাটে, তাই $\mathbf{x}$ আর $\mathbf{a}$-র স্থানবিনিময় করে দিলেও খাটবে। তখন পাবে $||\mathbf{a}|| - ||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{a}-\mathbf{x}||$. কিন্তু $||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{x}||$. সুতরাং $||\mathbf{a}|| - ||\mathbf{x}||$ এবং তার negative অর্থাৎ $||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||$ দুজনেই $\leq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||$ হচ্ছে। অতএব $|\ ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||\ | \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||$ হতে বাধ্য।

সুতরাং $|\ ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||\ | < \epsilon$ রাখার জন্য $||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \epsilon$ রাখতে পারলেই হবে। অতএব $\delta = \epsilon$ নিলেই চলবে--

$\exists\delta$ Choose $\delta = \epsilon > 0$.

$\forall\mathbf{x}$ Take any $\mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \delta)$.

Then, by triangle inequality, $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |\ ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||\ | \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta = \epsilon$, as required.

■

তোমার হাত পাকানোর জন্য আরও কয়েকটা function দিচ্ছি। সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে continuous দেখাও।

Exercise 23: যদি $f(x,y,z) \equiv 5$ এবং $g(x_1,\ldots,x_n) = x_1$ হয়, তবে দেখাও যে ওরা দুজনেই continuous. ■

Exercise 24: Show that the function $f(x,y) = |x| + |y|$ is continuous at $(0,0)$.[1] **(2017.2bp1)**
■

আরেকটা একইরকম অংক, কিন্তু একটু বেশী শক্ত।

Exercise 25: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ and $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ be both continuous. Suppose

$$h(x,y) = \max\{f(x), g(y)\} \quad (x \in [a,b], \quad y \in [c,d]).$$

Prove that h is continuous in the rectangle

$$R = \{(x,y) \ : \ x \in [a,b], \quad y \in [c,d]\}.$$

[5] **(2005.8)**
HINT: প্রথমে যথারীতি একটা $\epsilon > 0$ নিয়ে শুরু করো। তা থেকে তুমি f-এর জন্য একটা δ পাবে, সেটাকে δ_1 বলো, আর g-এর জন্য পাবে আরেকটা δ (সেটার নাম দিলাম δ_2)। তবে $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ নিয়ে চেষ্টা করে দ্যাখো। একটা জিনিস মাথায় রাখলে সুবিধা হবে--যদি r, R, t, T এমন কিছু সংখ্যা হয়, যাতে $|r-R|, |t-T| < \epsilon$, তবে $|\max\{r,t\} - \max\{R,T\}| < \epsilon$ হবে। কেন? কারণ, যদি $\max\{r,t\} = r$ আর $\max\{R,T\} = R$ হয়, বা $\max\{r,t\} = t$ আর $\max\{R,T\} = T$ হয়, তবে তো বুঝতেই পারছ। যদি $\max\{r,t\} = r$ আর $\max\{R,T\} = T$ হয়, তবে $t \leq r \leq T$ বা $R \leq T \leq r$ হবে, ফলে $|r-T| \leq |t-T|$ বা $|r-T| \leq |r-R|$ হবে। ■

Example 27: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{if } x \text{ and } y \text{ are rational} \\ y & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Is this function continuous at $(0,0)$? Justify.[2] **(2016.2a)**
SOLUTION: এখানে $f(0,0) = 0$. লক্ষ করো, (x,y) যদি $(0,0)$-র খুব কাছে থাকে, তবে x-ও 0-র খুব কাছে থাকবে, y-ও তাই। যেহেতু আমাদের $f(x,y)$-টা x বা y ছাড়া আর কিছু হয় না, তাই $f(x,y)$-ও 0-র কাছেই থাকতে বাধ্য। তাই $f(x,y)$ যে $(0,0)$-তে continuous হবে, সেটা আন্দাজ করা যাচ্ছে।

Yes, $f(x,y)$ is continuous at $(0,0)$.
Here $f(0,0)=0$. Hence to show

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall(x,y)\in N_2\big((0,0),\delta\big) \quad f(x,y)\in N_1(0,\epsilon).$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon>0$.

এবার প্রশ্ন হল-- $\delta>0$ কী করে নেব? আমাদের দেখাতে হবে $|f(x,y)|<\epsilon$. যেহেতু $f(x,y)$-টা হয় x নয়তো y. তাই $|x|,|y|<\epsilon$ রাখলেই হবে। এদিকে $|x|,|y|\leq\|(x,y)\|$. তাই $\|(x,y)\|<\epsilon$ হওয়াই যথেষ্ট। তাই $\delta=\epsilon$ নিলেই চলবে।

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta=\epsilon>0$.

$\boxed{\forall(x,y)}$ Take any $(x,y)\in N_2\big((0,0),\delta\big)$.

Then $|x|,|y|\leq\|(x,y)\|<\epsilon$.
If x,y are both rational, then $|f(x,y)|=|x|<\epsilon$.
Otherwise, $|f(x,y)|=|y|<\epsilon$.
So in both cases $f(x,y)\in N_1(0,\epsilon)$, as required.

■

একটু জটিল function হলেই অবশ্য এরকম সরাসরি সংজ্ঞার প্রয়োগ খুবই কঠিন হয়ে পড়বে। সেই কারণে আমরা সংজ্ঞাটা ব্যবহার করে আগেভাগেই কয়েকটা theorem বানিয়ে রাখি, যেগুলো ব্যবহার করা সহজতর। এর মধ্যে প্রথম theorem-টার মতন জিনিস আমরা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই দেখে আসছি--

THEOREM

If $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ are functions that are continuous at some $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, then so are $f+g$, $f-g$, and fg. Also, if $g(\mathbf{a})\neq0$, then f/g is continuous at $\mathbf{a}$.

এবারের theorem-টাও অচেনা নয়--

THEOREM

If $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ are such that g is continuous at $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, and f is continuous at $g(\mathbf{a})$, then $f(g(\mathbf{x}))$ is continuous at $\mathbf{a}$.

এই theorem-গুলো সবই সংজ্ঞাটা থেকে প্রমাণ করা যায়। আমরা অবশ্য প্রমাণের মধ্যে এখানে যাচ্ছি না। নিজে চেষ্টা করে দেখতে পারো, মূল ধারণাটা দিচ্ছি খালি। ধরো a,b দুটো সংখ্যা। এদের খুব কাছাকাছি আরো দুটো সংখ্যা দিলাম a',b' যেখানে $a\approx a',b\approx b'$. তবে সহজ বুদ্ধি বলছে $a+b\approx a'+b'$ হবে। একইভাবে $a-b,ab$ এবং $\frac{a}{b}$-ও $a'-b',a'b'$

এবং $\frac{a'}{b'}$-এর কাছাকাছি থাকবে (শেষেরটার জন্য ধরছি b, b' দুজনেই > 0 বা দুজনেই < 0)। এই সহজ বুদ্ধির কথাটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করার জন্য এগুলো কাজে লাগবে--

$$|(a+b)-(a'+b')| \leq |a-a'|+|b-b'|$$

এটা স্রেফ triangle inequality.

$$|(a-b)-(a'-b')| \leq |a-a'|+|b-b'|$$

সাবধান, RHS-টা কিন্তু আগের মতই আছে, কোনো চিহ্ন বদলায়নি!

$$|ab-a'b'| = |ab-a'b+a'b-a'b'| \leq |b|\cdot|a-a'|+|a'|\cdot|b-b'|$$

$$\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right| = \frac{|b-b'|}{|bb'|}.$$

সুতরাং এবার যদি বলি $f(\mathbf{x}) = 2\|\mathbf{x}\|+x_1$-কে continuous দেখাতে, তবে তোমাকে আর কষ্ট করে ϵ-δ নিয়ে দৌড়োদৌড়ি করতে হবে না, কারণ তুমি জানো যে $f_1(\mathbf{x}) \equiv 2$, $f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ এবং $f_3(\mathbf{x}) = x_1$ এরা সকলেই continuous, আর আমাদের f-টা আসলে $f_1 f_2 + f_3$.
এবার আমরা আরো দুটো নতুন কায়দা শিখব, যেগুলো real analysis-এ আমরা দেখি নি।

4.1 Component ব্যবহার করে

ধরো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ দেওয়া আছে। আগেই বলেছি এর মধ্যে আসলে m-খানা function লুকিয়ে আছে, যারা প্রত্যেকেই $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. এদের বলে f-এর একেকটা component function. যেমন $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$ হলে এর component function তিনটে হবে $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x-y$ এবং $f_3(x,y) = xy$. মজার কথা হল যদি কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-কে continuous হতে হয়, তবে তার প্রত্যেকটা component function-কেও continuous হতে হবে। এবং এর উল্টো দিকটাও সত্যি। সব মিলিয়ে পাচ্ছি নীচের theorem-টা।

THEOREM

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ have component functions $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Then f is continuous at some $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ if and only if all the f_i's are continuous at $\mathbf{a}$.

এমনটা কেন হবে, সেই প্রসঙ্গে এক্ষুণি যাচ্ছি, কিন্তু তার আগে বুঝে নাও এটা দিয়ে সুবিধা কোথায় হবে। ধরো জানতে চাই $f(x,y,z) = (\sin(x+y), e^{x^2y-2})$ একটা continuous function কিনা। সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করতে গেলে তো মাথাখারাপ হবার জোগাড় হবে। কিন্তু ধাপে ধাপে ভেঙে করলে কত সহজে হবে দ্যাখো--

- প্রথম ধাপ--

  আমরা জানি $f_1(x,y,z) = x$ এবং $f_2(x,y,z) = y$ হল continuous function. আবার constant function-রাও continuous হয়। যেহেতু continuous-দের যোগ, বিয়োগ, গুণ করলে ফের continuous function-ই পাওয়া যায়, তাই $x+y$ এবং x^2y-2-ও continuous হবে।

- দ্বিতীয় ধাপ--

  আমরা জানি $\sin x$ আর e^x হল continuous function, এবং continuous function-দের composition-ও continuous হয়। তাই $\sin(x+y)$ এবং e^{x^2y-2}-ও continuous হবে।

- এবার তৃতীয় ধাপ--

এক্ষুণি যে theorem-টা দেখলাম, সেটা বলছে যে component function-রা continuous হলেই মূল function-টাও continuous হতে বাধ্য। অতএব $f(x,y,z) = (\sin(x+y), e^{x^2y-2})$ নিশ্চয়ই continuous হবে।

দেখতে যদিও অনেকগুলো ধাপ, কিন্তু সবগুলো ধাপই মনে মনে করে ফেলা যায়।
এবার তবে উপরের theorem-এর প্রমাণটা দেখা যাক। যদি বেশী শক্ত লাগে, তবে প্রমাণটা বাদ দিতে পারো, তাতে এ বইতে অন্য কোথাও অসুবিধা হবে না।

Proof:

Here $f_1,\ldots,f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is defined as

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})).$$

Shall show

$$(f \text{ continuous at } \mathbf{a}) \iff (\forall i \quad f_i \text{ continuous at } \mathbf{a}).$$

প্রমাণের মূল ধারণাটা যেটার উপরে দাঁড়িয়ে আছে, সেটা আমরা আগেও একবার বলেছি--যদি $(a_1,\ldots,a_n)$ আর $(b_1,\ldots,b_n)$ পরস্পরের খুব কাছাকাছি হয়, তবে a_i-রাও b_i-দের খুব কাছে থাকবে। বিপরীতপক্ষে, a_i-রা যদি সবাই b_i-দের খুব কাছে থাকে, তবে $(a_1,\ldots,a_n)$-ও $(b_1,\ldots,b_n)$-এর কাছে থাকতে বাধ্য।
আমরা একটা $\iff$ জাতীয় জিনিস প্রমাণ করছি। এরকম প্রমাণ সাধারণতঃ দুইভাগে ভেঙে হয়, $\implies$ এবং $\impliedby$.

$\implies$ part:

Given: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a},\delta) \;\; f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}),\epsilon)$.

To show: $\forall i \quad f_i$ is continuous at $\mathbf{a}$, ie,

$\forall i \quad \forall \xi > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a},\eta) \;\; f_i(\mathbf{x}) \in N_1(f_i(\mathbf{a}),\xi)$.

এখানে নতুন অক্ষর আমদানি করলাম, ξ (জাই) আর η (এটা), কারণ আমাদের পরিচিত ϵ আর δ ব্যবহার হয়ে গেছে।

$\forall i,\xi$ Take any $i \in \{1,\ldots,n\}$ and any $\xi > 0$.

এবার একটা $\exists \eta$ আছে, তাই একটা উপযুক্ত η নির্বাচন করতে হবে--

Putting $\epsilon = \xi$ in the given condition, we can get a $\delta > 0$.

$\exists \eta$ Choose $\eta = \delta > 0$.

$\forall \mathbf{x}$ Take any $\mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a},\eta)$.

Then from the given condition, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|^2 < \xi^2$, or

$$|f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{a})|^2 + \cdots + |f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{a})|^2 < \xi^2.$$

Hence $|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a})|^2 < \xi^2$, or $f_i(\mathbf{x}) \in N_1(f_i(\mathbf{a}),\xi)$, as required.

এবার অন্য দিকটা--

$\Longleftarrow$ part:

Given:

$\forall i \quad \forall \xi > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \eta) \;\; f_i(\mathbf{x}) \in N_1(f_i(\mathbf{a}), \xi).$

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \delta) \;\; f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon).$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists \delta$ আছে, তাই একটা উপযুক্ত $\delta > 0$ পেতে হবে। এর জন্য একটা জিনিস মনে করিয়ে দিই। যদি $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ আর $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ দেওয়া থাকে, তবে আমরা জানি যে $a_i - b_i$-রা সবাই খুব ছোটো হলে $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$-ও ছোটো হবে। যদি $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \epsilon$ চাই, তবে তার জন্য প্রতিটা $|a_i - b_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$ নিলেই চলবে।

Putting $\xi = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} > 0$ in the given condition, we get an η.

$\boxed{\exists \delta}$ Choose this $\eta > 0$.

$\boxed{\forall \mathbf{x}}$ Take any $\mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \eta)$.

Then

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|^2 &= |f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{a})|^2 + \cdots + |f_m(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{a})|^2 \\ &< \underbrace{\frac{\epsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{m}}_{m \text{ times}} = \epsilon^2. \end{aligned}$$

So $f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

4.2 Slice ব্যবহার করে

আমরা যখন component নিয়ে কাজ করছিলাম, তখন একেকটা output-কে আলাদা করে নিয়েছিলাম। এবার আমরা slice নিয়ে কাজ করব, মানে একেকটা input-কে আলাদা করে নেব। এখানে আমরা কাজ করব $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ নিয়ে। একটা উদাহরণ দিই। যদি $f(x, y) = x^2 y$ হয়, তবে $(2, 3)$ বিন্দুতে এর দুটো slice হবে $f(x, 3) = 3x$ এবং $f(2, y) = 4y$. কোনো function যদি continuous হয়, তবে তার component-গুলোও যেমন continuous হয়, তেমনি তার slice-গুলোও continuous হতে বাধ্য। এই ব্যাপারটা খুব কাজে লাগে কোনো function-কে "continuous নয়" দেখাতে। একটাও slice যদি পাওয়া যায় যেটা discontinuous, ব্যস্ অমনি বলে দেওয়া যাবে মূল function-টা continuous হতে পারে না। এরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 28: Check if the following function is continuous at $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUTION:

Putting $y = 0$ we get the function

$$g(x) = f(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}} = \frac{x}{|x|} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases},$$

or

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}.$$

This is not continuous at 0.

So $f(x,y)$ not continuous at $(0,0)$.

■

কোনো function-এর একটা slice-ও discontinuous হলে function-টাকেও discontinuous হতে হবে। সেটা আমরা ব্যবহার করলাম, কিন্তু প্রমাণ করি নি এখনও। সেই প্রমাণটা আসছে নীচের অংকে। সেই সঙ্গে এর উল্টোদিকটা নিয়েও মাথা ঘামাব--যদি সবগুলো slice-ই continuous হয়, তবে কি function-টাকেও continuous হতে হবে? না, সেরকম কোনো গ্যারান্টি নেই। তার জন্য একটা counterexample-ও দেখব এবার।

Example 29: Let $f : S \to \mathbb{R}$ be a function, where $S \subseteq \mathbb{R}^2$. If f is continuous at a point $(a,b) \in S$, then show that $f(x,b)$ is continuous at $x = a$ and $f(a,y)$ is continuous at $y = b$. Is the converse of the result true? Justify your answer.[5] **(2006.7)**

SOLUTION: প্রথম অংশ দিয়ে শুরু করা যাক।

Given: f is continuous at (a,b), ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in N_2\big((a,b),\delta\big) \cap S \quad f(x,y) \in N_1(f(a,b),\epsilon). \qquad (*)$$

দেখাতে হবে $x = a$-তে $f(x,b)$ এবং $y = b$-তে $f(a,y)$ হবে continuous. দুইক্ষেত্রেই যুক্তিটা একইরকম, তাই খালি $f(x,b)$-র জন্য করে দেখাচ্ছি--

To show: $f(x,b)$ is continuous at $x = a$, ie,

$$\forall \xi > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in N_1(a,\eta) \quad f(x,b) \in N_1(f(a,b),\xi).$$

$\forall \xi$ Take any $\xi > 0$.

Putting $\epsilon = \xi$ in $(*)$, we get a $\delta > 0$.

$\exists \eta$ Choose $\eta = \delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N_1(a,\eta)$.

Then $(x,b) \in N_2\big((a,b),\delta\big)$. So, from $(*)$, $f(x,b) \in N_1(f(a,b),\epsilon) = N_1(f(a,b),\xi)$, as required.

এবার একইভাবে $f(a,y)$-কে continuous দেখানোর দায়িত্বটা তোমাকেই দিচ্ছি।

এই গেল অংকের প্রথম অংশ। এবার পরের অংশটা দেখি। আগেই বলেছি যে, slice-রা continuous হলেও একটা function কিন্তু continuous নাও হতে পারে। তাই উত্তর হবে--

> No, the converse is not true. It is possible to have a function $f(x, y)$ that is discontinuous at (a, b), but $f(x, b)$ and $f(a, y)$ are continuous at $x = a$ and $y = b$, respectively.
>
> Counterexample: We take
>
> $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$
>
> and $a = b = 0$.
>
> Then $f(x, b) \equiv 0$ and $f(a, y) \equiv 0$ are both constant functions, and hence continuous.

এবার দেখাব $(0, 0)$-তে $f(x, y)$-টা discontinuous. এটা limit-এর কায়দায় খুবই সহজে হবে। সেই কায়দাটা আমরা কালকে শিখব। আপাততঃ সরাসরি সংজ্ঞা থেকেই করি।

> Shall show: $f(x, y)$ is discontinuous at $(0, 0)$, ie,
>
> $\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists (x, y) \in N_2\big((0, 0), \delta\big) \quad f(x, y) \notin N_1(f(0, 0), \epsilon).$

যদি তুমি f-এর গ্রাফটা কল্পনা করো, তবেই বুঝবে কী করতে হবে। গ্রাফটা সর্বত্রই প্রায় xy-plane-টাই, খালি axis-দুটোর উপরে একটা যোগ-চিহ্নের মত জায়গায় 1 হয়ে শূন্যে ভেসে আছে। যেহেতু এর উচ্চতা হল 1, তাই যেকোনো $\epsilon = 1$ বা তার চেয়ে ছোটো কিছু নিলেই চলবে।

> $\boxed{\exists \epsilon}$ Choose $\epsilon = 1 > 0$.
>
> $\boxed{\forall \delta}$ Take any $\delta > 0$.

এবার আমরা এমন কোনো বিন্দু (x, y) নেব যেটা $(0, 0)$-এর থেকে δ দূরত্বের মধ্যে, কিন্তু কোনো axis-এর উপরে নয়। এরকম বিস্তর বিন্দু আছে, যেমন--

> $\boxed{\exists (x, y)}$ Choose $(x, y) = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in N_2\big((0, 0), \delta\big)$.
>
> Then $f(x, y) = 1 \notin N_1\left(0, \frac{1}{2}\right) = N_1(f(0, 0), \epsilon)$, as required.

■

Exercise 26: Correct or justify the following: Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function such that the functions $f(x) = F(x, b)$ and $g(y) = F(a, y)$ are continuous at $x = a$ and $y = b$, respectively. Then F is continuous at (a, b). [3] **(2015.1b)**

HINT: অবশ্যই ঠিক নয়। একটা counter-example ভাবতে পারছ? এটাকে "correct" করার একটা পথ হতে পরে খালি শেষের বাক্যটাকে পরিবর্তন করে "Then F need not be continuous at (a, b)." করে দেওয়া। সাবধান, "Then F is discontinuous at (a, b)." লিখে বোসো না যেন, কারণ continuous হবার যেমন গ্যারান্টি দেওয়া যাচ্ছে না, তেমনি

discontinuous হবারও কোনো গ্যারান্টি নেই। ■

Exercise 27: Correct or justify: If $f : S \to \mathbb{R}$ ($S \subseteq \mathbb{R}^2$) is a function and $(a, b) \in S$ is such that the functions $f(x, b)$ and $f(a, y)$ are continuous at $x = a$ and $y = b$, respectively, then f is continuous at (a, b).[5] **(2018.2)**
HINT: আগের অংকটারই রূপভেদ। ■

4.3 Sign-preserving property

আমরা real analysis-এর continuous function-দের নিয়ে আলোচনা করার সময়ে **sign-preserving property** বলে একটা ধর্ম শিখেছিলাম। ব্যাপারটা ছিল এইরকম--

> ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয়, এবং সেটা কোনো $a \in \mathbb{R}$-এ continuous. যদি $f(a) > 0$ হয়, তবে a-কে ঘিরে খানিকটা জায়গা পর্যন্ত $f(x) > 0$ থাকবে। আবার যদি $f(a) < 0$ হয়, তবে a-কে ঘিরে খানিকটা জায়গা পর্যন্ত $f(x) < 0$ থাকবে। অর্থাৎ $f(a)$-র যাই sign হোক, প্লাস বা মাইনাস, সেটা a-কে ঘিরে খানিক দূর অবধি বজায় থাকবে। সেই কারণেই sign-preserving property নাম হয়েছে। কেন এমনটা হয়, সেটা অনুভব করা শক্ত নয়। যদি ধরো $f(a) > 0$, অথচ দেখি a-কে ঘিরে সর্বত্র $f(x) < 0$ হয়ে আছে, তার মানে তো f-টা হঠাৎ $x = a$-তে এসে বেমক্কা এক লাফে > 0 হয়ে গেছে। কিন্তু f তো a-তে continuous, তবে এমন বেমক্কা লাফ দেয় কী করে?

এই sign-preserving property ব্যাপারটা $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-এর বেলাতেও আছে। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 30: Let $f(x, y)$ be continuous at an interior point (a, b) of the domain of definition of f and $f(a, b) \neq 0$. Show that there exists a neighbourhood of the point (a, b) in which $f(x, y)$ retains the same sign as that of $f(a, b)$.[5] **(2008.18)**
SOLUTION: এখানে (a, b)-কে domain-এর interior point নিয়েছে, যাতে (a, b)-কে ঘিরে domain-এর মধ্যে খানিকটা জায়গা পাওয়া যায়।

> W.l.g., $f(a, b) > 0$.
>
> ⟦ <u>Because:</u>
>
> Otherwise, we shall work with $-f$.
>
> ⟧

এই জায়গাটা বুঝলে তো? এখানে w.l.g. মানে হল without loss of generality. প্রশ্নে বলেছিল খালি $f(a, b) \neq 0$, মানে $f(a, b) > 0$ বা $f(a, b) < 0$ যেকোনোটাই হতে পারে। কিন্তু আমরা খালি $f(a, b) > 0$ ধরে করব। এতে কোনো ক্ষতি নেই কারণ, যদি $f(a, b) < 0$ হয়, তবে আমরা আমাদের যুক্তিটা f-এর বদলে $-f$-এর উপরে লাগাতে পারি। সেটাই সংক্ষেপে লিখে দিয়েছি।
এবার তবে কী দেখাতে হবে লিখে নিই--

> ◎ Shall show
>
> $\exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in N_2\big((a, b), \eta\big) \quad f(x, y) > 0.$

প্রথমেই $\exists \eta > 0$ আছে। উপযুক্ত η নির্বাচন করার জন্য অনেকটা মাথা ঘামাতে হবে। প্রথমে একটা ϵ নিয়ে নিই--

> Let $\epsilon = f(a,b) > 0$. Also let S be the domain of f.
> Then by continuity of f at (a,b),
>
> $$\exists\delta > 0 \quad \forall (x,y) \in N_2\big((a,b),\delta\big) \cap S \quad f(x,y) \in N_1(f(a,b),\epsilon).$$
>
> Also, since (a,b) is an interior point of S, hence $\exists\xi > 0 \quad N_2\big((a,b),\xi\big) \subseteq S$.

এইবার অবশেষে η নির্বাচন করতে পারব--

> $\boxed{\exists\eta}$ Choose $\eta = \min\{\delta,\xi\} > 0$.
>
> $\boxed{\forall(x,y)}$ Take any $(x,y) \in N_2\big((a,b),\eta\big)$.
>
> Then since $\eta \le \xi$, hence (x,y) is inside S, and so $f(x,y)$ is well-defined.
> Also, since $\eta \le \delta$, hence $f(x,y) \in N_1\big(f(a,b),\epsilon\big) = N_1\big(f(a,b), f(a,b)\big) = (0, 2f(a,b))$.
> So $f(x,y) > 0$, as required.

■

একই অংকের সামান্য অন্য চেহারা দিচ্ছি নীচে।

Exercise 28: If $f(x,y)$ is continuous at a point (a,b) in its domain of definition and if $f(a,b) > 0$ then show that $f(x,y) > 0$ in some neighbourhood of (a,b) and also show that $f(x,y)$ is bounded in some neighbourhood of (a,b).[5] **(2005.7)**
HINT: প্রথম অংশটা আগের অংকেই করলাম। ওই একই পথে bounded-ও দেখানো যাবে, কারণ আমরা দেখিয়েছিলাম $f(x,y) \in (0, 2f(a,b))$ হচ্ছে, সুতরাং bounded না হয়ে যায় কোথায়? লিখে ফেলার দায়িত্ব তোমার। ■

DAY 5
Limit

আমরা calculus বা real analysis শেখার সময়ে limit-এর কথা শিখেছিলাম। Multivariate calculus-এর বেলাতেও সেই ধারণাটা আছে। প্রথমে function-এর limit নিয়ে আলোচনা করি, তারপর sequence-এর limit-এর প্রসঙ্গে যাব।

5.1 Limit of a function

DEFINITION: Limit of $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, and let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, and $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Then we say that $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ or

$$f(\mathbf{x}) \to \mathbf{L} \text{ as } \mathbf{x} \to \mathbf{a}$$

if

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall\mathbf{x} \in N_n'(\mathbf{a},\delta) \quad f(\mathbf{x}) \in N_m(\mathbf{L},\epsilon).$$

লক্ষ করো $\mathbf{x}$-এর বেলায় deleted neighbourhood নিয়েছি, কিন্তু $f(\mathbf{x})$-এর বেলায় নিয়েছি এমনি neighbourhood. ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। তার জন্য $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করলে সুবিধা হবে। যখন $(x,y)\to(a,b)$ লিখি, তার মানে যেন (a,b) হল $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে একটা স্থির বিন্দু, আর (x,y) বিন্দুটা সরতে সরতে ওর কাছে এগোচ্ছে। এই এগোনোটা নানাভাবে হতে পারে[2], যেভাবেই এগোই না কেন, যদি $f(x,y)$ সর্বদা একই $\mathbf{L}$-এর দিকে যায়, তবেই বলব যে $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\mathbf{L}$.
যদি f-টা পুরো $\mathbb{R}^n$-এর বদলে খালি কোনো একটা subset-এর উপরে defined হয়, তবে limit-এর সংজ্ঞাটা সামান্য জটিলতর হবে--

DEFINITION: Limit of $f:D(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$

Let $f:D\to\mathbb{R}^m$, where $D\subseteq\mathbb{R}^n$ and let $\mathbf{a}$ be a limit point of D, and let $\mathbf{L}\in\mathbb{R}^m$. Then we say that $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\mathbf{L}$ or

$$f(\mathbf{x})\to\mathbf{L} \text{ as } \mathbf{x}\to\mathbf{a}$$

if

$$\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall\mathbf{x}\in N'(\mathbf{a},\delta)\cap D\quad f(\mathbf{x})\in N(\mathbf{L},\epsilon).$$

এখানে ওই limit point শর্তটা লক্ষ করো। যদি $\mathbf{x}\to\mathbf{a}$-র জন্য $f(\mathbf{x})$ বার করতে হয়, তবে $\mathbf{x}$-কে f-এর domain-এর মধ্যে থেকেই $\mathbf{a}$-র কাছে এগোতে হবে। সেই জন্যই $\mathbf{a}$-র পক্ষে D-এর limit point হওয়াটা দরকার। যদি $f:(0,1)\cup\{2\}\to\mathbb{R}$ নিই, যেখানে $f(x)=x$, তবে $\lim_{x\to3} f(x)$ বা $\lim_{x\to2} f(x)$ হবে undefined. কারণ 2 বা 3 মোটেই $(0,1)\cup\{2\}$-এর limit point নয়। কিন্তু $\lim_{x\to1} f(x)$ এবং $\lim_{x\to\frac12} f(x)$ অবশ্যই defined, কারণ 1 এবং $\frac12$ হল $(0,1)\cup\{2\}$-এর limit point.
ক্যালকুলাস শেখার সময়ে আমরা **sandwich law** বলে limit-এর একটা সূত্র শিখে থাকি। এখানেও সেটা খাটে, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 31: Let

$$f(x,y)=\begin{cases}(ax+by)\sin\frac{x}{y} & \text{if } y\neq0\\ 0 & \text{if } y=0\end{cases}.$$

Find $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.[3] **(2018.1b)**
SOLUTION: এখানে ওই $\sin\frac{x}{y}$ অংশটা দেখতে বিচ্ছিরি। যদি ওটা না থাকত, তবে পেতাম এই function-টা--

$$g(x,y)=\begin{cases}(ax+by) & \text{if } y\neq0\\ 0 & \text{if } y=0\end{cases}.$$

এক্ষেত্রে limit-টা যে 0 হত, তাতে নিশ্চয়ই কোনো সন্দেহ নেই, কারণ x,y দুজনেই যদি 0-র খুব কাছে থাকে, তবে $ax+by$-ও 0-র খুব কাছে থাকতে বাধ্য! এবার এর সঙ্গে $\sin\frac{x}{y}$ গুণ করে $f(x,y)$ পাওয়া যাচ্ছে। আমরা জানি যে $\sin(\cdot)$ সর্বদাই -1 থেকে 1-এর মধ্যে থাকে, সুতরাং কোনো জিনিস যদি 0-র কাছে থাকে, তবে তাকে sin(কিছু) দিয়ে গুণ করলে, 0-র থেকে আরো দূরে চলে যেতে পারে না। এখানেই আমরা sandwich law লাগালাম। যেহেতু $0\leq|f(x,y)|\leq|g(x,y)|$, এবং $|g(x,y)|\to0$ হচ্ছে, অতএব চাপে পড়ে $f(x,y)$-কেও 0-র দিকে যেতে হচ্ছে। এই যুক্তিটাই এবার অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখে দেব--

[2] যেমন x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরালভাবে, y-axis-এর সঙ্গে সমান্তরালভাবে, তেরছাভাবে, বা ঘূর্ণির মত পাক খেতে খেতে, ইত্যাদি।

Shall show that $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Let

$$g(x,y) = \begin{cases} (ax+by) & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0 \end{cases}.$$

Then clearly $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} ax+by = 0$.

Also, since $\left|\sin\frac{x}{y}\right| \leq 1$, hence $0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$.

Hence, by the sandwich law, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, as required.

■

এবারে একটা অন্য স্বাদের অংক করি।

Example 32: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. The double limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}}$

(A) does not exist (B) exists and equals 0 (C) exists and equals 1 (D) exists and equals −1.

[1+1] **(2020.1h)**

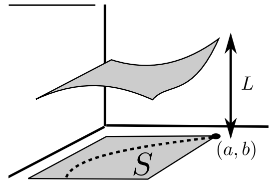
SOLUTION: আমরা এতক্ষণ $\mathbb{R}^n$-এর জন্য যে limit-এর আলোচনা করছিলাম, $\mathbb{R}^2$-এর বেলায় তাকে অনেক সময়ে **double limit** বলে, যেমন এখানে বলেছে। এখানে বলে দেয় নি limit-টা আদৌ exist করে কিনা। এরকম ক্ষেত্রে একটু এদিক ওদিক টুঁ মেরে দেখলে অনেক সময়ে সুবিধা হয়। তার একটা কায়দা হল বিভিন্ন curve বরাবর limit-টা বার করার চেষ্টা করা। যেমন এখানে আমরা y-axis বরাবর $(0,0)$-র দিকে এগোতে পারি--

If we approach $(0,0)$ along the y-axis, then $x = 0$ and $y \to 0$. Then the limit is

$$\lim_{y\to 0} \frac{|0|}{y^2} e^{-\frac{|0|}{y^2}} = 1.$$

এরপরই ইচ্ছা হয় x-axis বরাবর limit-টা নেবার। কিন্তু সে গুড়ে বালি, কারণ denominator-এ y রয়েছে, তাই y-axis-টা পুরোই domain-এর বাইরে। আর কী curve নেওয়া যায়? বার বার করে $\frac{|x|}{y^2}$ আসছে। যদি $x = y^2$ নিই, তবে সেটা দিব্যি কেটে গিয়ে 1 হয়ে যাবে। সুতরাং $x = y^2$-এর গ্রাফ বরাবর limit বার করার চেষ্টা করা যাক--

Fig 57



If we approach $(0,0)$ along the line $x = y^2$, then the limit is

$$\lim_{y \to 0} \frac{|y^2|}{y^2} e^{-\frac{|y^2|}{y^2}} = e^{-1}.$$

দুই পথে এগিয়ে দুরকম limit এসে গেল, অতএব double limit-টা exist করতে পারে না।

Since the two limits are different, the double limit cannot exist.

■

এবারের অংকটা দেখতে বেজায় বিচ্ছিরি, কিন্তু ছবি দিয়ে বুঝতে অনেকটাই সহজ।

Exercise 29: Let $f : S \to \mathbb{R}$ where $S \subseteq \mathbb{R}^2$ and (a, b) be an accumulation point of S. If $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, then prove that $f(x, \phi(x)) \to L$ as $x \to a$, where ϕ is a real-valued function of one variable such that $(x, \phi(x)) \in S$ for each $x \in dom\ \phi$ and $\phi(x) \to b$ as $x \to a$. Here "*dom* ϕ" denotes the domain of ϕ.[3] **(2017.1b)**

HINT:

Accumulation point মানে যে limit point, সে তো আগেই বলেছি। এবার Fig 57-এর function-টার দিকে তাকাও। এখানে তুমি যতই (a, b)-র দিকে এগোবে, ততই $f(x, y)$ এগোবে L-এর দিকে। মনে করো তুমি সত্যিই xy-plane-এর উপরে হেঁটে হেঁটে (a, b)-র দিকে যাচ্ছো। ধরো তোমার চলার পথটা ছবিতে ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে দেখানো curve-টা। আরো ধরো যে, সেটা কোনো একটা $\phi(x)$-এর গ্রাফ। পথের যেকোনো বিন্দুই $(x, \phi(x))$ চেহারার। এই পথটা তোমাকে (a, b)-র দিকে নিয়ে যাচ্ছে, মানে $x \to a$ হলে $\phi(x) \to b$ হচ্ছে। তবে তুমি যেখানে আছো, সেখানে তোমার মাথার উপরে f-এর উচ্চতা হল $f(x, \phi(x))$, এবং দেখতেই পাচ্ছ যে সেটা যাচ্ছে L-এর দিকে। এইটাই অংক কষে প্রমাণ করতে বলেছে।

শুরুটা যথারীতি, কী দেখাতে হবে সেটাকে অংকের ভাষায় লিখে নেওয়া--

Let $T = dom\ \phi$.

To show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'_1(a, \delta) \cap T \quad f(x, \phi(x)) \in N_1(L, \epsilon).$

এবার একটা যা খুশি $\epsilon > 0$ নিতে হবে। তারপর উপযুক্ত $\delta > 0$ পাওয়ার জন্য আমরা চিন্তা করব শেষ থেকে। যেহেতু $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, সেই কারণে এমন একটা $\eta > 0$ পাবে, যাতে $(x, y) \in N'_2((a, b), \eta)$ হলেই $f(x, y) \in N_1(L, \epsilon)$ হয়। আবার যেহেতু $\lim_{x\to a} \phi(x) = b$, সুতরাং সেখান থেকে এমন $\delta > 0$ পাবে, যাতে $x \in N'_1(a, \delta) \cap T$ হলেই $(x, \phi(x)) \in N_2((a, b), \eta)$ হবে। তোমাকে দেখাতে হবে যে এই δ-তেই কাজ হবে। কঠিন নয়, কিন্তু লেখার সময়ে মাথা গুলিয়ে যেতে চাইবে। ■

5.2 Limit of a sequence

DEFINITION: **Limit of a sequence**

Let $\{\mathbf{a}_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ be any sequence. Let $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^d$. We say that $\mathbf{a}_n \to \mathbf{L}$, or $\mathbf{a}_n$ **converges** to $\mathbf{L}$, or $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{L}$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad \mathbf{a}_k \in N_d(\mathbf{L}, \epsilon).$$

$\mathbb{R}^d$-র একটা সদস্যের মধ্যে যেমন d-খানা real number থাকে, তেমনি $\mathbb{R}^d$-র একটা sequence-এর পেটে d-খানা real sequence থাকে। যেমন $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে যদি একটা sequence হয় $\{(x_n, y_n)\}_n$, তবে সেটা থেকে দুটো real sequence পাওয়া যায়, $\{x_n\}_n$ আর $\{y_n\}_n$. এরা হল মূল sequence-টার দুটো **component**. এই component sequence-দের আচরণের সঙ্গে মূল sequence-টার আচরণের যে গভীর যোগ থাকবে সেটাই স্বাভাবিক। নীচের theorem-টার বক্তব্যও সেটাই--

THEOREM

A sequence in $\mathbb{R}^d$ converges if and only if all its component sequences converge to the corresponding components of the limit.

যেমন $(x_n, y_n) \to (2, 3)$ হওয়া আর $x_n \to 2$ এবং $y_n \to 3$ হওয়া একই ব্যাপার। এবার theorem-টার প্রমাণ দেখা যাক।

Proof: এই অধ্যায়ের গোড়াতেই আমরা শিখেছিলাম যে, যদি $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ এবং $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_d)$ হয়, তবে $\mathbf{x}$ এবং $\mathbf{y}$ পরস্পরের কাছাকাছি থাকা আর x_i-গুলো y_i-দের কাছাকাছি থাকা সমার্থক। সেই যুক্তিতেই এই প্রমাণটাও হবে।

Let $\{\mathbf{x}_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ and $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ be given by $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,d})$ and $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_d)$.

Shall show that

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{a} \iff (\forall i \in \{1, ..., d\} \quad x_{n,i} \to a_i).$$

এটা একটা $\iff$ -জাতীয় জিনিস, তাই প্রমাণটা দুইভাগে ভেঙে করব।

$\Longrightarrow$ part: Given: $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$.

To show

$\forall i \in \{1, ..., d\} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K \quad x_{n,i} \in N_1(a_i, \epsilon)$.

$\forall i, \epsilon$ Take any $i \in \{1, ..., d\}$ and any $\epsilon > 0$.

Since $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, hence $\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K \quad \mathbf{x}_n \in N_d(\mathbf{a}, \epsilon)$.

$\exists K$ Choose this $K \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ Take any $n \geq K$.

Then $|x_{n,i} - a_i| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \epsilon$.

So $x_{n,i} \in N_1(a_i, \epsilon)$, as required.

এবার অন্য দিকটা--

$\Longleftarrow$ part: Given: $\forall i \in \{1, ..., d\} \quad x_{n,i} \to a_i$.

To show $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K \quad \mathbf{x}_n \in N_d(\mathbf{a}, \epsilon)$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since $\forall i \in \{1, ..., d\} \quad x_{n,i} \to a_i$,

hence $\forall i \in \{1, \ldots, d\} \quad \exists K_i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K_i \quad x_{n,i} \in N_1\left(a_i, \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right)$.

এখানে আবার ওই $\sqrt{d}$-টা কোথা থেকে জুটল রে, বাবা? আসলে যদি কোনো $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ আর $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_d)$ নাও, তবে $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \sum(b_i - c_i)^2$. তাই প্রতিটা $|b_i - c_i| < \frac{\epsilon}{sqrtd}$ হলে $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| < \epsilon$ হবে।

$\exists K$ Choose $K = \max\{K_1, \ldots, K_d\} \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ Take any $n \geq K$.

Then

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\|^2 = (x_{n,1} - a_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - a_d)^2 = \underbrace{\frac{\epsilon^2}{d} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{d}}_{d \text{ times}} = \epsilon^2.$$

Hence $\mathbf{x}_n \in N_d(\mathbf{a}, \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

Real analysis-এ sequence-দের যা যা ধর্ম শিখেছিলে, তার অনেকগুলোই $\mathbb{R}^d$-র sequence-দের বেলাতেও খাটে। তবে monotone sequence-দের ধারণাটা এখানে আর নেই, কারণ $d > 1$ হলে $\mathbb{R}^d$-র সদস্যদের $<$ বা $>$ দিয়ে তুলনা করা যায় না। সেই একই কারণে $\liminf$ বা $\limsup$-এর ধারণাও এখানে অচল (আমি কি একটা স্বস্তির নিঃশ্বাস শুনলাম?)। তবে **bounded** sequence-এর ধারণাটা এখনও আছে--

> **Definition: Bounded**
>
> A sequence $\{\mathbf{x}_n\}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ is called **bounded** if
>
> $$\exists M \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\mathbf{x}_n\| \leq M.$$
>
> Such an M is called a **bound** for the sequence.

Subsequence-এর ধারণাও real analysis-এর মতই।

> **Definition: Subsequence**
>
> Let $\{\mathbf{a}_n\}_n$ be a sequence in $\mathbb{R}^d$. Then by a **subsequence** of this sequence, we mean a sequence $\{\mathbf{a}_{n_k}\}_k$, where
>
> $$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots.$$

Subsequence-দের limit-দের বলা হত **subsequential limit** বা **limit point of the sequence**. এখানেও তাই। কোনো set-এর limit point-এর সঙ্গে sequence-এর একটা সম্পর্ক ছিল। এখানেও তা অক্ষুণ্ণ আছে--

> **THEOREM**
>
> Let $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Then a point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ is a limit point of S if and only if there is a sequence $\{\mathbf{a}_n\}_n \subseteq S$ with **distinct terms** such that $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$.

Exercise 30: Real analysis-এ একই রকম একটা theorem ছিল। সেটার আদলে এটাকে প্রমাণ করার চেষ্টা করো। ■

5.3 Limit আর continuity-র সম্পর্ক

সেই হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই আমরা শুনে আসছি যে continuous মানে "limit আর function-এর value সমান হওয়া"। অর্থাৎ "$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হওয়া" আর "$f(x)$-টা $x = a$-তে continuous হওয়া" একই কথা। এমনটা আমাদের বলা হয়ে থাকে ঠিকই, কিন্তু ব্যাপারটা পুরো সত্য নয়, অর্ধসত্য মাত্র। যদি $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়, তবে অবশ্যই $x = a$-তে $f(x)$-টা continuous হতে বাধ্য। কিন্তু উল্টোদিকটা ঠিক নয়। যেমন ধরো যদি $f : (0,1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ হয়, তবে $f(x)$-এর ফর্মুলা যাই হোক না কেন, $x = 2$-তে $f(x)$ অবশ্যই continuous হবে (সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে পরীক্ষা করেই দ্যাখো!)। কিন্তু যেহেতু 2 এখানে f-এর domain-এর limit point নয়, তাই $\lim_{x\to 2} f(x)$ হয়ে যাবে undefined. সুতরাং $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ হবে না। কিন্তু যদি f-এর domain-এ এমন কোনো point নিই, যেটা একটা limit point-ও বটে, তবে অবশ্যই limit আর function-এর value সমান হতে বাধ্য। সেটাকে একটা theorem হিসেবে গুছিয়ে লিখে রাখি--

> **THEOREM**
>
> Let $f : D(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, and let $\mathbf{a} \in D$ be a limit point of D. Then the following two statements are equivalent:
>
> 1. $f(\mathbf{x})$ is continuous at $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.
> 2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Proof: এর প্রমাণের মধ্যে জটিলতা বলতে গেলে কিছুই নেই। খালি সংজ্ঞা লাগিয়ে গেলেই হবে।

$(1) \implies (2)$: To show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \delta) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, hence $\exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n'(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$.

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall\mathbf{x}$ Take any $\mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D$ (possible because a is a limit point of D).

If $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, then $\mathbf{x} \in N_n'(\mathbf{a}, \epsilon)$, and so $f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$.

If $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, then $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$.

So in both cases $f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$, as required.

এবার অন্য দিকটা--

(2) $\implies$ (1): To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N'_n(\mathbf{a}, \delta) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon).$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since $f(\mathbf{x})$ is continuous at $\mathbf{x} = \mathbf{a}$,

hence

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon).$$

$\exists \delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall \mathbf{x}$ Take any $\mathbf{x} \in N'_n(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D$ (possible because $\mathbf{a}$ is a limit point of D).

Then $\mathbf{x} \in N_n(\mathbf{a}, \epsilon)$, and so $f(\mathbf{x}) \in N_m(f(\mathbf{a}), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

আচ্ছা, যদি $\mathbf{a} \in D$-টা D-এর একটা limit point না হত, তবে? সেক্ষেত্রে আসলে ব্যাপারটা আরও সহজ-- সেটা বোঝার জন্য নীচের অংক দুটো কর। দুটোরই সমাধান অত্যন্ত সংক্ষিপ্ত।

Exercise 31: দেখাও যে $\mathbf{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ যদি D-এর একটা limit point না হয়, তবে $\mathbf{a}$ অবশ্যই D-এর একটা isolated point হতে বাধ্য। ■

Exercise 32: যদি $\mathbf{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ একটা isolated point হয়, তবে যেকোনো $f : D \to \mathbb{R}^n$-এর জন্যই f ওই $\mathbf{a}$-তে continuous হবেই!

■

যদি আমরা domain-এর কোনো limit point-এ continuity পরীক্ষা করে দেখতে চাই, তবে অবশ্য limit-এর কায়দাটা ভালোই, যদিও সাধারণতঃ limit নিয়ে কাজ না করে সরাসরি continuity-র সংজ্ঞা লাগালে একইরকম সহজে কাজ হয়ে থাকে। যেমন ধরো একটু আগেই একটা অংকে আমরা $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ দেখিয়েছিলাম, যেখানে f-টা ছিল এরকম--

$$f(x,y) = \begin{cases} (ax+by)\sin\frac{x}{y} & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0 \end{cases}.$$

সেই limit-এর যুক্তিটাকেই সামান্য সাজিয়ে নীচের অংকটা করতে পারা উচিত।

Exercise 33:

$$f(x,y) = \begin{cases} (px+y)\sin\frac{x}{y} & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0. \end{cases}$$

Is f continuous at $(0,0)$?[5] **(2004.14)**

■

Real analysis শেখার সময়ে **sequential criterion of continuity** বলে একটা জিনিস ছিল। এখানেও সেটা আছে। জিনিসটার দুটো অংশ। ধরো $f : D \to \mathbb{R}^m$ একটা কোনো function, যেখানে $D \subseteq \mathbb{R}^n$, আর $\{\mathbf{x}_n\}_n \subseteq D$ এবং $\mathbf{a} \in D$ যাতে $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ হয়[3]। তাহলে--

[3] আমি কিন্তু এখানে $\mathbf{a}$-কে D-এর limit point ধরিনি।

- এক, যদি $f(\mathbf{x})$-টা $\mathbf{x} = \mathbf{a}$-তে continuous হয়, তবে $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{a})$ হবে।
- দুই, যদি এরকম যেকোনো $\{\mathbf{x}_n\}_n \subseteq D$-এর জন্যই $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{a})$ হয়, তবে f-টা অবশ্যই $\mathbf{a}$-তে continuous হতে বাধ্য।

এর প্রয়োগ মূলতঃ কোনো function-কে discontinuous দেখাতে। যেমন নীচের অংকটায়।

Example 33: আমরা আগে একটা অংকে এই function-টার সম্মুখীন হয়েছিলাম--

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

প্রশ্ন ছিল $(0,0)$-তে এটাকে discontinuous দেখানো। তখন আমরা সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে করেছিলাম। এখানে sequential criterion ব্যবহার করে করো।
SOLUTION:

> We consider the sequence $\{\mathbf{x}_n\}_n$ where $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.
> Then $\mathbf{x}_n \to (0,0)$.
> Now $\forall n \quad f(\mathbf{x}_n) = 0$, so $f(\mathbf{x}_n) \to 0$.
> But $f(0,0) = 1$.
> Thus we have at least one sequence $\{\mathbf{x}_n\}_n$ such that
> $\mathbf{x}_n \to (0,0)$, but $f(\mathbf{x}_n) \not\to f(0,0)$.
> Hence, by the sequential criterion of continuity, f must be discontinuous at $(0,0)$, as required.

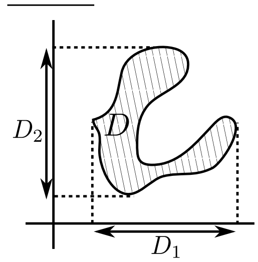
■

এই বারের অংকটার মূল ধারণাটা real analysis-এও ছিল। প্রমাণের কায়দাটাও একই।

Example 34: Prove that every continuous function defined over a closed and bounded domain in $\mathbb{R}^2$ is bounded on its domain.[5] **(2011.18)**
SOLUTION:

> Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$ be closed, bounded and nonempty. Let $f : D \to \mathbb{R}^n$ be any continuous function.

Fig 58



> Shall show that f is bounded.

আমরা এখানে contradiction লাগাব। মানে, যা দেখাতে বলেছে, তার উল্টোটা ধরে নেব--

> Let, if possible, f be unbounded.

এ থেকে একটা contradiction-এর পৌঁছোনোর চেষ্টা করব।
তার জন্য ভেবে দ্যাখো, f-টা unbounded হবার মানে কী। মানে হল--যেখানেই তুমি bound বসানোর চেষ্টা করো না কেন, f ঠিক এক সময়ে সেটাকে টপকে যাবে। ধরো আমরা পরপর এইভাবে bound বসানোর চেষ্টা করছি, প্রথমে 1, তারপর 2, তারপর 3, এইভাবে। তবে এক সময়ে f-টা 1-কে টপকাবে, মানে এমন $\mathbf{z}_1 \in D$ পাবে, যাতে $\|f(\mathbf{z}_1)\| > 1$ হয়। আবার এমন $\mathbf{z}_2$ পাবে, যাতে $\|f(\mathbf{z}_2)\| > 2$ হয়, এইরকম। এইভাবে একটা sequence পেয়ে যাবে--

> Then $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \mathbf{z}_n \in D \quad \|f(\mathbf{z}_n)\| > n$.
> Let $\mathbf{z}_n = (x_n, y_n)$.
> Now, $D_1 = \{x \ : \ \exists y \quad (x,y) \in D\}$, and $D_2 = \{y \ : \ \exists x \quad (x,y) \in D\}$.

মনে করতে পারো যে D_1 হল x-axis-এর উপর D-এর ছায়া, এবং D_2 হল y-axis-এর উপর ছায়া (Fig 58)।

> Then D_1, D_2 are bounded, since D is bounded.

যে জিনিস নিজেই bounded, তার ছায়া আর unbounded হয় কী করে?

> Now, we know that any bounded real sequence has a convergent subsequence.
> So $\{x_n\}_n$ has some convergent subsequence $\{x_{n_k}\}_k$, say. Let $x_{n_k} \to a$.
> Similarly, the sequence $\{y_{n_k}\}_k$ must have a convergent subsequence $\{y_{n_{k_r}}\}_r$. Let $y_{n_{k_r}} \to b$.

লক্ষ করো এখানে আমরা একটা subsequence-এর subsequence নিলাম। সেটা মূল sequence-এরও একটা subsequence বটে।

> Thus $(x_{n_{k_r}}, y_{n_{k_r}}) \to (a,b)$.
> Since D is closed, hence $(a,b) \in D$.
> By continuity, $f(x_{n_{k_r}}, y_{n_{k_r}}) \to f(a,b)$ $(\Rightarrow\Leftarrow \because \|f(\mathbf{z}_n)\| \to \infty)$.

■

Exercise 34: Prove that every continuous real-valued function defined over a closed and bounded domain in $\mathbb{R}^2$ has a maximum and a minimum value.
HINT: লক্ষ করো এখানে real-valued function নিয়ে কাজ করছি। নইলে maximum বা minimum নিয়ে আলোচনা করা যেত না, কারণ $d > 1$ হলে $\mathbb{R}^d$-র মধ্যে কোনো $>$ বা $<$-এর ধারণা নেই। ■

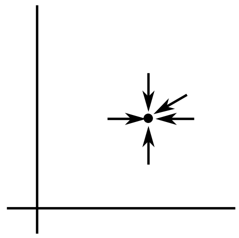


Fig 59

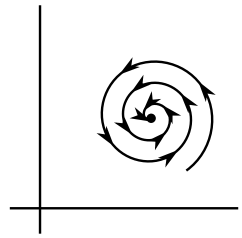


Fig 60

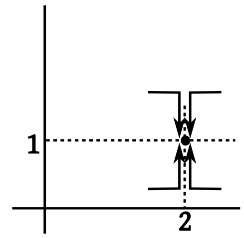


Fig 61

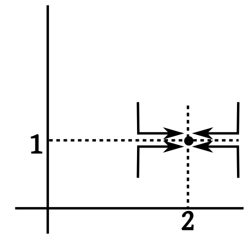


Fig 62

DAY 6
Repeated limit

এবার যে ধারণাটা নিয়ে কাজ করব, সেটা প্রথমে একটা উদাহরণ দিয়ে বুঝলে সুবিধা হবে। ধরো তোমাকে একটা function দিলাম $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, যেখানে $f(x,y)=x+y^2$. যদি তোমাকে $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$ বার করতে বলি, তবে উত্তরটা হবে $2+1^2=3$. এখানে $(x,y)\to(2,1)$ মানে হল এইরকম--

> গ্রাফ কাগজে $(2,1)$ হল একটা বিন্দু। সেটা এক জায়গায় স্থির হয়ে আছে। আমরা সেই একই গ্রাফ কাগজে আরেকটা বিন্দু নিয়েছি (x,y) যেটা নড়াচড়া করতে পারে। এই (x,y) বিন্দুটা এগোচ্ছে $(2,1)$-এর দিকে। এই এগোনোটা বাঁদিকে থেকে হতে পারে, ডানদিক থেকে হতে পারে, উপর বা নীচ থেকেও হতে পারে। কিংবা তেরছা পথেও হতে পারে (Fig 59)। এমন কি জিলিপির প্যাঁচের মত পাক খেয়ে এগোতেও আটক নেই (Fig 60)!

যখন আমরা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করি, তখন এত সমস্যা হয় না। খালি বাঁদিক আর ডানদিক থেকে এগোনো নিয়ে মাথা ঘামালেই চলত। স্বভাবতঃই লোকে প্রশ্ন করে--সেই সুবিধাটা কোনোভাবে $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$-এর বেলাতেও পাওয়া যায় কিনা। সেই প্রশ্ন থেকেই **repeated limit** নামক ধারণাটার উদ্ভব। এখানে আমরা x আর y দুজনকে নিয়ে একই সঙ্গে কাজ না করে দুই ধাপে ভেঙে কাজটা করি। যেমন ধরো, এক্ষুণি আমরা যে $(x,y)\to(2,1)$ নিচ্ছিলাম, সেটাকেই দুই ধাপে ভাঙলে হবে $x\to 2$ এবং $y\to 1$ (যেমন দেখিয়েছি Fig 61-এ), অথবা যদি y-কে নিয়ে আগে কাজ করতে চাও, তবে $y\to 1$ এবং তারপরে $x\to 2$. ছবিতে ভাবলে Fig 62-এর মত। যেহেতু একটার পর একটা limit নেওয়া হচ্ছে, সেই কারণেই নাম হয়েছে **repeated limit** বা **iterated limit**, কারণ "iterate" মানে হল "বারবার করে করা"।
আমাদের উদাহরণে যদি আগে x, পরে y নিয়ে কাজ করি, তবে পাব

$$\lim_{y\to 1}\lim_{x\to 2} f(x,y).$$

এখানে $\lim_{x\to 2} f(x,y)$ মানে y-কে স্থির রেখে খালি $x\to 2$ করা, তাই $\lim_{x\to 2} f(x,y)=2+y^2$ হবে। এবার $y\to 1$ নিলে হবে $2+1^2=3$. সুতরাং এই উদাহরণে অন্ততঃ repeated limit-টা এমনি limit-এর সমান হল। অংকে অবশ্য "এমনি limit" বলে না, বলে **double limit**.

Exercise 35: পরীক্ষা করে দ্যাখো অন্য repeated limit-টাও এখানে double limit-এর সমান হচ্ছে কিনা। ■

এই উদাহরণটা অবশ্য খুবই সহজ ছিল। অনেক সময়েই নানারকম উদ্ভট ব্যাপার হয়--

- হয়তো দেখলে একটা repeated limit বার করা গেল, কিন্তু অন্যটা হয়তো exist-ই করে না।
- হয়তো দুটো repeated limit-ই exist করে, কিন্তু ওরা সমান হল না। এক্ষেত্রে double limit-টা exist করবে না।
- যদি repeated limit দুটো exist করে এবং সমানও হয়, তাও কিন্তু double limit-টা exist নাও করতে পারে!

- যদি double limit-টা exist করেও, তাও কিন্তু খুব বিচ্ছিরি কিছু ক্ষেত্রে repeated limit-রা exist নাও করতে পারে।

এতই যদি সমস্যা, তবে খামোখা repeated limit নিয়ে মাথা ঘামানো কেন, বাপু? কারণটা খুব সহজ ভাষায় সব জটিলতা বাদ দিয়ে বললে এরকম-- ভীষণ বিচ্ছিরি কিছু ক্ষেত্র বাদ দিলে সব সময়েই double limit-টা exist করলে repeated limit-দুটোও exist করে, এবং double limit-টার সমানও হয়। এর দুটো উপকার--

- এক, যদি একটাও repeated limit না exist করে, তবে double limit-টা নিয়ে আর কষ্ট করতে হবে না।
- যদি double limit-টা exist করে বলে জানা থাকে, তবে সেটাকে সরাসরি বার না করে, যেকোনো একটা repeated limit বার করলেই চলে। সাধারণতঃ double limit-টার চেয়ে repeated limit-গুলো বার করা সহজতর হয়, যেহেতু সেখানে আমরা প্রতি ধাপে খালি x বা খালি y নিয়ে কাজ করি।

আমরা real analysis থেকেই জানি যে, limit-এর ধারণাটা আরো অনেক কিছুর মধ্যে লুকিয়ে থাকে, যেমন differentiation বা integration. সেই কারণে repeated limit-এর ধারণাটাও বিভিন্ন গুরুতর theorem-এর পেটের মধ্যে ঢুকে থাকে। সেই জন্যেও repeated limit-এর ধারণাটা জানা জরুরী।
নানারকম সম্ভাবনার কথা বললাম। এবার সেগুলোর বিশদ আলোচনা করব। প্রথমে সবচেয়ে ভদ্র ক্ষেত্রটার প্রমাণ করব, এবং তারপর অভদ্র ক্ষেত্রগুলোর counterexample দেব।

6.1 ভদ্র ক্ষেত্র ও তার প্রমাণ

এখানে আমরা এমন সামান্য কিছু শর্ত দেব, যাতে double limit-টা exist করলেই repeated limit-রাও করবে, এবং তারা double limit-এর সঙ্গে সমানও হবে। নীচের অংকে সেই শর্তটা দিয়ে ব্যাপারটা প্রমাণ করতে বলেছে।

Example 35: Let

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A(\in \mathbb{R}).$$

Prove that

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = A = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

if $\lim_{x\to a} f(x,y)$ exists for each y in a neighbourhood of b, and $\lim_{y\to b} f(x,y)$ exists for each x in a neighbourhood of a.[5] **(2010.17)**

SOLUTION: শর্তটা ভালো করে বুঝে নাও। Double limit-টা exist করে ধরে নিয়েছি। কিন্তু repeated limit দুটোর existence ধরে নিই নি। তবে তাদের প্রথম limit দুটো অন্ততঃ exist করে, সেটুকু ধরে নিয়েছি, অর্থাৎ--

- $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$-এর মধ্যে $\lim_{y\to b} f(x,y)$ অংশটা যেন a-র কাছাকাছি সব x-এর জন্যই exist করে,
- এবং একইভাবে $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$-এর মধ্যে $\lim_{x\to a} f(x,y)$ যেন exist করে b-এর কাছাকাছি সব y-এর জন্য।

শুনতে যতই গালভরা লাগুক, চাহিদা হিসেবে কিন্তু সামান্যই। এর চেয়ে কম শর্তে আর repeated limit-গুলো নিয়ে আলোচনা করব কী করে?
লক্ষ করো double limit-এর existence ছাড়া আমরা দুটো শর্ত ধরে নিচ্ছি। তেমনি দেখাতেও হবে দুটো জিনিস--

- $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = A$,
- $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A$.

প্রথম শর্তটা লাগবে এদের মধ্যে প্রথমটা দেখাতে, দ্বিতীয়টা লাগবে দ্বিতীয়টার জন্য। এদের মধ্যে প্রথমটুকু করাই যথেষ্ট, কারণ সেই একই যুক্তিতে দ্বিতীয়টাও আপনা থেকেই হয়ে যাবে (x, y-এর এবং a, b-এর স্থানবিনিময় করে)। সুতরাং আমরা খালি প্রথম প্রমাণটাই ঘটা করে করব।

Given: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A (\in \mathbb{R})$ and

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in N_1(a,\delta_1) \quad \underbrace{\lim_{y\to b} f(x,y)}_{g(x),\text{say}} \text{ exists.}$$

প্রথম শর্তটাই খালি লিখলাম। কারণ প্রথম অংশের জন্য দ্বিতীয় শর্তটা লাগবে না। এখানে বলে রাখি যে, যেহেতু $\lim_{x\to a}$ নিয়ে আলোচনা করব, তাই "$\forall x \in N_1(a,\delta_1)$"-এর বদলে "$\forall x \in N_1'(a,\delta_1)$" থাকলেই চলত।

Shall show that $\lim_{x\to a} g(x) = A$,

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_1'(a,\delta) \quad g(x) \in N_1(A,\epsilon).$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Now, by triangle inequality,

$$|g(x) - A| \le |g(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - A|$$

এই ধাপটার পিছনে মূল যুক্তিটা হল-- আমরা জানি $g(x)$ আর $f(x,y)$ কাছাকাছি, আবার $f(x,y)$ এবং A-ও কাছাকাছি। এই দুটোকে মিলিয়ে আমরা দেখাতে চাইছি যে, $g(x)$ আর A কাছাকাছি থাকতে বাধ্য। আমাদের উদ্দেশ্য শেষ পর্যন্ত $|g(x) - A| < \epsilon$ দেখানো। তার জন্য $|g(x) - f(x,y)| < \frac{\epsilon}{2}$ এবং $|f(x,y) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ দেখানোই যথেষ্ট।
প্রথমে $f(x,y)$-কে A-র খুব কাছে আনি--

Since $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall (x,y) \in N_2'((a,b),\delta_2) \quad |f(x,y) - A| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists\delta$ Choose $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N'(a,\delta)$.

Since $\lim_{y\to b} f(x,y) = g(x)$, hence we can pick a y such that

$$(x,y) \in N_2\big((a,b),\delta_2\big) \text{ and } |g(x) - f(x,y)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

So

$$\begin{aligned} |g(x) - A| &\le |g(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - A| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

So $g(x) \in N_1(A,\epsilon)$, as required.

এবার দ্বিতীয় অংশটা। কিন্তু তার জন্য তো আর নতুন করে কিছু করতে হবে না। এক লাইনেই সেরে দিই--

Interchanging the roles of x, y (and a, b), we get the other equality.

■

এই গেল ভদ্র ক্ষেত্রটা। এবার অভদ্র ক্ষেত্রদের দেখি।

6.2 অভদ্র ক্ষেত্রদের বেলায় বিভিন্ন counterexample

অভদ্র ক্ষেত্র অর্থাৎ যেখানে নুন আনতে পান্তা ফুরোবে, "এটা exist করে তো ওটা exist করে না"-জাতীয় সমস্যা লেগেই থাকে যেখানে। এরকম বিভিন্ন উদাহরণ দেখব এবার।

6.2.1 Double limit আছে, repeated limit নেই

ভদ্র ক্ষেত্রটায় আমরা repeated limit-এর জন্য কিছু শর্ত ধরেছিলাম। যদি সেটা না থাকত, তবে কী সমস্যা হতে পারে, সেটা নিয়ে এবারের অংকটা।

Example 36: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & \text{if } xy \neq 0 \\ 0 & \text{if } xy = 0 \end{cases}$$

Show that $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Find repeated limits if they exist.[3+2] **(2012.2)**

SOLUTION:

First part: To show

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall(x,y) \in N_2'\big((0,0),\delta\big) \quad f(x,y) \in N_1(0,\epsilon).$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার উপযুক্ত δ পেতে হবে। আমাদের শেষ পর্যন্ত দরকার $|x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}| < \epsilon$. এর মধ্যে ওই $\sin\frac{1}{y}$ আর $\sin\frac{1}{x}$ দুটোই দেখতে বিচ্ছিরি। কিন্তু ওদের absolute value হল ≤ 1. তাই--

Now, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \left|x\sin\tfrac{1}{y} + y\sin\tfrac{1}{x}\right| \\ &\leq \left|x\sin\tfrac{1}{y}\right| + \left|y\sin\tfrac{1}{x}\right| \quad \left[\text{ triangle inequality}\right] \\ &\leq |x| + |y| \quad [\ \because |\sin(\cdot)| \leq 1] \end{aligned}$$

সুতরাং $|x|$ আর $|y|$ দুজনকেই $< \frac{\epsilon}{2}$ রাখতে পারলেই হবে।

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$.

$\boxed{\forall(x,y)}$ Take any $(x,y) \in N_2'\big((0,0),\delta\big)$.

Then $|x|, |y| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$. So $|f(x,y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Thus, $f(x,y) \in N_1(0,\epsilon)$, as required.

এবার দ্বিতীয় অংশ। এখানেই অভদ্র ব্যাপারটা হবে।

> Second part:
>
> If $y \neq 0$, then $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ does not exist, because $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ does not exist, while $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = 0$.
>
> Hence $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ is not defined.
>
> Interchanging the roles of x and y, the other repeated limit also does not exist.

এখানে x আর y-এর স্থানবিনিময় করা গেল, কারণ $f(x,y) = f(y,x)$ হচ্ছে। ■

6.2.2 Repeated limit একটা আছে, একটা নেই, double limit নেই

Example 37: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Find the double limit and the repeated limit, if they exist, at the point $(0,0)$.[5] **(2008.17)**

SOLUTION: যখন একটা limit দেওয়া থাকে, অথচ সেটা exist করে কিনা সেটা বলে দেওয়া থাকে না, তখন খানিকক্ষণ সেটাকে বিভিন্নভাবে নাড়াচাড়া করে দেখতে হয়। তার একটা কায়দা হল বিভিন্নভাবে সেই point-টার দিকে এগোনো। যদি কোনো পথ বরাবর বিন্দুটা অব্ধি এগোনো যায়, অথচ সেই পথ বরাবর limit না থাকে, তবে অমনি বলে দেওয়া যাবে যে, double limit-টা exist করতে পারে না। যদি দুটো পথ বরাবর আলাদা limit বেরোয়, তবেও একই সিদ্ধান্ত করা যাবে। প্রশ্ন হল কোন কোন পথ বরাবর পরীক্ষা করা যায়! সবচেয়ে সহজ হল কোনো axis-এর সঙ্গে সমান্তরালভাবে এগোনো। প্রথমে সেটাই চেষ্টা করে দেখি--

> If we approach $(0,0)$ along the x-axis, then the limit is 0.

কারণ x-axis বরাবর $y = 0$. লক্ষ কর যে, y-axis বরাবর এগোনো এক্ষেত্রে অসম্ভব, কারণ তখন $x = 0$ হয়ে যাবে, এবং $f(x,y)$-এর নীচের তলায় x আছে। আর কোন পথ বরাবর পরীক্ষা করা যায়? এখানে $f(x,y)$-এর মধ্যে $\frac{xy}{x^2+y^2}$ রয়েছে। এই জাতীয় কিছু থাকলে x, y-এর মধ্যে এমন কোনো সম্পর্ক বার করো, যাতে উপর আর নীচ দুই তলাকেই x দিয়ে লিখলে x-এর power দুটো সমান হয়। এখানে সেটা হবে $y = x$ নিলে উপরতলা হয়ে যাবে x^2, আর নীচেরতলা হয়ে যাবে $2x^2$. দুইক্ষেত্রেই x-এর power হল 2.

> If we approach $(0,0)$ along the $y = x$ line, then we have
>
> $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$
>
> Since we get two different limits along two different lines, the double limit cannot exist.

এবার repeated limit দুটো দেখার পালা--

> For all $x \neq 0$, we have
> $$\lim_{y\to 0} y \sin\frac{1}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$
> So $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0.$

অন্য repeated limit-টা--

> Again, for all $y \neq 0$ and $x \neq 0$, the limit $\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2}$ does not exist.
>
> ⟦ Because:
>
> $\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ does not exist,
> but $\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ does.
>
> ⟧
>
> Hence $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ does not exist.

■

এবার তোমার জন্য একটা অংক।

Exercise 36: Let
$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0 \end{cases}.$$
Find the repeated limits, if they exist, at the point $(0,0)$.[2] **(2017.2a)** ■

6.2.3 Repeated limit-রা আছে, কিন্তু সমান নয়

এবার একটা উদাহরণ দেখাই যেখানে দুটো repeated limit-ই exist করে, অথচ দুজনে সমান নয়।

Exercise 37: ধরো $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ হল এইরকম--
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$
এখানে $(0,0)$-তে repeated limit দুটো বার করো।

HINT:

প্রথমে $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ বার করি যেকোনো $y \neq 0$-র জন্য--
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$
সুতরাং $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

এবার তুমি নিজেই সব $x \neq 0$-র জন্য $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ বার করো, এবং তা থেকে $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ বার করে দ্যাখো কী পাও।

গ্রাফটা দেখানো আছে Fig 63-এ।

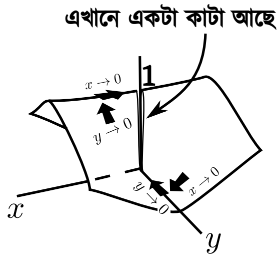


Fig 63

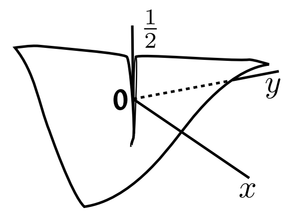


Fig 64

■

এই অংকটায় repeated limit দুটো আলাদা হয়ে গেল, তাই double limit-টা exist করতে পারল না। আগেই বলেছি, repeated limit দুটো সমান হলেও double limit-টা নাও exist করতে পারত। এবার সেরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক।

6.2.4 Repeated limit-রা আছে, এবং সমান, তাও double limit নেই

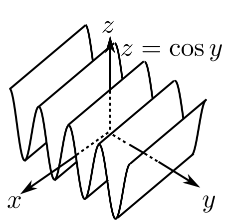
Exercise 38: এবার আমরা $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নেব এইভাবে--

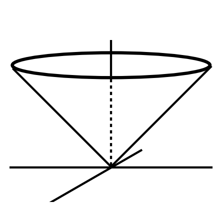
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

এখানে $(0,0)$-তে repeated limit দুটো বার করো। আরও দ্যাখাও যে, double limit-টা exist করে না।
HINT:
Repeated limit দুটো বার করার দায়িত্ব তোমাকেই দিলাম। যেহেতু $f(x,y)$ হল "symmetric w.r.t. x and y" (অর্থাৎ x এবং y-এর স্থানবিনিময় করলেও $f(x,y)$ বদলাবে না, মানে $f(x,y)=f(y,x)$ হচ্ছে), তাই বুঝতেই পারছ যে, repeated limit দুটোর একটাও exist করলে অন্যটাও করবে, এবং ওরা সমানও হবে।
এবার দেখাতে হবে যে, double limit-টা exist করে না। আগেই বলেছি যে double limit বার করার সময়ে আমরা $(0,0)$-র দিকে যেকোনোভাবে এগোতে পারি। যদি axis দুটো বরাবর এগোই তবে কী কী পাচ্ছ? আমরা অন্য আরেকভাবে এগোব, যে পথে limit-টা অন্য কিছু আসবে। এখানেও সেই কায়দাটা লাগাও, x,y-এর এমন কোনো সম্পর্ক নাও যাতে, $\frac{xy}{x^2+y^2}$-কে খালি x দিয়ে লিখলে উপরতলা আর নীচের তলায় x-এর power সমান হয়।
অংকটা অবশ্য ছবি ছাড়াই করতে হবে। কিন্তু তাও ছবিটা দেখিয়েছি Fig 64-এ। ■

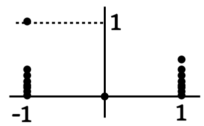
Answers

1. $a=b=c=1$. **2.** **(1)** $\frac{n(n+1)}{2}$, **(2)** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, **(3)** $n(n+1)$, **(4)** $n-1$.

3. 

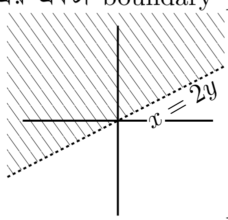
4. 
5. $f_1(x,y,z)=xy$, $f_2(x,y,z)=yz$ এবং $f_3(x,y,z)=zx$. **6.** $g(1,s)=e^s$. **9.** $N(\mathbf{a},\epsilon)$ সবগুলো U_i-এর মধ্যেই আছে, তাই ওদের intersection-এর মধ্যেও থাকতে বাধ্য। **10.** ধরো A_α-রা সবাই closed, যেখানে $\alpha \in J$. এখানে J হল যা খুশি একটা index set.

দেখাতে হবে $\cap_{\alpha\in J}A_\alpha$ হল closed, অর্থাৎ $(\cap_{\alpha\in J}A_\alpha)^c$ হল open. এদিকে de Morgan বলছে $(\cap_{\alpha\in J}A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in J}A_\alpha^c$, যেটা অবশ্যই open, কারণ প্রতিটা A_α^c হল open, আর open-দের arbitrary union-ও open. **12.** ধরি $J = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2<1\}$. তবে J অবশ্যই closed নয়। এবার প্রতিটা $\alpha\in J$-এর জন্য $A_\alpha = \{\alpha\}$ নেব। যেমন $A_{(0,0)} = \{(0,0)\}$. যেহেতু A_α-টা সবাই singleton, তাই closed-ও বটে। কিন্তু $\cup_{\alpha\in J}A_\alpha = J$, যেটা মোটেই closed নয়। **13.** ভুল। Interior-টা হবে ϕ. **14.** না। যেমন 1 হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $(0,1)$-এর একটা boundary point, কিন্তু $1\notin(0,1)$. **15.** ঠিক। **16.**



$(-1,0)$ আর $(1,0)$.

17.



$\{(x,y) \;:\; x\le 2y\}$. **18.** যেহেতু $\mathbf{a}$-টা S-এর limit point নয়, তাই $\exists\epsilon>0 \quad N'(\mathbf{a},\epsilon)\cap S=\phi$. তাই $N(\mathbf{a},\epsilon)\cap S^c\ne\phi$. আবার $\mathbf{a}\in S$ হওয়ায় $N(\mathbf{a},\epsilon)\cap S\ne\phi$. তাই $\mathbf{a}$-টা S-এর boundary point হতে বাধ্য। **21.** যাবতীয় limit point-এর set হল
$\left\{\left(0,\frac{1}{m},0\right) \;:\; m\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\left(\frac{1}{n},0,0\right) \;:\; n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(0,0,0)\}$. **23.** f-এর বেলায়--
To show: $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3 \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathbf{x}\in N_3(\mathbf{a},\delta) \quad f(\mathbf{x})\in N_1(f(\mathbf{a}),\epsilon)$.
Take any $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ and $\epsilon>0$. Choose $\delta=1>0$ অন্য যেকোনো $\delta>0$ নিলেও চলত। Take any $\mathbf{x}\in N_3(\mathbf{a},\delta)$. Then $f(\mathbf{x})=5\in N_1(5,1)=N_1(f(\mathbf{a}),\epsilon)$, as required.
g-এর বেলায়--
To show: $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathbf{x}\in N_n(\mathbf{a},\delta) \quad g(\mathbf{x})\in N_1(g(\mathbf{a}),\epsilon)$.
Take any $\mathbf{a}\equiv(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ and $\epsilon>0$. Choose $\delta=\epsilon>0$ Take any $\mathbf{x}\equiv(x_1,...,x_n)\in N_n(\mathbf{a},\delta)$. Then $|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{a})|=|x_1-a_1|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta=\epsilon$. So $g(\mathbf{a})\in N_1(g(\mathbf{a}),\epsilon)$, as required. **24.** To show $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall(x,y)\in N_2((0,0),\delta) \quad f(x,y)\in N_1(f(0,0),\epsilon)$.
Take any $\epsilon>0$. Choose $\delta=\frac{\epsilon}{2}>0$. Take any $(x,y)\in N_2((0,0),\delta)$. Then $|f(x,y)-f(0,0)|=|x|+|y|<\delta+\delta=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$, as required. **25.** Take any $\epsilon>0$ and $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Then $\exists\delta_1,\delta_2>0 \;\forall x\in N_1(a,\delta_1) \quad |f(x)-f(a)|<\epsilon$ and $\forall y\in N_1(b,\delta_2) \quad |g(y)-g(b)|<\epsilon$. Choose $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$. Take any $(x,y)\in N_2((a,b),\epsilon)$. Then $|\max\{f(x),g(y)\}-\max\{f(a),g(b)\}|<\epsilon$. এই শেষের ধাপটা কী করে হল, সেটাই hint-এ r,R,t,T-র গল্প দিয়ে বলেছিলাম। **26.** একটা counter-example হল--$F(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } x=0 \text{ or } y=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$. এটা $(a,b)=(0,0)$-তে continuous নয়। কিন্তু $F(x,0)$ আর $F(0,y)$ যথাক্রমে $x=0$ আর $y=0$-তে continuous.
30. (If part): To show $\mathbf{a}$ is a limit point of S, *i.e.*, $\forall\delta>0 \quad N_d'(\mathbf{a},\delta)\cap S\ne\phi$.
Take any $\delta>0$.
Since $\mathbf{a}_n\to\mathbf{a}$, hence $\exists M\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge M \quad \mathbf{a}_n\in N_d(\mathbf{a},\delta)$.
Since $\{\mathbf{a}_n\}_n$ consists of distinct elements, $\exists n\in\mathbb{N} \quad \mathbf{a}_n\in N_d'(\mathbf{a},\delta)$.
So $N_d'(\mathbf{a},\delta)\cap S\ne\phi$, as required.
(Only if part): Since $\mathbf{a}$ is a limit point of D, hence $N_d'(\mathbf{a},1)\cap S\ne\phi$.
Pick some $\mathbf{a}_1\in N_d'(\mathbf{a},1)$.
Next, for $n\ge1$, pick some $\mathbf{a}_{n+1}\in N_d'\left(\mathbf{a},\min\left\{\|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|,\frac{1}{n}\right\}\right)$.
Then $\|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|\le\frac{1}{n-1}\to0$. So $\mathbf{a}_n\to\mathbf{a}$. Also, for each n, we have $\|\mathbf{a}_{n+1}\|<\|\mathbf{a}_n\|$. Hence the $\mathbf{a}_n$'s are all distinct. **31.** Since $\mathbf{a}$ is a not a limit point of D, hence $\exists\delta>0 \quad N_d'(\mathbf{a},\delta)\cap S=\phi$. Thus, $N_d(\mathbf{a},\delta)\cap S=\{\mathbf{a}\}$, as required. **32.** Since $\mathbf{a}\in D$ is an isolated point of D, hence

$\exists\delta > 0 \quad N_d(\mathbf{a},\delta)\cap S = \{\mathbf{a}\}$.
এবার continuous প্রমাণ করার সময়ে যেকোনো $\epsilon > 0$-এর জন্যই এই $\delta > 0$-টা নিলেই হবে। **33.** হ্যাঁ, continuous, কারণ $|f(x,y)| \le px + y$. তাই $(x,y)\to(0,0)$ হলে sandwich law বলছে যে, $f(x,y)\to 0 = f(0,0)$ হবে। **34.** আগের অংকেই bounded দেখানো হয়েছে। সুতরাং maximum থাক আর নাই থাক, sup তো আছেই। ধরো $\sup\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x}\in D\} = M$. তবে এমন $\{\mathbf{x}\}_n \subseteq D$ পাবে, যাতে $f(\mathbf{x}_n)\to M$ হয়। এবার আগের অংকের সমাধানের কায়দায় $\{\mathbf{x}\}_n$-এর একটা convergent subsequence বার করো $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$. যদি $\mathbf{x}_{n_k}\to\mathbf{a}$, তবে $f(\mathbf{a}) = M$, তাই $M\in\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x}\in D\}$, অর্থাৎ sup-টা set-এর মধ্যেই আছে। তার মানে sup-টা maximum না হয়ে যায় না। একইভাবে minimum-ও দেখাতে পারবে। **35.** হ্যাঁ, হচ্ছে। **36.**

> For all $y\neq 0$, we have
>
> $$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 + (-1) = -1.$$
>
> So $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$.
> Again, for all $x\neq 0$, we have
>
> $$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$
>
> Now $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$, but $\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ does not exist.
> So $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ does not exist.
> Hence $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ cannot exist.

37. যেকোনো $x\neq 0$-র জন্যই $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$, এবং তাই $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$. **38.** দুটো repeated limit-ই 0. যদি $y = x$ লাইন বরাবর এগোও, তবে limit-টা হবে

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}\neq 0.$$

অতএব double limit-টা exist করতে পারে না।

Chapter II
Differentiation (part 1)

DAY 7
মূল ধারণা

এই অধ্যায়ে আমাদের উদ্দেশ্য হল কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-কে differentiate করা বলতে কী বোঝায়, সেটা শেখা। যদি $m = n = 1$ হয়, অর্থাৎ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয়, তবে differentiation-এর মানে কী, সেটা আমরা স্কুলে থাকতেই শিখেছি। এবার সেটাকেই generalize করব।
কোনো ধারণার সাথে সাধারণতঃ অনেকগুলো ব্যাপার জড়িত থাকে। যখন ধারণাটাকে generalize করা হয়, তখন সবগুলো ব্যাপারকে অক্ষুণ্ণ রাখা প্রায়শঃই সম্ভবপর হয় না। যেগুলো বেশী দরকারী সেগুলোকে রক্ষা করার জন্য কম দরকারীগুলোকে খানিকটা বিসর্জন দিতে হয়। এই differentiation-এর বেলাতেও তাই হতে চলেছে। কোনো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে differentiate করার সময়ে তিনটে ব্যাপার আমাদের মাথায় থাকত--

- এক, এর ফলে একটা নতুন function পাওয়া যায়, $f'(x)$.
- দুই, এর সাহায্যে আমরা $f(x)$-এর বৃদ্ধির হার বার করতে পারি,
- এবং তিন, খুব অল্প একটু জায়গায় দেখলে $f(x)$-এর গ্রাফটাকে একটা সরলরেখার মত মনে হয়, যাকে বলে ওই বিন্দুতে $f(x)$-এর tangent. মনে করার জন্য Fig 1 দেখে নাও। আমরা differentiation করে সেই tangent-এর slope বার করি।

এই তিনটে ধারণাই differentiation-এর সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িয়ে ছিল। কিন্তু দুঃখের কথা-- যখন $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ নিয়ে কাজ করব, তখন এদের সবাইকে সম্পূর্ণ রক্ষা করা যাবে না। গণিতজ্ঞরা মনে করেন যে, তৃতীয় ব্যাপারটা সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ, তাই ওটাকে রক্ষা করতেই হবে। সেটা করতে গিয়ে প্রথম আর দ্বিতীয়টা খানিকটা করে বাদ দিতে হবে!
তৃতীয় ব্যাপারটা নিয়ে শুরু করা যাক। যদি তোমাকে কোনো একটা বাঁকা জিনিসের খুব অল্প একটু দেখাই, তবে চট্ করে তোমার চোখে তার বক্রতাটা ধরা পড়বে না, মনে হবে যেন জিনিসটা সোজাই। এই ব্যাপারটা থেকেই differentiation-এর

Fig 1

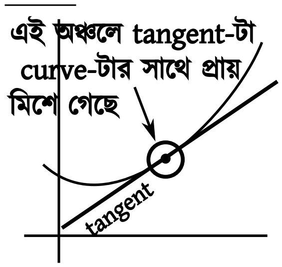




Fig 2

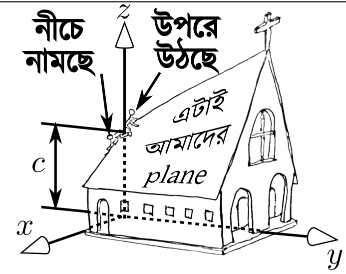


Fig 3

ধারণাটার জন্য, যদিও অনেক বইতেই কথাটা স্পষ্ট করে বোঝানো থাকে না[1]। যদি একটা গ্রাফকে শক্ত লোহার তার দিয়ে তৈরী বলে মনে করা যায়, আর তার কোনো বিন্দুতে একটা ছোট্টো পিঁপড়ে থাকে, তবে ওর কাছে মনে হবে যে, ওর পায়ের নীচের তারটা একটা সরলরেখা বরাবর আছে। সেই কাল্পনিক সরলরেখাটাকেই আমরা বলি **tangent**, এবং সেই পিঁপড়ের অনুভূতির জগৎকে বুঝতে হলে সেই tangent-এর একটা ফর্মুলা জানা খুবই দরকার। সেই কাজটা করতে গিয়েই differentiation-এর উৎপত্তি।

এটা ছিল $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-এর কথা। কিন্তু যদি $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ হয়, তবে গ্রাফটা হবে একটা surface. এখানেও মূল ব্যাপারটা একই। কোনো একটা বিন্দুর চারপাশটুকুকেই খালি দেখলে অনেক বাঁকা surface-কেও মনে হয় যেন একটা plane. আমরা তাকে বলি ওই বিন্দুতে surface-টার **tangent plane.** এর চমৎকার একটা উদাহরণ রয়েছে আমাদের পায়ের নীচেই। আমরা জানি পৃথিবীটা গোল, কিন্তু পায়ের নীচের জমির দিকে তাকিয়ে মোটেই সেটাকে গোল বলে মনে হয় না (Fig 2)। মনে হয় যেন আমরা কোনো সমতলের উপরেই দাঁড়িয়ে আছি। এই সমতলটাই হল ওই বিন্দুতে ভূপৃষ্ঠের tangent plane. এইরকম tangent plane-এর ফর্মুলা বার করাটাই হবে differentiation-কে generalize করার উদ্দেশ্য।

Plane-দের নিয়ে কাজ শুরু করার আগে চট্ করে মনে করে নেওয়া যাক ওদের ফর্মুলা কীরকম হয়।

7.1 Plane-এর ফর্মুলা

সরলরেখাদের ফর্মুলা হত $\ell(x)=mx+c$ জাতীয়। আমরা c-কে বলতাম **intercept** আর m-কে বলতাম **slope**. যখন plane নিয়ে কাজ করব, তখন ফর্মুলাটা হবে $p(x,y)=m_1x+m_2y+c$ জাতীয়। এখানেও c-কে বলব intercept. তবে এখানে দুটো slope আছে, x-এর দিকে slope হল m_1, আর y-এর দিকে slope হল m_2. ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 3-এ একটা চার্চ দেখা যাচ্ছে। তার ছাদের যে পাশটা আমাদের দিকে রয়েছে সেটাই হল আমাদের plane-টা। এই plane-টা z-axis-কে যে বিন্দুতে ছেদ করেছে তার উচ্চতাই হল intercept-টা। অর্থাৎ ছবিতে লোক দুটো যেখানে রয়েছে, তার উচ্চতাই হল c. ছবিতে দেখা যাচ্ছে যে, লোক দুটো দুজনে দুদিকে মুখ করে রয়েছে। একজনের মুখ x-axis-এর positive দিকে, অন্যজনের y-axis-এর positive দিকে। প্রথম লোকটা নীচের দিকে নামছে, তার মানে x-axis বরাবর slope-টা negative, অর্থাৎ $m_1<0$. কিন্তু দ্বিতীয় লোকটা উঠছে, তাই y-axis বরাবর slope-টা positive, মানে $m_2>0$.

Exercise 1: নীচের প্রতিক্ষেত্রে intercept বার করো, এবং x-axis আর y-axis বরাবর slope দুটোও বার করো।

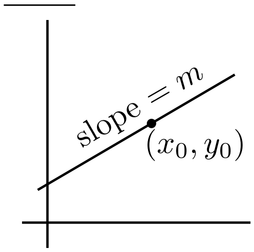
1. $p(x,y)=3+2x-5y$,

[1]আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের Differential Calculus বইতে এর বিশদ আলোচনা পাবে।

Fig 4



Fig 5



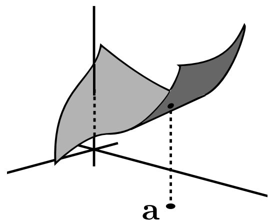


Fig 6

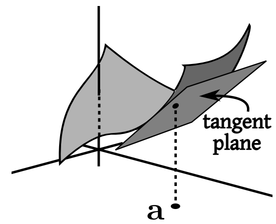


Fig 7

2. $p(x,y) = 3 + (2-x) + (2y+3)$,
3. $p(x,y) = x$.
4. $p(x,y) \equiv 5$.

■

আমাদের আলোচনায় আমরা খালি সেই সব plane নিয়েই কাজ করব, যারা কোনো বিশেষ বিন্দু (x_0, y_0, z_0) দিয়ে যায় (Fig 4)। এইরকম plane-দের ফর্মুলা হয় এই জাতীয়--

$$p(x,y) = z_0 + m_1 \cdot (x - x_0) + m_2 \cdot (y - y_0).$$

এখানেও x-axis এবং y-axis বরাবর slope দুটো হল যথাক্রমে m_1 আর m_2.
এর সঙ্গে তুলনা করতে পারো কোনো বিশেষ বিন্দু (x_0, y_0) দিয়ে যাওয়া সরলরেখার (Fig 5), যার বেলায় ফর্মুলা ছিল--

$$\ell(x) = y_0 + m \cdot (x - x_0).$$

Exercise 2: নীচের প্রতিক্ষেত্রে (x_0, y_0, z_0)-গামী plane-এর ফর্মুলা বার করো--

1. $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = -1$. বলা আছে x-axis বরাবর slope হল 3 এবং y-axis বরাবর slope হল 0.
2. $x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1$. বলা আছে x-axis বরাবর slope হল 1 এবং plane-টা $(0,0,0)$ দিয়েও যায়।

■

Plane-এর equation নিয়ে যথেষ্ট আলোচনা হল। এবার আমরা এবার সেটা ব্যবহার করে tangent plane-এর ফর্মুলা বার করার জন্য তৈরী।

7.2 Tangent plane-এর ফর্মুলা বার করা

কী করতে চলেছি বুঝে নাও। একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ দেওয়া আছে। চিন্তা করার সুবিধার জন্য মনে করো তার গ্রাফটা Fig 6-এ দেখানো surface-টার মত। একটা $\mathbf{a} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ আছে। সেখানে আমাদের tangent plane বার করতে হবে (Fig 7)। প্রথম কথা এই plane-টা নিশ্চয়ই surface-এর গায় $\mathbf{a}$-এর উপরে যে বিন্দুটা আছে তার মধ্যে দিয়ে যায়। সেই বিন্দুটা হল $(a, b, f(a,b))$. এর মধ্য দিয়ে যে সব plane যায়, তাদের চেহারা হল

$$p(x,y) = f(a,b) + m_1 \cdot (x - a) + m_2 \cdot (y - b).$$

এর মধ্যে অজানা আছে খালি m_1 আর m_2. সেগুলো বার করাটাই হল আমাদের চ্যালেঞ্জ। এমনভাবে এদের নিতে হবে যাতে plane-টা ওই বিন্দুতে surface-টার সাথে "একেবারে মিশে যায়"। এই "একেবারে মিশে যাওয়া" মানে ঠিক কী? হায়ার

সেকণ্ডারীতে যে calculus শিখেছিলাম, সেখানে এই প্রশ্নের সমাধান বাৎলে গিয়েছিলেন নিউটন এবং লাইবনিৎস। সেটা চট্ করে একটু মনে করে নিই।

7.2.1 হায়ার সেকন্ডারীর স্মৃতি

তখন অবশ্য আমরা কাজ করতাম $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $a \in \mathbb{R}$ নিয়ে। সেখানে $(a, f(a))$ বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার ফর্মুলা হয় $\ell(x) = f(a) + m \cdot (x - a)$ জাতীয়। নিউটন আর লাইবনিৎস বলেছিলেন যে $\ell(x)$-টা a-র কাছে $f(x)$-এর সঙ্গে "একেবারে মিশে যায়" মানে

$x \to a$ হলে যেন $\frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} \to 0$ হয়,

মানে চাইছি

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - m \cdot (x-a)}{x-a} = 0. \tag{*}$$

এরকম সরলরেখা নাও থাকতে পারে, কিন্তু থাকলে একটাই থাকবে, এবং তাকেই আমরা বলতাম ওই বিন্দুতে $f(x)$-এর tangent, এবং তার slope-কে বলতাম ওই বিন্দুতে function-টার derivative. এই গাণিতিক বর্ণনার উপরেই পুরো differential calculus দাঁড়িয়ে আছে। যারা আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Differential Calculus বইটা পড়েছ, তাদের কাছে এটা নতুন কিছু নয়। কিন্তু বাকিরা এখানে হাঁ হাঁ করে উঠতে পারো এই বলে যে, differentiation-এর সংজ্ঞা স্কুলে আমরা মোটেই এরকম শিখি নি। সেখানে limit-টা ছিল এইরকম--

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = m. \tag{**}$$

চিন্তার কিছু নেই, কারণ (*) এবং (**) আসলে একই জিনিস। সামান্য ঘুরিয়ে লেখা, এই যা--

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - m \cdot (x-a)}{x-a} = 0 \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m = 0.$$

তবে (*) নিয়ে কাজ করার সুবিধা হল সেটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-এর বেলাতেও অনায়াসে generalize করা যাবে, কিন্তু (**)-কে সরাসরি generalize করা মুশকিল।
কী করে (*)-কে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-এর বেলায় generalize করা যায় বলি।

7.2.2 আবার tangent plane

আমাদের tangent plane-টার ফর্মুলা ছিল এই চেহারার--

$$p(x, y) = f(a, b) + m_1 \cdot (x - a) + m_2 \cdot (y - b).$$

আমরা চাইছি $p(x, y)$ যেন $(x, y) = (a, b)$-র কাছে $f(x, y)$-এর গ্রাফের সাথে "একেবারে মিশে যায়", এবং এখানেও সেই নিউটন-লাইবনিৎস প্রদর্শিত পথেই তার গাণিতিক বর্ণনা দেব এইরকম--

যদি $(x, y) \to (a, b)$ হয়, তবে যেন $\frac{f(x,y)-p(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|} \to 0$ হয়,

অর্থাৎ চাইছি--

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - m_1 \cdot (x-a) - m_2 \cdot (y-b)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0. \tag{+}$$

এরকম plane নাও থাকতে পারে, কিন্তু থাকলে একটাই থাকবে। সেটাকেই বলব **tangent plane**.
একটা উদাহরণ দেখে ব্যাপারটা হজম করে নেওয়া যাক।

Example 1: ধরো $f(x, y) = x^2 + y^2$ দিলাম। আর $(a, b) = (1, 2)$ দিলাম। তাহলে $m_1 = 2$ আর $m_2 = 4$ বসিয়ে দ্যাখো $(+)$-টা ঠিক হচ্ছে কিনা। যদি $m_1 = 4$ আর $m_2 = 2$ নিতে?

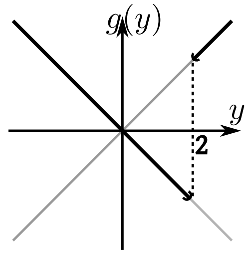


Fig 8

SOLUTION: এখানে $f(a,b) = f(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5$. তাই--

$$\frac{f(x,y) - f(a,b) - m_1 \cdot (x-a) - m_2 \cdot (y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = \frac{x^2+y^2-5-m_1 \cdot (x-1) - m_2 \cdot (y-2)}{\|(x,y)-(1,2)\|}.$$

যদি $m_1 = 2$ আর $m_2 = 4$ নিই, তবে হবে

$$\frac{x^2+y^2-5-2(x-1)-4(y-2)}{\|(x,y)-(1,2)\|} = \cdots = \frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

দেখাই যাচ্ছে যে, $(x,y) \to (1,2)$ হলে এটা দিব্যি শূন্যের দিকে যাচ্ছে।
কিন্তু যদি $m_1 = 4$ আর $m_2 = 2$ নিই, তবে হবে

$$\frac{x^2+y^2-5-4(x-1)-2(y-2)}{\|(x,y)-(1,2)\|}.$$

এবার একটু সমস্যা হবে। ধরো তুমি $x = 1$ নিয়ে $y \to 2$ করলে। যেই $x = 1$ বসাবে অমনি পাবে

$$\frac{y^2-2y}{|y-2|} = \frac{y(y-2)}{|y-2|} = \begin{cases} -y & \text{if } y < 2 \\ y & \text{if } y > 2 \end{cases}.$$

ধরো এটাকে $g(y)$ নাম দিলাম। এর গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 8-এ। বুঝতেই পারছ, $y \to 2$ হলে $\lim_{y\to 2} g(y)$ মোটেই exist করে না, কারণ যদি $y \to 2-$ নাও, তবে এটা যাবে -2-এর দিকে, আর $y \to 2+$ হলে যাবে 2-এর দিকে। সুতরাং

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+y^2-5-4(x-1)-2(y-2)}{\|(x,y)-(1,2)\|}$$

আর exist করে কী করে? ■

Exercise 3: আগের অংকটায় $y = 2$ বসিয়ে $x \to 1$ নিয়ে দ্যাখো তো limit পাও কিনা। ■

এইবার আমরা differentiability-র সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখব। তার জন্য একটু সাজিয়ে লিখলে সুবিধা হবে। আমরা এতক্ষণ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - m_1 \cdot (x-a) - m_2 \cdot (y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0$$

নিয়ে কাজ করছিলাম। এবার ওই (a, b)-কে আমরা $\mathbf{a}$ লিখব। আর (x, y)-কে লিখব $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ আকারে। মানে $\mathbf{h}$ হল $\mathbf{x} - \mathbf{a} = (x - a, y - b)$. তাহলে $(x, y) \to (a, b)$ না লিখে $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ লিখলেই চলবে। এবার যদি m_1, m_2-কে পাশাপাশি বসিয়ে একটা 1×2 সাইজের matrix বানিয়ে নাও, $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix}$, তবে limit-টা দাঁড়াবে এইরকম--

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} = 0.$$

বাঃ, একটু আগে যে (*) লিখেছিলাম, দেখতে প্রায় সেরকমই হয়েছে, না? খালি একটু matrix লেগেছে, এই যা। যারা matrix-এর গুণ করে অভ্যস্ত নও, তারা একটু সময় নিয়ে ব্যাপারটা বুঝে নাও।
সংজ্ঞাটা তাহলে দাঁড়ালো এইরকম--

DEFINITION: Differentiability ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

A function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is called **differentiable** at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ if there is a matrix $M_{1\times 2}$ such that

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} = 0.$$

Example 2: Let $f : S \to \mathbb{R}$ be a function, where $S \subseteq \mathbb{R}^2$. What do you mean by differentiability of a f at a point $(a, b) \in S$? [1] **(2006.8)** ■

যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করি, তবে সংজ্ঞাটা দেখতে হবে একইরকম--

DEFINITION: Differentiability ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

A function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called **differentiable** at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ if there is a matrix $M_{1\times n}$ such that

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} = 0.$$

আর যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ হয়, তাহলেও সংজ্ঞার প্যাটার্ণটা একই থাকবে--

DEFINITION: Differentiability ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

A function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is called **differentiable** at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ if there is a matrix $M_{m\times n}$ such that

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} = \mathbf{0}.$$

লক্ষ করো, $m = 1$ হয়ে গেলে এটা আগের সংজ্ঞাটাতে পরিণত হয়, এবং সেই সঙ্গে n-ও যদি 1 হয়, তবে আমরা ফিরে যাই হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা differentiation-এ।
প্রতি ক্ষেত্রেই M-কে আমরা বলি **derivative matrix** of f at **a**. যদি $m = 1$ হয়, তবে আরেকটা প্রচলিত নাম হল **gradient** বা, সংক্ষেপে, **grad**. কোনো **a**-তে f-এর gradient-কে লেখা হয় $\nabla f(\mathbf{a})$. এই ∇-টা একটা গ্রীক অক্ষর, নাম ন্যাব্‌লা[2]।

Exercise 4: Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, where $n > 1$, $m \geq 1$, be a function. Define differentiability of f at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. [1]. **(2019)**
HINT: এখানে $n > 1$ আর $m \geq 1$ নিয়ে দুশ্চিন্তা নেই, general definition-টা দিলেই হবে। ■

Exercise 5: যদি $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ হয় একটা differentiable function, তবে কোনো বিন্দুতে তার derivative matrix-এ কতগুলো row আর কতগুলো column থাকবে? ■

Exercise 6: খানিক আগে একটা অংকে $f(x, y) = x^2 + y^2$ আর $(a, b) = (1, 2)$ নিয়ে দেখেছিলাম যে

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - 2(x - a) - 4(y - b)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

এ থেকে বলো (a, b)-তে $f(x, y)$-এর derivative matrix কী? ■

Exercise 7: ধরো $f(x, y) = x^2 - y^2$. তবে সরাসরি সংজ্ঞা থেকে পরীক্ষা করে দ্যাখো $(2, 3)$ বিন্দুতে নীচের কোন্ matrix-টা $f(x, y)$-এর derivative matrix?

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

■

DAY 8
Derivative matrix বার করা

গতকাল আমরা multivariate calculus-এ differentiation-এর সংজ্ঞা শিখেছি। সেখানে একটা derivative matrix-এর উল্লেখ আছে, যাকে আমরা M লিখেছিলাম। যদি কোনো f দিয়ে সেটাকে differentiable দেখাতে বলে, তবে সরাসরি সংজ্ঞা ধরে এগোতে হলে আমাদের প্রথম কাজ হওয়া উচিত একটা উপযুক্ত M বার করে নেওয়া। আজ আমরা সেটাই শিখব। কায়দাটা জটিল নয় তেমন। তার জন্য **partial differentiation** বলে একটা ধারণা লাগবে। প্রথমে সেটা আলোচনা করে নিই।

8.1 Partial differentiation

ধরো আমার কাছে তিনটে variable আছে, x, y আর z. এদের মধ্যে সম্পর্ক হল $z = f(x, y)$. এবার যদি y-কে স্থির রেখে খালি x-কে বদলাই, তবে z-টা কেবল x-এর function হবে। যেমন যদি $y = 5$ স্থির রাখি, তবে $z = f(x, 5)$ যেটা কেবল মাত্র x-এর function. এই function-টাকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করাকে বলে **partial differentiation**

[2] কেমন ক্যাব্‌লা ক্যাব্‌লা শুনতে, না?

of z with respect to x. লেখার সময়ে লিখি $\frac{\partial z}{\partial x}$. একইভাবে যদি x-কে স্থির রেখে y-এর সাপেক্ষে differentiate করতাম, তবে সেটা হত partial differentiation wrt y. একটা উদাহরণ নেওয়া যাক।

Example 3: ধরো $z = x^2y + xy^2 - x + e^y + 4$. তবে $\frac{\partial z}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial z}{\partial y}$ বার করো।

SOLUTION: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - 1$. লক্ষ করো y-ওয়ালা জিনিসগুলো কেমন constant-এর মত আচরণ করছে। একইভাবে $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + e^y$. ■

Partial differentiation-এর ধারণাটা আরো বেশীসংখ্যক variable-এর জন্যও খাটে। যেমন নীচের অংকে।

Example 4: ধরো $x_1, \ldots, x_n$ আছে, আমরা এদের ব্যবহার করে $v = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$ বার করেছি। তার মানে z এখানে $x_1, \ldots, x_n$-এর function. তবে যেকোনো $k \in \{1, \ldots, n\}$-এর জন্য $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ বার কর।

SOLUTION: এখানে আমরা x_k ছাড়া বাকি x_i-গুলোকে স্থির রাখব। যেমন, $\frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2$-কে ভাবব যেন $\frac{x_k^2}{n}$+constant, যাকে x_k-র সাপেক্ষে differentiate করলে হবে $\frac{2x_k}{n}$.

একইভাবে $\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$-কে ভাবব যেন $\left(\frac{x_k}{n} + \text{constant}\right)^2$, যাকে x_k-র সাপেক্ষে differentiate করলে পাব

$$2\left(\frac{x_k}{n} + \text{constant}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}\sum x_i.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{2x_k}{n} - \frac{2}{n^2}\sum x_i.$$

■

Exercise 8: যদি $w = xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$ হয়, তবে $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ এবং $\frac{\partial w}{\partial z}$ বার করো। ■

Exercise 9: If $f(x, y) = x^2 - y^2$, then find $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$.

HINT: এখানে $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ মানে হল $(x, y) = (1, 2)$ বিন্দুতে $\frac{\partial f}{\partial x}$-এর value. ■

Exercise 10: ধরো $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. যদি $y = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ হয়, তবে $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ =? ■

Exercise 11: Show that, for the function $f(x, y) = |x| + |y|$, the 1st order partial derivatives do not exist at $(0, 0)$.[2] **(2017.2bp2)**

HINT: এই অংকে একটা কথা ব্যবহার করেছে "**1st order partial derivatives**"। এর মানে হল $\frac{\partial f}{\partial x}$ আর $\frac{\partial f}{\partial y}$. যদি $f(x_1, \ldots, x_n)$ হত, তবে $\frac{\partial f}{\partial x_i}$-দের প্রত্যেককেই একেকটা 1st order partial derivative বলে। পরে আমরা 2nd order, 3rd order ইত্যাদি partial derivative-দের কথা শিখব। ■

Exercise 12: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify.

For $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, let $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2 + y^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$. Then $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ equals

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

[1+1] **(2019.1h)**

HINT:

এই অংকটা অতি সহজেই $f(x,0)$ এবং $f(0,y)$ বার করে তাদের differentiate করেই করে ফেলা যায়। তার জন্য গ্রাফের কোনো দরকার পাড়ে না। কিন্তু তাও গ্রাফটা সহজে কল্পনা করার এমন সুন্দর কায়দা আছে, যে সেটা উল্লেখ করার লোভ সামলাতে পারছি না। যদি খালি $\sqrt{x^2+y^2}$ হত, তবে যে Fig 9-এর মত একটা cone হত, সেটা আশা করি বুঝতে পারছ। প্রথম অধ্যায়েই বলেছিলাম সে কথা। সঙ্গে যে লক্ষ করো যে $\frac{x}{|x|}$ আসলে $sign(x)$. সুতরাং এখানে আমরা বলতে পারি

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{if } x > 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

অতএব cone-টাকে y-axis বরাবর দুভাগ করে, যে ভাগটা $x < 0$ অংশে পড়ে, সেটাকে উল্টে দিলেই হবে (Fig 10)। আর সেই সঙ্গে y-axis-টাও থাকবে, কারণ $f(x,y) = 0$ বলেছে।

■

8.1.1 Notation-এর ঝঞ্ঝাট

Partial differentiation ব্যাপারটা খুব একটা কঠিন কিছু হয়তো নয়, কিন্তু এখানে notation নিয়ে মাঝেমাঝে কিছু সমস্যা বাঁধে। সেগুলো নিয়ে আগেভাগেই সাবধান থাকা ভালো।

Example 5: ধরো $z = \sin(2x+y)$ এবং $w = x+y$. এখানে চারটে variable রয়েছে, x, y, z এবং w. লক্ষ করো $z = \sin(x+w)$ হচ্ছে। যদি $(2,3)$ বিন্দুতে $\frac{\partial z}{\partial x}$ বার করতে বলি, তবে কী করে করবে?

SOLUTION: যদি z-কে x আর y-এর function বলে ভাবি, তবে y-কে স্থির রেখে x-কে বদলাব। ছবি ভাবলে Fig 11-এর একটানা লাইনটা বরাবর নড়ব। সেক্ষেত্রে $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+y)$, যেটা $(x,y) = (2,3)$-তে হচ্ছে $2\cos 7$.

কিন্তু যদি z-কে x আর w-এর function বলে ভাবি, মানে $z = \sin(x+w)$, তবে আমরা w-কে স্থির রেখে x-কে বদলাব। এক্ষেত্রে আমরা নড়ছি Fig 11-এর ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা বরাবর। এবার পাব $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+w)$. এর মধ্যে যদি $w = x+y$ বসাও, তবে পাবে $\cos(2x+y)$, যেটা $(x,y) = (2,3)$-তে হচ্ছে $\cos 7$, মোটেই আগের উত্তরটার সাথে মিলল না! ■

তাহলেই বোঝো, $\frac{\partial z}{\partial x}$ বার করার জন্য খালি z এবং x-এর কথা জানলেই চলবে না, z-টা x ছাড়া আর কোন্ variable-এর function সেটাও জানতে হবে, যদিও $\frac{\partial z}{\partial x}$-এর মধ্যে সেই অন্য variable-টার কোনো উল্লেখ নেই। এই ব্যাপারটা অনেক সময়ে মাথা গুলিয়ে দেয়।

Exercise 13: ধরো $z = e^x + xv$, যেখানে $v = \cos(x-y)$. এবার z-কে x, y-এর function হিসেবে মনে করে $\frac{\partial z}{\partial x}$ বার করো। তারপর z-কে x, v-এর function হিসেবে মনে করে $\frac{\partial z}{\partial x}$ বার করো। ■

Fig 9

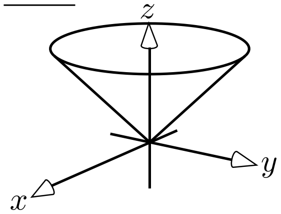


Fig 10

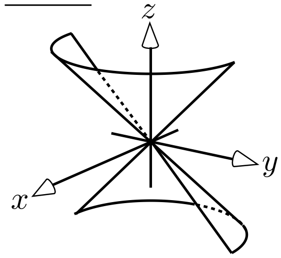
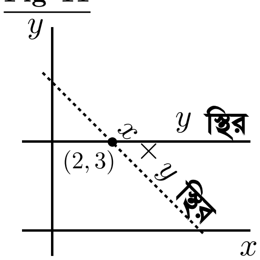


Fig 11



Exercise 14: আবার ধরো $z = e^x + xv$, কিন্তু এবার খালি বলা আছে যে, v হল x, y-এর কোনো একটা function, যা x-এর সাপেক্ষে differentiable. এবার z-কে x, y-এর function হিসেবে মনে করে $\frac{\partial z}{\partial x}$ বার করো। ■

এবার আরেকটা সমস্যার কথা বলি। যখন আমরা $y = f(x)$ লিখি, তখন derivative-টা দুভাবে লেখা যায়--

- এক, variable ব্যবহার করে $\frac{dy}{dx}$
- এবং দুই, function ব্যবহার করে $f'(x)$.

এবার যদি $z = f(x, y)$ হয়, তবে partial differentiation-এর বেলাতে variable ব্যবহার করে $\frac{\partial z}{\partial x}$ লিখে থাকি। কিন্তু এখানে function ব্যবহার করে লেখা যায় না? অনেকে $\frac{\partial f}{\partial x}$ লিখে থাকে। সমস্যা হল $f(x, y)$-এর মধ্যে x আর y হল যাকে বলে dummy variable, অর্থাৎ ওদের নামে কিছু এসে যায় না, যেমন $f(x, y) = x^2 + y$ এবং $f(p, q) = p^2 + q$ আসলে একই function. এমন কি $f(y, x) = y^2 + x$-ও লেখা যায় একে। সেই কারণে partial derivative-এর মধ্যে x-এর উল্লেখটা বাঞ্ছনীয় নয়। তার চেয়ে বরং এইভাবে ভাবা ভালো-- f-এর দুটো input, তার মধ্যে প্রথম input-টার সাপেক্ষে partial differentiation করা হচ্ছে। তাই $\frac{\partial f}{\partial x}$ না লিখে $\partial_1 f$ লেখাটা বেশী ভালো। একইভাবে $\frac{\partial f}{\partial y}$-এর বদলে $\partial_2 f$ লেখাটা ভালো। তবে যেসব অংক dummy variable-দের নাম বদলানোর প্রয়োজন পড়ে না, সেখানে $\frac{\partial f}{\partial x}$ বা $\frac{\partial f}{\partial y}$ লিখলেও অসুবিধা নেই। অবশ্য $\partial_1 f$ বা $\partial_2 f$ লেখার আরেকটা সুবিধাও আছে, ওতে লিখতে হয় কম!

8.2 Jacobian matrix

Partial derivative-দের কথা শেখা হল। এবার আমরা মূল প্রশ্নে ফিরে যাই। কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ দেওয়া থাকলে আমরা কোনো বিন্দুতে তার derivative matrix বার করার চেষ্টা করছিলাম। এর জন্য partial derivative ব্যবহার করে একটা কায়দা এবার বলব। কায়দাটা কেন কাজ করে, তার প্রমাণটা আসবে একটু পরে। আপাততঃ কায়দাটুকু একটা ম্যাজিকের মত শিখে রাখা যাক।

Example 6: ধরো $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ হল $f(x_1, x_2) = (\sin(x_1 + x_2^2),\ x_1^3 x_2)$. বলে দিচ্ছি যে এটা একটা differentiable function. তোমাকে বলা হল M বার করতে। কী করে করবে?

SOLUTION: এখানে $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, যেখানে $m = n = 2$. তাই M-এর সাইজ হবে $m \times n$, মানে 2×2. এর মধ্যে চারটে entry আছে। একে একে বার করি। $(2, 1)$-th entry-টা দিয়ে শুরু করা যাক। $(2, 1)$-এর শুরুতে আছে 2, তাই f-এর দ্বিতীয় component-টা নেব, মানে $x_1^3 x_2$. এর নাম দিলাম $f_2(x_1, x_2)$. এবার $(2, 1)$-এর শেষের সংখ্যাটা দ্যাখো, 1. তাই x_1 নেব। এবার এই x_1-এর সাপেক্ষে ওই f_2-কে partially differentiate করব--

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2.$$

এটাই হবে M-এর $(2, 1)$-th entry, মানে m_{21}.

কায়দাটা বুঝলে, তো? M-র প্রতিটা entry-ই হবে f-এর কোনো না কোনো component-এর partial derivative. Entry-টা কোন্ row-তে আছে, সেটা ঠিক করে দেবে কোন component-টাকে differentiate করা হবে, আর column-টা ঠিক করে দেবে কোন variable-এর সাপেক্ষে partial differentiation-টা করা হবে। অতএব--

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \cos(x_1 + x_2^2), \\ m_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2 \cos(x_1 + x_2^2), \\ m_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1^3. \end{aligned}$$

সুতরাং যেকোনো বিন্দু (x_1, x_2)-তে Jacobian matrix-টা হল

$$M = \begin{bmatrix} \cos(x_1 + x_2^2) & 2x_2\cos(x_1 + x_2^2) \\ 3x_1^2 x_2 & x_1^3 \end{bmatrix}.$$

লক্ষ করো, M কিন্তু (x_1, x_2)-এর উপরে নির্ভর করে, তাই বিভিন্ন বিন্দুতে Jacobian-এর value বিভিন্ন হতে পারে। ■

এবার তোমার নিজে করার জন্য একটা অংক।

Exercise 15: যদি $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ হয় $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1^2 x_2,\ (x_2 - x_1)^2)$, তবে f-এর derivative matrix বার কর। এটা ধরে নাও যে f-টা সর্বত্র differentiable. ■

তাহলে কায়দাটা বুঝলে। এবার জানা দরকার এই কায়দাটা কেন কাজ করে।

> THEOREM
> Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be differentiable at some $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ie, there is a matrix $M_{m\times n}$ such that
>
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$
>
> Then the (i, j)-th entry of M must be
>
> $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Proof: প্রথমে বিভিন্ন component-গুলোর নাম দিয়ে নেওয়া যাক।

> Let $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ and $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$.
> Let the i-th component of f be f_i for $i = 1, \ldots, m$.
> Also let the (i, j)-th entry of M be m_{ij}.

বলেছে

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

এখন $\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ হল $\mathbb{R}^m$-এর একটা সদস্য। এর মধ্যে m_{ij}-র ভূমিকা রয়েছে কেবল i-th entry-তে (কেন, বুঝলে তো?)। অতএব খালি সেইটা নিয়ে কাজ করা যাক--

> Now taking the i-th entry of the given limit,
>
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{a}) - \sum_{k=1}^n m_{ik}h_k}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

ওই $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}h_k$-টা কোথা থেকে এল, বুঝলে তো? ওটা হল $M\mathbf{h}$-এর i-th entry.
এবার $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$-র দিকে তাকানো যাক। এখানে $(h_1, ..., h_n) \to (0, ..., 0)$ করার একটা পথ হল বাকি সব h_i-দের 0-তে স্থির রেখে খালি $h_j \to 0$ করা (অর্থাৎ x_j-axis বরাবর $(0, ..., 0)$-র দিকে এগোনো)। যদি আমরা $\mathbf{h} = (0, ..., h_j, ..., 0)$ লিখি, তবে--

- $f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ হয়ে যাবে $f_i(a_1, ..., a_j + h_j, ..., a_n)$,
- $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}h_k$ হয়ে যাবে $m_{ij}h_j$,
- এবং $\|\mathbf{h}\|$ হয়ে যাবে $|h_j|$.

সব মিলিয়ে limit-টা দাঁড়াবে এইরকম--

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{f_i(a_1, ..., a_j + h_j, ..., a_n) - f_i(a_1, ..., a_n) - m_{ij}h_j}{|h_j|} = 0.$$

এবার আমরা নীচের তলার $|h_j|$-টার বদলে খালি h_j লিখতে চলেছি। সেটা কেন করা যাবে বুঝে নাও। ধরো $F(x)$ একটা function. তবে $F(x) \to 0$ আর $|F(x)| \to 0$ সমার্থক। এবার যদি $F(x)$ আর $G(x)$ দুটো function হয়, তবে $\frac{F(x)}{G(x)} \to 0$ হওয়া এবং $\frac{F(x)}{|G(x)|} \to 0$ হওয়া একই কথা, কারণ absolute value নিলে দুজনেই $\left|\frac{F(x)}{G(x)}\right| \to 0$-র সঙ্গে সমার্থক।

ie,

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{f_i(a_1, ..., a_j + h_j, ..., a_n) - f_i(a_1, ..., a_n) - m_{ij}h_j}{h_j} = 0.$$

এবার একটু সাজিয়ে লিখলেই পাবে--

or,

$$m_{ij} = \lim_{h_j \to 0} \frac{f_i(a_1, ..., a_j + h_j, ..., a_n) - f_i(a_1, ..., a_n)}{h_j},$$

কিন্তু এটা তো আসলে $\mathbf{a}$ বিন্দুতে $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. সুতরাং--

or,

$$m_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

as required.

[Q.E.D]

Example 7: Show that differentiability of f at (a, b) implies the existence of first order partial derivatives at that point.[5] **(2006.8)** ■

Example 8: If a function is differentiable at any interior point (a, b) of its domain, show that

f admits of first order partial derivatives at that point.[2] **(2004)** ■

Derivative matrix বার করার এই যে ফর্মুলাটা পেলাম, এটার একটা নাম আছে, **Jacobian matrix**. সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখে রাখা যাক।

> DEFINITION: **Jacobian matrix**
>
> Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Let all the partial derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ exist at $\mathbf{a}$. Then the **Jacobian matrix** of f at $\mathbf{a}$ is defined as the $m \times n$ matrix with (i, j)-th entry given by $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$.

Jacobian-এর জন্য নানারকমের notation আছে--

$D\mathbf{f}$, বা $J_\mathbf{f}$ বা $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.

এই শেষের notation-টা অনেকে কেবলমাত্র $m = n$ হলেই ব্যবহার করেন, এবং সেটা Jacobian-টার determinant বোঝাতে। কোনো বই পড়ার সময়ে তাই ভালো করে বুঝে নিও, সেখানে কোন্ notation ব্যবহার করা হচ্ছে, নইলে গুলিয়ে যেতে পারে। তবে যদি $m = 1$ হয়, তবে সকলেই একই notation ব্যবহার করে, $\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Exercise 16: নীচের প্রতিক্ষেত্রে Jacobian বার করো--
(1) $f(x, y) = 2x + 3y$, **(2)** $f(t) = (t, t^2, 1)$, **(3)** $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. ■

একটু আগেই একটা theorem-এ দেখলাম যে, derivative matrix যদি exist করে, তবে সেটা Jacobian-এর সমান হতে বাধ্য। এর অন্যতম ফলশ্রুতি হল--কোনো বিন্দুতে derivative matrix অবশ্যই unique হয়। আগে আমরা বলেছিলাম যে, কোনো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-এর কোনো বিন্দুতে tangent থাকলে একটাই থাকে, বা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-এর বেলায় tangent plane থাকলে একটাই থাকে। সেই সব uniqueness-ই আসে এই theorem থেকেই।
আপাততঃ কিছু অংক করে Jacobian-এর সংজ্ঞাটা সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

Example 9: একটা function দিচ্ছি, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ যেখানে $f(x_1, x_2) = (\sin x_1x_2, x_1 + x_2^2, e^{x_1})$. তোমার কাজ হল (x_1, x_2) বিন্দুতে এর Jacobian বার করা।
SOLUTION: যেহেতু $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, তাই Jacobian-টা হবে 3×2 সাইজের একটা matrix. এর (i, j)-th entry-টা পাবে f-এর i-th component-কে x_j দিয়ে differentiate করে। যেমন $(1, 1)$-th entry হবে

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sin x_1x_2 = x_2 \cos x_1x_2.$$

একইভাবে $(2, 1)$-th entry হবে

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2^2) = 1.$$

এরকম ছয়টা partial differentiation করে Jacobian-টা দাঁড়াবে

$$\begin{bmatrix} x_2 \cos x_1x_2 & x_1 \cos x_1x_2 \\ 1 & 2x_2 \\ e^{x_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

■

এবার তোমার করার জন্য একটা অংক দিই।

Exercise 17: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3)$-এর Jacobian বার কর। ■

8.3 Derivative matrix বনাম Jacobian

এখানে একটা ব্যাপারে খট্‌কা লাগতে পারে। আমরা দুটো ভাষা ব্যবহার করেছি, derivative matrix আর Jacobian matrix. এরা কি আসলে একই জিনিসের দুটো নাম? না, তা ঠিক নয়। যদি একটা function কোথাও differentiable হয়, তবে তার derivative matrix অবশ্যই Jacobian-এর সমান হবে, কিন্তু কোথাও Jacobian থাকলেই (মানে $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$-গুলো exist করলেই) function-টা যে সেখানে differentiable হবে, এমন কোনো গ্যারান্টি নেই। ব্যাপারটা অনেকটা দশ ক্লাস পাস করা আর বারো ক্লাস পাশ করার মত। Jacobian হল দশ ক্লাস পাশ, আর derivative matrix হল বারো ক্লাস পাশ।

- যদি বারো ক্লাস পাশ করে থাকে, তো সে দশ ক্লাসও পাশ করে থাকতে বাধ্য। তেমনি derivative matrix-টা exist করলে সেটা Jacobian-এর সমান হতে বাধ্য।
- কিন্তু কেউ দশ ক্লাস পাশ করেছে মানেই বারো ক্লাসও পাশ করেছে এমন নয়। সেইরকম, Jacobian থাকলেও derivative matrix নাও exist করতে পারে।

দ্বিতীয় সম্ভাবনাটা এবার ছবি দিয়ে বুঝব।

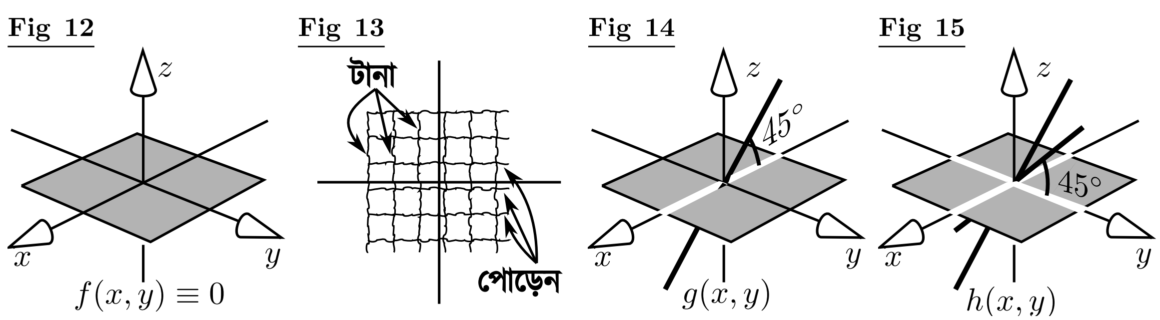
Example 10: ধরো $f(x, y) \equiv 0$. এর গ্রাফটা হচ্ছে xy-plane-টা। এই function-টা নিয়ে আমি একটা দুষ্টুমি করব।

মনে করো যেন f-এর গ্রাফটা একটা রুমালের মত মেঝেতে বিছানো আছে (Fig 12)। রুমাল তৈরী হয় সুতো দিয়ে, একগুচ্ছ সুতো থাকে লম্বালম্বি, আর বাকিরা থাকে আড়াআড়ি (তাঁতীদের ভাষায় "টানা" আর "পোড়েন")। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 13-এ। এবার আমি করব কি, x-axis বরাবর সুতোটাকে ছাড়িয়ে নেব, এবং সেটাকে $45°$ কোণে হেলিয়ে রাখব (Fig 14)। এর ফলে যে নতুন function-টা পাওয়া যাবে, তার ফর্মুলা হবে--

$$g(x, y) = \begin{cases} -x & \text{if } y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

একই কাণ্ড করব y-axis নিয়েও। ফলে ফের একটা নতুন function পাব, যার গ্রাফটা দেখতে হবে Fig 15-এর মত। এটার ফর্মুলা হবে

$$p(x, y) = \begin{cases} -x & \text{if } y = 0 \\ y & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$



লক্ষ করো, $x = 0$ আর $y = 0$ দুটোই একই সঙ্গে হলে এই ফর্মুলার প্রথম আর দ্বিতীয় দুটো লাইনই একসঙ্গে খাটে। কিন্তু তাতে কোনো সমস্যা নেই, কারণ দুজনেই 0 হচ্ছে। এবার তোমায় বলতে হবে $(0,0)$-তে কি Jacobian-টা exist করে? ওই বিন্দুতে $p(x,y)$-টা কি derivative matrix-টা exist করে?

SOLUTION: Jacobian মানে এখানে $\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{array}\right]$. যেহেতু $\frac{\partial p}{\partial x}$ বার করার জন্য খালি x-axis বরাবর $(0,0)$-র দিকে এগোতে পারলেই হল, তাই সেখানে $p(x,0)$ নিয়ে চিন্তা করাই যথেষ্ট। এখানে $p(x,0) = -x$, তাই $\frac{\partial p}{\partial x} = -1$. একইভাবে $\frac{\partial p}{\partial y}$-এর জন্য দরকার খালি $p(0,y) = y$, যেখান থেকে পাচ্ছি $\frac{\partial p}{\partial y} = 1$. সুতরাং Jacobian হল $\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right]$.

এবার অংকের দ্বিতীয় অংশ। পরীক্ষা করে দেখব $(0,0)$-তে $p(x,y)$-এর derivative matrix-টা exist করে কিনা।

লক্ষ করো x আর y দুজনেই $\neq 0$ হলে $p(x,y)$-এর আচরণ কীরকম, সেই প্রশ্নই ওঠেনি এতক্ষণ। কিন্তু $(0,0)$-তে derivative matrix-এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করবার জন্য অবশ্যই তার খোঁজ পড়বে। আমরা জানি যে, derivative matrix যদি থাকে, তবে সেটা অবশ্যই Jacobian-এর সমান হতে বাধ্য, মানে $\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right]$ হতে বধ্য। তার মানে আমাদের দেখতে হবে $(h_1,h_2) \to (0,0)$ হলে

$$\frac{p(h_1,h_2) - p(0,0) - (-1)h_1 - 1\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$$

হচ্ছে কিনা। একটু সুন্দর করে লিখলে হয়

$$\frac{p(h_1,h_2) - p(0,0) - (-1)h_1 - 1\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \begin{cases} \frac{h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{if } h_1 \neq 0 \ \&\ h_2 \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

যদি $h_1 = 2h_2$ লাইন বরাবর $h_1 > 0$ রেখে $(0,0)$-র দিকে এগোও (Fig 16), তবেই দেখবে যে limit-টা হচ্ছে $\frac{1}{\sqrt{5}} \neq 0$. সুতরাং $(0,0)$-তে function-টা differentiable হচ্ছে না, তাই derivative matrix-এর প্রশ্নই ওঠে না। ■

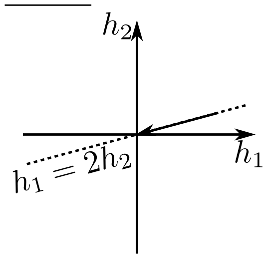
তাহলেই বুঝলে, Jacobian কীরকম কেবল axis বরাবর চলে। Jacobian বার করার সময়ে আমরা $h_1 = 0$ রেখে $h_2 \to 0$ করছি (বা $h_2 = 0$ রেখে $h_1 \to 0$)। তাই Jacobian কেবল সেই দুটো সুতোর অবস্থানই টের পাচ্ছে, বাকি রুমালটার হদিশ ও দিতে পারে না। Jacobian-টুকুর অস্তিত্বমাত্র থেকে তাই কোনো function-এর differentiability নিয়ে (এমন কি continuity নিয়েও) জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না।

Exercise 18: আগের অংকে $p(x,y)$-এর চেহারাটা ছিল এইরকম--

$$p(x,y) = \begin{cases} -x & \text{if } y = 0 \\ y & \text{if } x = 0 \\ ??? & \text{otherwise} \end{cases}.$$

ওই ???-এর জায়গায় যাই নিই না কেন, $\frac{\partial p}{\partial x}$ আর $\frac{\partial p}{\partial y}$ আগের মতই থাকবে। এবার দ্যাখো তো ???-এর জায়গায় এমন কিছু বসাতে পারো কিনা, যাতে $(0,0)$-তে $p(x,y)$-টা continuous না হয়। ■

Fig 16



যখন আমরা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করি, তখন কিন্তু Jacobian আর derivative সমার্থক। সেখানে Jacobian থাকলেই differentiable হয়। তার কারণ $\mathbb{R}$ একটা লাইনের মত, সেখানে "axis-এর বাইরে" কিছু নেই। একই যুক্তিতে যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ নিয়েও কাজ করি, সেখানেও Jacobian থাকাই differentiable হবার পক্ষে যথেষ্ট। যে সমস্যাটা আলোচনা করলাম, সেটা হয় খালি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-এর বেলায়, যখন $n \geq 2$.

DAY 9
Differentiability পরীক্ষা করার বিভিন্ন পদ্ধতি

ধরো তোমাকে কোনো function দিয়ে কোনো একটা বিন্দুতে সেটা differentiable কিনা পরীক্ষা করে দেখতে বলল। কী করে করবে? আজকে আমাদের আলোচ্য বিষয় সেটাই। আমরা এর জন্য তিনটে কায়দা আলোচনা করব।

9.1 Jacobian ব্যবহার করে

প্রথমে আমরা কিছু অংক দেখব যেখানে শুরু করতে হবে Jacobian বার করে। যদি সেটাই না করা যায় (মানে অন্ততঃ একটা partial derivative না exist করে), তবে ল্যাঠা চুকেই গেল, differentiable হবার কোনো আশাই নেই। যদি Jacobian বার করতে অসুবিধা না হয়, তবে সেটাকে derivative matrix-এর জায়গায় বসিয়ে ধরে সংজ্ঞার শর্তটা পরীক্ষা করে দেখতে হয়।

Example 11: যদি $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1^3 - x_2)$ হয়, তবে দেখাও যে f-টা $(0,0)$-তে differentiable.

SOLUTION: প্রথমে Jacobian-টা বার করে নেব। এখানে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, তাই Jacobian-টা হবে 2×2 একটা matrix. আমাদের f-এর দুটো component,

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 \text{ এবং } f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2.$$

এদেরকে partially differentiate করে পাচ্ছি--

$$M = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

সুতরাং $(0,0)$-তে $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করার জন্য দেখাতে হবে যে, $(h_1, h_2) \to (0,0)$ হলে

$$\frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

হচ্ছে, অর্থাৎ দেখাতে হবে

$$\frac{\begin{bmatrix} h_1^2 \\ h_1^3 - h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

হচ্ছে। লক্ষ করো এখানে $f(h_1, h_2)$-কে কেমন খাড়া করে লিখেছি, সংজ্ঞা শর্তটা পরীক্ষা করে দেখার সময়ে সেটাই দস্তুর। এবার একটু কাটাকাটি হবার পর আমাদের দেখাতে হবে যে,

$$\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \begin{bmatrix} h_1^2 \\ h_1^3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

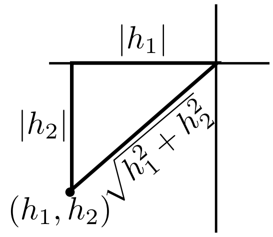


Fig 17

হচ্ছে। এর দুটো component-কে আলাদা করে মধ্যে দুটো limit পাব--

$$\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0 \text{ আর } \frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0.$$

এ দুটোকে কী করে দেখাব রে, বাবা? এইখানে একটু দিশাহারা লাগতে পারে। কিন্তু একটা কৌশল করলে কাজটা তেমন কঠিন নয়। কৌশলটা হল এটা খেয়াল রাখা যে $\sqrt{h_1^2+h_2^2}$ সর্বদা $|h_1|$ আর $|h_2|$-র চেয়ে বড় হয় (Fig 17)। সুতরাং

$$\left|\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \leq \frac{h_1^2}{|h_1|} = |h_1| \to 0.$$

একইভাবে অন্য limit-টাকেও দেখানো যাবে। কৌশলটা মনে রেখো, পরেও কাজে আসবে।
সুতরাং প্রমাণ হল যে $f(x_1,x_2)$ সত্যিই $(0,0)$-তে differentiable. ■

এবার আমরা সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাব যে, একটা function কোনো একটা বিন্দুতে differentiable নয়।

Example 12: এখানে $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ দিলাম এইরকম--

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y, 2x) & \text{if } x \neq 0 \ \& \ y \neq 0 \\ (0,0) & \text{otherwise} \end{cases}$$

দেখাতে হবে যে $(0,0)$-তে এই f-টা differentiable নয়।
SOLUTION: প্রথম কাজ হল Jacobian বার করার চেষ্টা করা। এখানে $f(x,0) \equiv (0,0)$ এবং $f(0,y) \equiv (0,0)$ হওয়ায় চারটে partial derivative-ই 0 হবে। তাই Jacobian-টা হল $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
এবার দেখতে হবে $(h_1,h_2) \to (0,0)$ হলে

$$\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - M\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

হচ্ছে কিনা, অর্থাৎ

$$\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to (0,0)$$

হচ্ছে কিনা। এখানে যেকোনো $(h_1, h_2) \neq (0,0)$-র জন্য

$$\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}(h_1+h_2, 2h_1) & \text{if } h_1 \neq 0 \ \& \ h_2 \neq 0 \\ (0,0) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এটাকে $(0,0)$-তে যেতে হলে আমাদের দরকার এই দুটো limit--

$$\frac{h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$$

আর

$$\frac{2h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0.$$

এর মধ্যে একটাকেও ভুল দেখাতে পারলেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে f-টা differentiable নয়। যদি $h_2 = 0$ নিয়ে $h_1 \to 0$ করি (মানে যদি (h_1, h_2)-টা x-axis বরাবর $(0,0)$-র দিকে এগোয়), তবে দ্বিতীয় limit-টা হয়ে যাবে এই function-টার limit, যখন $h_1 \to 0$:

$$\frac{2h_1}{|h_1|} = \begin{cases} 2 & \text{if } h_1 > 0 \\ -2 & \text{if } h_1 < 0 \end{cases}.$$

এই limit-টা যে exist করে না, সেটা নিশ্চয়ই আর বলে দিতে হবে না? ■

এবার তোমার করার মত কিছু অংক দিই।

Exercise 19: সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে, এই $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-টা $(0,0)$-তে differentiable নয়--

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+2y, x) & \text{if } x \neq 0 \ \& \ y \neq 0 \\ (0,0) & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

Exercise 20: Show that the function $f(x,y) = |xy|^{3/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ is differentiable at $(0,0)$.[5] **(2018.3)**

HINT: এখানে Jacobian হল $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$. খানিকক্ষণ লড়াই করলে দেখবে শেষ পর্যন্ত এই limit-টা দেখাতে হচ্ছে--

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|^{3/2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

■

9.2 স্রেফ চোখে দেখে differentiability পরীক্ষা

কোনো function-কে differentiable দেখানোর এত ঝকমারি দেখে হয়তো multivariate calculus-এর উপরেই তোমার বিরক্তি ধরে যাচ্ছে! পরীক্ষাতে এই ধরণের কসরৎ প্রায়ই করতে হলেও বাস্তবে অবশ্য বহু function-কেই অনেক সহজে চোখে দেখেই differentiable বলে সনাক্ত করা যায়। কারণ এখানেও আমাদের পরিচিত ধর্মগুলো কাজ করে--

- যদি দুটো function (ধরো $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) কোনো বিন্দুতে differentiable হয়, তবে $f+g$ এবং $f-g$-ও সেখানে differentiable হবে (এবং derivative matrix বার করা যাবে f আর g-এর derivative matrix দুটোকে যোগ বা বিয়োগ করে।
- যদি $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ দুজনেই কোনো বিন্দুতে differentiable হয়, তবে fg এবং f/g-ও তাই হবে। খালি f/g-এর বেলায় দেখতে হবে যেন g-টা ওই বিন্দুর কোনো neighbourhood-এ nonzero থাকে।
- যদি $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ এবং $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ হয়, এবং কোনো $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-এ g-টা differentiable হয়, আর $g(\mathbf{a})$-তে f-টা differentiable হয়, তবে $f(g(\mathbf{x}))$-টা $\mathbf{x} = \mathbf{a}$-তে differentiable হবে।

এই ধরণের ধর্ম আমরা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই দেখে আসছি। এবার একই সুরের আরেকটা ধর্মের কথা বলব, যেটা নতুন।

- যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-এর component function-গুলো হয় $f_1, ..., f_m$, তবে "f-এর differentiable হওয়া" আর "প্রতিটা f_i-এর একসঙ্গে differentiable হওয়া" সমার্থক।

এই ধর্ম কয়টা ব্যবহার করে আমরা সহজ সহজ differentiable function-দের জুড়ে জটিল জটিল differentiable function বানাতে পারি। সুতরাং ব্যাপারটা শুরু করার জন্য কিছু সহজ সহজ differentiable function-এর কথা জেনে রাখা ভালো--

- Constant function-রা সবাই differentiable.
- $f(x_1, ..., x_n) = x_i$ জাতীয় function-রা সবাই differentiable.

এই ধর্মগুলো কেমন চোখের নিমেষে প্রয়োগ করা যায়, তার একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 13: $f(x, y, z) = (\sin(x+y), x^2yz, z^2)$ কি একটা differentiable function?

SOLUTION: আমরা শুরু করব এই তিনটে প্রচলিত differentiable function নিয়ে, $g_1(x, y, z) = x$, $g_2(x, y, z) = y$ এবং $g_3(x, y, z) = z$. এদেরকে যোগ আর গুণ করে পাব আরো তিনটে differentiable function, $x+y$, x^2yz এবং z^2. এদিকে $\sin(\cdot)$ হল differentiable, সুতরাং $\sin(x+y)$-ও তাই হবে। অতএব f-এর তিনটে component-ই differentiable হচ্ছে, তাই f-ও differentiable হতে বাধ্য। ■

অনেক সময়েই কোনো function-কে differentiable প্রমাণ করতে অধিকাংশ জায়গাতেই এই সহজ পথেই কাজ হয়ে যায়। সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করতে হয় খালি কিছু কিছু সমস্যাজনক জায়গায়। নীচের অংকটা সেরকম একটা উদাহরণ।

Exercise 21: Verify whether the function

$$f(x, y) = \{|x+y| + (x+y)\}^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

is differentiable everywhere on $\mathbb{R}^2$.[3] **(2016.2b)**

HINT:

শুরুতেই একটা জিনিস লক্ষ করো। যদি $t \in \mathbb{R}$ হয়, তবে $t + |t|$ হবে $2t$ (যদি ≥ 0 হয়), অথবা হবে 0 (যদি $t < 0$ হয়)। এই ব্যাপারটা ব্যবহার করে আমাদের $f(x, y)$-টাকে এইভাবে লেখা যাবে--

> We have
>
> $$f(x, y) = \begin{cases} 4(x+y)^2 & \text{if } x+y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$
>
> Clearly this function is differentiable whenever $x+y \neq 0$.

এইটা বলতে পারলাম কারণ $x+y > 0$ হলে function-টা $4(x+y)^2$, যেটা পরিচিত differentiable function জুড়ে জুড়ে তৈরী। একইভাবে $x+y < 0$ হলে function-টা একটা constant function, তাই differentiable. সংজ্ঞা দিয়ে পরীক্ষা করতে হবে খালি $x+y = 0$-র জন্য। এরকম যেকোনো বিন্দু নিয়ে শুরু করা যাক।

Let $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ be such that $a+b=0$.

প্রথমে Jacobian বার করে নিই, কারণ differentiable হতে হলে ওটাই derivative matrix হবে।

Here $f(x,b)=\begin{cases}4(x+b)^2 & \text{if } x+b\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$.

So, for $x\neq a$,

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\begin{cases}\frac{4(x+b)^2}{x-a} & \text{if } x>a\\ 0 & \text{if } x<a\end{cases}=\begin{cases}4(x-a) & \text{if } x>a\\ 0 & \text{if } x<a\end{cases},$$

Since $b=-a$.

Hence $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=0$.

Since f is symmetric w.r.t. x and y, we also have $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$.

তার মানে Jacobian হচ্ছে $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$. এইটা ব্যবহার করে এবার সংজ্ঞার শর্তটা পরীক্ষা করে দেখব।

Now f is differentiable at (a,b) if and only if

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|(h_1,h_2)\|}=0.$$

Here at (a,b) we have $f=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$. So

$$\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$=\frac{f(a+h_1,b+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\begin{cases}\frac{4(a+h_1+b+h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{if } a+h_1+b+h_2\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

এবার মানে রেখো যে $a+b=0$ ছিল। তাই--

$$=\begin{cases}\frac{4(h_1+h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{if } h_1+h_2\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad[\because a+b=0]$$

So it is enough to check whether, for $h_1+h_2\geq 0$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{4(h_1+h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

এইবার একটু কসরত করতে হবে। আবার সেই $\sqrt{h_1^2+h_2^2}\geq|h_1|,|h_2|$ ধর্মটা কাজে আসবে। খুঁটিনাটিটা তোমার জন্য রেখে

দিলাম। ■

9.3 Jacobian ছাড়াই differentiable দেখানো

কোনো function-কে সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে differentiable দেখানোর জন্য আমরা এ যাবৎ যে কায়দাটা ব্যবহার করছি, তা হল প্রথমে Jacobian বার করে নেওয়া।
কোনো কোনো বিশেষ ক্ষেত্রে Jacobian বার না করেই differentiability দেখানো যায়, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 14: Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, where $n > 1$, $m \geq 1$, be a function. If

$$\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

for $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, then show that f is differentiable at $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Also find the derivative of f at $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Here

$$\|((Z_1, Z_2, ..., Z_m)\| = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_m^2}$$

for $(Z_1, ..., Z_m) \in \mathbb{R}^m$. [3+1] **(2019)**

SOLUTION: প্রথমে একটা জিনিস লক্ষ করো। যে শর্তটা দিয়েছে, তার দৌলতে $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ হতে বাধ্য--

> Here $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
>
> ⟦ Because:
>
> $\because \|f(x_1, ..., x_n)\| \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,
> $\therefore$ putting $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$, we have $\|f(\mathbf{0})\| \leq 0$.
> But $\|f(\mathbf{0})\| \geq 0$.
> Hence $\|f(\mathbf{0})\| = 0$, or $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
>
> ⟧

এবার $\mathbf{0}$-তে differentiable হবার জন্য এমন একটা M পেতে হবে, যাতে $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ হলে

$$\frac{f(\mathbf{h}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \to \mathbf{0}$$

হয়, মানে

$$\frac{\|f(\mathbf{h}) - M\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$$

হয়। এদিকে $\|f(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\|^2$ বলেছে। তার মানে

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(\mathbf{h}) - M\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ \leq\ & \frac{\|f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|M\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \quad [\text{ triangle inequality}] \\ \leq\ & \|\mathbf{h}\| + \frac{\|M\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \quad [\ \because \|f(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\|^2] \end{aligned}$$

এর মধ্যে প্রথমটা তো 0-তে যাচ্ছেই, ওর মধ্যে কোনো M নেই। M আছে দ্বিতীয়টায়, সেখানে যদি $M = O_{m\times n}$ নিয়ে নিই (মানে শূন্য matrix), তবে ওটা নিয়েও আর দুশ্চিন্তা থাকে না। অর্থাৎ $M = O$ নিলে আমাদের কাজ চলে যাচ্ছে। এদিকে আমরা জানি যে derivative matrix একাধিক হতে পারে না, অতএব $M = O$ হতেই বাধ্য।

> To show differentiability we need to show existence of a matrix $M_{m\times n}$ such that
> $$\frac{\|f(\mathbf{h})-M\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}\to\mathbf{0}$$
> as $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$.
> Since we are given $\|f(\mathbf{h})\|\leq\|\mathbf{h}\|^2$, hence
> $$\frac{\|f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}\to\mathbf{0}.$$
> Thus, $M=O_{m\times n}$ will work.
> Hence, by uniqueness of derivative matrix, the required derivative matrix must be $O_{m\times n}$.

■

এই অংকে আমরা M-টা আন্দাজেই বার করে দিতে পারলাম। অধিকাংশ ক্ষেত্রেই তা করা যায় না। সে সব ক্ষেত্রে derivative matrix বার করার প্রথম ধাপ হবে যথারীতি সেই Jacobian matrix বার করা।

DAY 10
Derivative matrix-এর জ্যামিতি (part 1)

যদি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ একটা differentiable function হয়, তবে তার Jacobian হল তার derivative, যেটাকে আমরা ছবি দিয়ে ভাবতে পারি, গ্রাফের slope হিসেবে। যদি $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ হয়, তাহলে derivative matrix-টা হবে একটা 2×2 matrix. সেটাকেও ছবি দিয়ে ভাবার পথ আছে। আজকের আলোচনা তাই নিয়েই।

10.1 চিম্‌সানো নাকি ফুলো?

প্রথমে যে আলোচনাটা করব, সেটা পরে integration-এর সময়ে কাজে লাগবে। ধাপে ধাপে বোঝা যাক।

10.1.1 প্রথম ধাপ--linear transformation -দের ছবি

প্রথমে $f(\mathbf{x})=M\mathbf{x}$ জাতীয় function-দের ছবি কীরকম সেটা বোঝা যাক। যেমন, যদি $M=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ নিই, তবে $f(x,y)=(x+2y,\ \ 3x+4y)$ হবে, কারণ--

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\3x+4y\end{bmatrix}.$$

কিন্তু যদি $f(x,y)=(x^2,xy)$ হয়, তবে $f(\mathbf{x})$-কে কিছুতেই $M\mathbf{x}$ আকারে লেখা যাবে না, কারণ $M\mathbf{x}$-এর মধ্যে কোনোভাবেই x^2 বা xy এসব এসে পড়তে পারে না। এই কথাটা আমরা ফর্মুলা দেখে বললাম। কথা হল ছবি দেখে কি বলতে পারি যে "অমুক function-টা $M\mathbf{x}$ জাতীয়" বা "তমুক function-টা $M\mathbf{x}$ জাতীয় নয়"? আর যদি কোনো function-কে "$M\mathbf{x}$ জাতীয়" বলে চিনতেও পারি, তাও কি ছবি দেখেই M-টাকে বুঝতে পারা যায়? উত্তর হল--হ্যাঁ, যায়। নীচের অংক কয়টা সেটা নিয়েই। প্রথমেই বলে রাখি, আমরা যাকে "$M\mathbf{x}$ জাতীয়" function বলছি, অংকের ভদ্র ভাষায় তাকে বলে **linear transformation**. কোনো $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ দেওয়া থাকলে আমরা ছবি দিয়ে বুঝতে চাইছি সেটা একটা linear

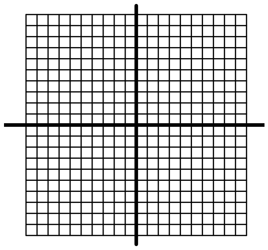


Fig 18

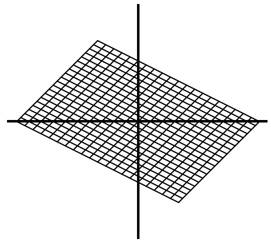


Fig 19

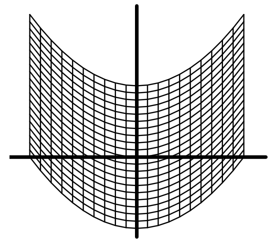


Fig 20

transformation কিনা। প্রথম অধ্যায়ে আমরা শিখেছিলাম কী করে $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$-কে গ্রাফ কাগজের বিকৃতি হিসেবে কল্পনা করা যায়। এবার সেটা কাজে লাগবে।

Example 15: শুরুতে গ্রাফ কাগজটা আছে Fig 18-এর মত। এর উপর এই দুটো function লাগাব--

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1-x_2),\ \text{এবং}\ g(x_1,x_2)=(3x_2,2x_1+x_2^2).$$

ছবিতে দেখিয়েছি Fig 19 আর Fig 20-এ। বলতে পারো এদের মধ্যে প্রধান কী পার্থক্য আছে, যা দিয়ে চোখে দেখেই বলা যায় যে, প্রথমটা linear transformation, কিন্তু দ্বিতীয়টা নয়?

SOLUTION: Fig 19-এর বেলায় সরলরেখারা সরলরেখাই আছে, এবং সমান সমান দূরের parallel লাইনরা সমান সমান দূরে parallel-ই আছে এবং সেই সঙ্গে origin-টা origin-এই আছে (যদিও সেটা ছবি দেখে স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে না)। এই হল linear transformation-দের ট্রেডমার্ক। যদি দ্যাখো Fig 20-এর মত কোনো সরলরেখা বেঁকে গেছে, অমনি বুঝবে linear transformation হওয়ার আশা নেই। ■

10.1.2 দ্বিতীয় ধাপ-- linear transformation-এর matrix বার করা

এবার কোনো linear transformation-এর ছবি দেখে তার matrix-টা চেনার চেষ্টা করব। এক্ষুণি দেখলাম যে linear transformation-এর প্রভাবে গ্রাফ কাগজের square-গুলো কিরকম parallelogram-এ পরিণত হয়। এই parallelogram-এর আকারের মধ্যেই নিহিত থাকে matrix-টার পরিচয়।

Example 16: ধরো আমাদের linear transformation-টা হল $f(\mathbf{x})=M\mathbf{x}$. তাহলে $f(1,0)$ আর $f(0,1)$-এর সঙ্গে M-এর সম্পর্ক কী বলতে পারবে? সেটা ব্যবহার করে Fig 21-এর বেলায় M কী হবে বলো।

SOLUTION: $f(1,0)=M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ হল M-এর প্রথম column. ভালো করে চিন্তা করে বুঝে নাও যে, যেকোনো 2×2 matrix-কেই $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ দিয়ে গুণ করলে তার প্রথম column-টা পাওয়া যায়। একইভাবে $f(0,1)=M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ হল M-এর দ্বিতীয় column. এবার লক্ষ করো $(1,0)$ আর $(0,1)$ ছিল Fig 22-এর মত দুটো তীর চিহ্ন। M দিয়ে গুণ করার পর

Fig 21

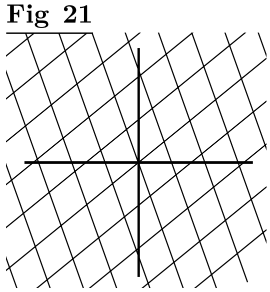
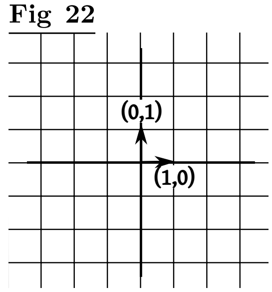


Fig 22



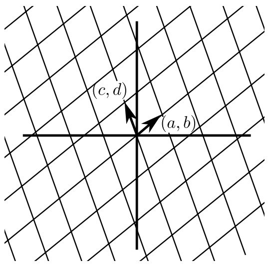


Fig 23

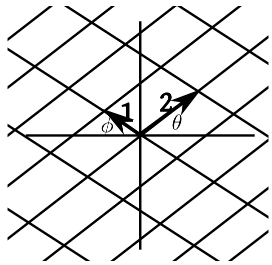


Fig 24

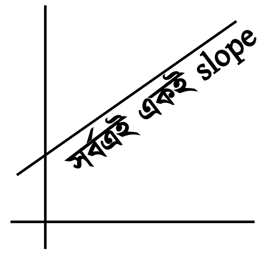


Fig 25

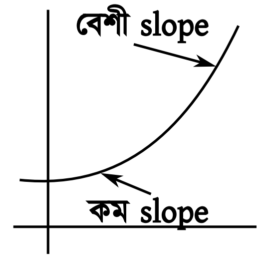


Fig 26

ওরাই হয়েছে Fig 23-এর তীর চিহ্ন দুটো। সুতরাং parallelogram-এর বাহুগুলোই হল M-এর column-গুলো, অর্থাৎ যদি $(1,0)$-টা (a,b)-তে, আর $(0,1)$-টা (c,d)-তে গিয়ে থাকে, তবে

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

■

Exercise 22: যদি ছবিটা হত Fig 24-এর মত, তবে M কী হত? ■

10.1.3 তৃতীয় ধাপ--ছবি থেকে derivative matrix বার করা

এবার আমরা শিখব derivative matrix ব্যাপারটা ছবি দিয়ে দেখতে কীরকম। যখন আমরা linear transformation লাগাই, তখন গ্রাফ কাগজের যাবতীয় square-ই একই রকমের parallelogram-এ পরিণত হয়। কিন্তু যখন কোনো differentiable function লাগাব, তখন বিভিন্ন বিন্দুর কাছাকাছি square-গুলো বিভিন্নরকমের parallelogram-এর মত দেখাতে পারে। কোনো বিন্দুতে parallelogram-এর আকারটা নির্ভর করবে সেই বিন্দুতে derivative matrix-এর উপর। ঠিক যেমন সরলরেখার মত দেখতে গ্রাফের slope সর্বত্রই একই থাকে (Fig 25), কিন্তু কোনো differentiable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-এর গ্রাফের slope বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হতে পারে (Fig 26), এবং সেই slope-টা নির্ভর করে সেখানে function-টার derivative-এর উপরে। একই ব্যাপার হয় $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$-এর বেলাতেও। একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

নীচের উদাহরণটা পড়ার সময়ে একটা ভিডিও মাথায় রাখলে সুবিধা হতে পারে। পাশের QR code-টা তোমার মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করে সেটা দেখতে পাবে। তবে যদি কোনো কারণে QR code-টা কাজ না করে, তবে নীচের URL-টা সরাসরি টাইপ করে Google-এ ঢুকিয়ে দিলেও হবে।
`https://arnabc74.github.io/mult/jac.html`

Example 17: আমরা একটা $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ নিয়ে কাজ করব, যেটাকে গ্রাফ কাগজের বিকৃতির মত করে দেখাতে পাওয়া যায় Fig 27-এর মত। এখানে f-এর কোনো ফর্মুলা দিলাম না, কারণ এই উদাহরণটা পুরোটাই ছবি দিয়ে বোঝার জন্য। ছবিটা বেশ জটিল, ধাপে ধাপে বোঝা যাক। শুরু করেছিলাম একেবারে বাঁদিকের গ্রাফ কাগজটা নিয়ে। তার পর একটা ভূমিকম্প হল, ফলে গ্রাফ কাগজের উপর $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ লাগল, গ্রাফ কাগজটা দুমড়ে মুচড়ে গেল, যেমন ছবিতে দেখিয়েছি।
লক্ষ করো গ্রাফ কাগজের সোজা সোজা লাইনগুলো কেমন বেঁকেচুরে গেছে। এবার ধরো এই বিপর্যয়ের মুহূর্তে গ্রাফ কাগজটাতে দুটো পিঁপড়ে ছিল। ওদের অবস্থান দেখিয়েছি বিন্দু দুটো দিয়ে। ওরা খুব ছোট্টো পিঁপড়ে, পুরো গ্রাফ কাগজটার খবর রাখে না, কেবল ওদের পায়ের কাছের অংশটুকুই ওদের দৃষ্টিগোচর হয়। ওদের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে ব্যাপারটা দেখিয়েছি একেবারে

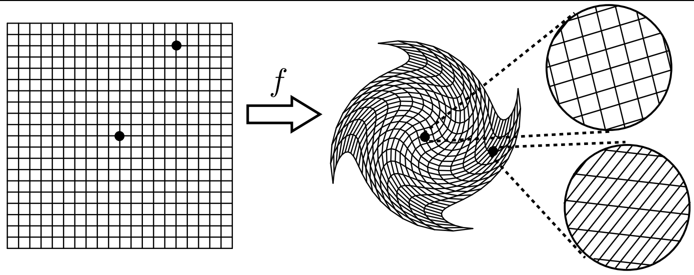


Fig 27

ডানদিকে, গোলের মধ্যে বড় করে। লক্ষ করো, ওদের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখলে কোথাও কোনো বাঁকাচোরা নেই, parallel লাইনরা parallel-ই আছে, একটু হয়তো ঘুরে গেছে, বা একটু হয়তো বেশী বা কম ঘন হয়ে এসেছে, এই যা। অর্থাৎ কিনা ওদের চোখে এই f-টাকে একটা linear transformation বলেই মনে হবে। তবে লক্ষ করো, দুটো পিঁপড়ের বেলায় linear transformation দুটো কিন্তু বিভিন্ন। যদি সত্যিই f-টা <u>একটা</u> linear transformation হত, তবে যেকোনো বিন্দুতেই ওটাকে সেই একই linear transformation বলেই মনে হত। কিন্তু আমাদের f-টা যেহেতু মোটেই linear transformation নয়, তাই বিভিন্ন বিন্দুতে ওটাকে বিভিন্ন linear transformation-এর মত মনে হচ্ছে। ■

প্রতিটা বিন্দুতে square-গুলো যেরকম parallelogram-এ পরিণত হচ্ছে, তার আকার থেকেই ওই বিন্দুতে Jacobian-টা জানা যাবে। ঠিক যেভাবে আগের ধাপে আমরা M বার করেছিলাম।
নীচের অংকটায় তোমাকে এটাই হাতেনাতে করে দেখতে হবে।

Exercise 23: আমরা $f(x,y) = (x^3+y, x-y^3)$ নিয়ে কাজ করব। যদি $x \in [-1.5, 1.5]$ আর $y \in [-1.5, 1.5]$ নিই, তবে গ্রাফ কাগজের সেই অংশটা এই function-এর চোটে দুমড়ে মুচড়ে হয়ে গিয়েছে Fig 28-এর মত। এর উপর চারটে বিন্দু দেখিয়েছি। চোখের আন্দাজে বলতে হবে এদের কোনগুলোর জন্য derivative matrix একই হবে। এবার বলে দিচ্ছি A হল $(1.3, 1.3)$, B হল $(1.3, 0.8)$, C হল $(-1.3, -1.3)$ এবং D হল $(-1.3, -0.8)$. এবার অংক কষে মিলিয়ে দ্যাখো চোখের আন্দাজ ঠিক ছিল কিনা।

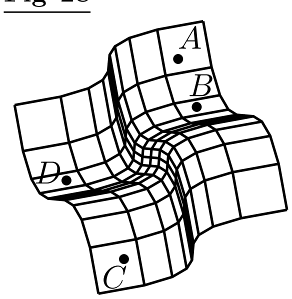
HINT:

চোখের আন্দাজে derivative matrix বোঝার কায়দা হল, সেইখানে গ্রাফ কাগজের বিকৃতির ধরণটা দেখা। মনে রেখো, কোনো একটা বিন্দুর আশেপাশে অল্প একটু অঞ্চল জুড়ে দেখলে বিকৃতিটাকে একটা linear transformation বলে মনে হবে, মানে একটা square নিয়ে শুরু করলে সেটা একটা parallelogram হয়ে যাবে। এই parallelogram-এর চেহারাটাই হল derivative matrix-এর চিত্ররূপ। যদি কোনো দুই জায়গায় এই parallelogram-এর আকার আর আকৃতি একইরকম হয়, অমনি জানবে যে Jacobian দুটোও একইরকম হতে বাধ্য। ■

10.2 Derivative matrix-এর determinant

যদি derivative matrix-টা square হয়, তবে তার determinant-টা অনেক সময়েই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। অনেক বইতে দেখেছি, Jacobian বলতে ওর determinant-টাকেই বোঝায়, যদিও সেটা standard notation নয়।

Fig 28



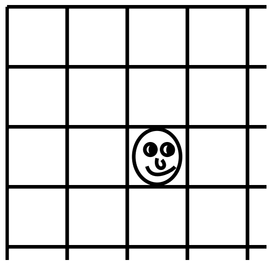


Fig 29

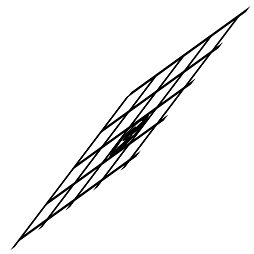


Fig 30

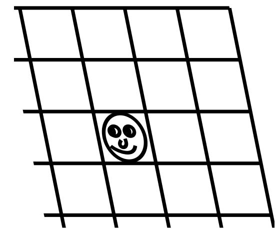


Fig 31

Determinant-টা কেন গুরুত্বপূর্ণ, সেটা ছবি দিয়ে চমৎকার বোঝা যায়। প্রথমে দুটো linear transformation নিয়ে শুরু করি। ধরো $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ এবং $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

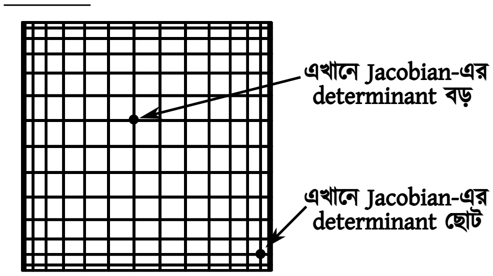
যেহেতু দুজনেই linear transformation, তাই ওদের প্রভাবে গ্রাফ কাগজের প্রতিটা square-ই parallelogram-এ পরিণত হবে। প্রথমটার ক্ষেত্রে অবশ্য parallelogram-টা square-ই হবে (Fig 29), যদিও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে হবে Fig 30-র মত। লক্ষ করো দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কীরকম একটা চিমসে যাওয়া ব্যাপার হয়েছে। এরকম মনে হচ্ছে কারণ square-এর area-র থেকে parallelogram-টার area অনেকটাই ছোটো। এই area-টাই মাপা যায় determinant দিয়ে। এখানে

$$det(A) = 1 \text{ কিন্তু } det(B) = \frac{1}{5}.$$

একইভাবে, যদি determinant-টা > 1 হত, তবে চিম্‌সানোর বদলে ফুলেফেঁপে উঠত। যদি determinant-টা < 0 হত, তার মানে square টালীগুলো শুধু সাইজে বদলেছে তাই নয়, সেইসঙ্গে আবার উল্টেও গেছে (Fig 31)। তবে সাবধান, determinant দিয়ে খালি সংকোচন বা প্রসারণের পরিমাণ এবং উল্টেছে কিনা বোঝা যায়, আকারের পরিবর্তন বোঝা যায় না (যেমন লম্বায় ছোটো হয়েছে, নাকি চওড়ায়)। Linear transformation-দের বেলায় যা খাটে, যেকোনো differentiable function-এর বেলাতেও তাই খাটে, খালি প্রতিটা বিন্দুতে derivative matrix-টা আলাদা হতে পারে, এই যা তফাৎ। যেমন ধরো $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ যদি $f(x,y) = (\cos x, \sin y)$ হয়, তবে ছবিটা হবে Fig 32-র মত।
Jacobian-এর determinant-কে প্রকাশ করার একটা notation আছে, অনেকটা partial derivative-এর মত, সেটা আগে একবার বলেছি। এখানে আরেকবার মনে করিয়ে দিই। ধরো একটা function আছে $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. আমরা জানি এর মধ্যে তিনটে component function আছে, যাদের নাম দেওয়া যাক $u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. অর্থাৎ $f(x,y,z)$ হল $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$. তাহলে Jacobian-টা হবে

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Fig 32



এর determinant-টাকে লোকে অনেক সময়ে লেখে $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

Exercise 24: If $u = \frac{x}{\sqrt{1-r^2}}$, $v = \frac{y}{\sqrt{1-r^2}}$, $w = \frac{z}{\sqrt{1-r^2}}$, where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then show that

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{(1-r^2)^{5/2}}.$$

[5] **(2018.8)**
HINT:
এখানে একটা $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ নিয়ে কথা হচ্ছে, যার তিনটে component হল $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ এবং $w(x,y,z)$. আমাদের কাজ হল f-এর Jacobian-এর determinant বার করা। তার জন্য প্রথমে Jacobian matrix-এর entry-গুলো বার করে নেব। সবগুলো diagonal entry-ই একই প্যাটার্ণের। ধরো $(1,1)$-th entry-টা করে দেখাচ্ছি, মানে $\frac{\partial u}{\partial x}$. এটা হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা differentiation-এর কায়দাতেই বার করা যাবে। সুবিধা হবে যদি $\sqrt{1-r^2}$-কে x-এর সাপেক্ষে partially differentiate করে রাখো--

$$\frac{\partial\sqrt{1-r^2}}{\partial x} = \cdots = -\frac{x}{\sqrt{1-r^2}}.$$

এবার

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-r^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-r^2}}}{1-r^2} = \cdots = \frac{1-y^2-z^2}{(1-r^2)^{3/2}}.$$

একইভাবে বাকি diagonal entry-গুলোও বেরোবে। এবার একটা off-diagonal entry দেখি, ধরো $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cdots = \frac{xy}{(1-r^2)^{3/2}}.$$

এইভাবে প্রতিটা entry-র নীচেই একটা করে $(1-r^2)^{3/2}$ থাকবে। সেগুলোকে 'কমন' নিয়ে নেওয়া যাবে। বাকি অংশটুকু নিয়ে একটু কসরত করলেই উত্তর পেয়ে যাবে। ■

Exercise 25: If

$$u = \frac{x}{(1-r^2)^{1/2}}, v = \frac{y}{(1-r^2)^{1/2}}, w = \frac{z}{(1-r^2)^{1/2}},$$

where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, show that

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = (1-r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

[5] **(2011.23)**
HINT: আগের অংকটারই আরেক রূপভেদ। ■

Exercise 26: If $u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, $v = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, and $w = \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, evaluate $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$. [5] **(2015.6)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

DAY 11
Derivative matrix-এর জ্যামিতি (part 2)

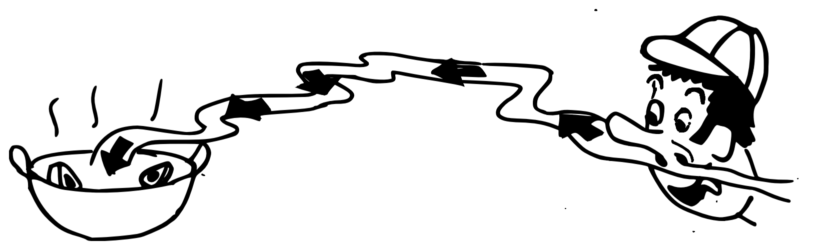
11.1 কোন দিকে বাড়ছে?

আমরা derivative matrix-এর আরেকটা জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য দেখব এবার। ধরো $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-কে differentiate করা হচ্ছে। তবে derivative matrix-টা হবে $m\times n$ সাইজের এবার যে বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করতে চলেছি, সেটা খালি তখনই খাটে যখন $m=1$ আর $n>1$ হয়। এক্ষেত্রে derivative matrix-টা হবে একটা row vector, মানে $1\times n$ সাইজের একটা matrix. এরকম derivative matrix-এর ডাকনাম হল grad (যেটা gradient-এর সংক্ষিপ্ত রূপ)। একে লেখে ∇f. যদি $n=2$ বা 3 হয়, তবে এটাকে একটা তীরচিহ্ন বলে ভাবা যায়, যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 18: ধরো $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ দিলাম $f(x,y)=x^2+xy$. তবে $(1,2)$ আর $(2,1)$ বিন্দুতে ∇f-কে তীর চিহ্ন দিয়ে এঁকে দেখাও।

SOLUTION: এখানে $\nabla f \equiv (\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}) = (2x+y,x)$. সুতরাং $\nabla f(1,2)=(4,1)$, আর $\nabla f(2,1)=(5,2)$ হবে। ছবিটা দেখিয়েছি Fig 33-এ। ■

এই তীর চিহ্নের অভিমুখের দুটো জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য আছে। প্রথম বৈশিষ্ট্য হল f কোন্ দিকে সবচেয়ে তাড়াতাড়ি বাড়ছে সেটা নির্দেশ করা। মনে করো, একটা বাড়িতে গেছ, সেখানে হাওয়ায় ইলিশ মাছ ভাজার গন্ধ পাওয়া যাচ্ছে। খানিকক্ষণ এদিক ওদিক শুঁকেই তুমি টের পেয়ে যাবে গন্ধটা কোন দিক থেকে আসছে, অর্থাৎ গন্ধের তীব্রতা কোন্ দিকে বাড়ছে।



যদি কোনো (x,y,z) বিন্দুতে গন্ধের তীব্রতাকে $f(x,y,z)$ দিয়ে প্রকাশ করি[3], তবে $\nabla f(x,y,z)$ বলে দেবে (x,y,z) বিন্দু থেকে শুরু করে কোন্ দিকে গেলে তুমি ইলিশ মাছের উৎস খুঁজে পাবে! এই কায়দায় অনেক সময়ে কম্পিউটারের সাহায্যে কোনো $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$-এর maximum বার করা যায়। প্রথমে কোনো বিন্দু থেকে শুরু করে সেখানে ∇f বার করা হয়। তারপর সেই দিকে খুব অল্প একটু এগোনো হয়। এর ফলে যে নতুন বিন্দুতে এলে, সেখানে ফের ∇f বার করা হয়, এবং সেই নতুন দিকে ফের একটুখানি এগোনো হয়। এইভাবে বার বার করতে থাকলে অনেক সময়েই f-এর maximum খুঁজে পাওয়া যায়। এই ব্যাপারটা নানা algorithm-এর জন্ম দিয়েছে, যাদের এক কথায় বলে **gradient ascent algorithm.**

[3] মানে যেখানে গন্ধ কম সেখানে $f(x,y,z)$-ও কম, যেখানে গন্ধ বেশী সেখানে $f(x,y,z)$-ও বেশী।

Fig 33

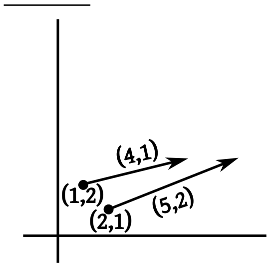
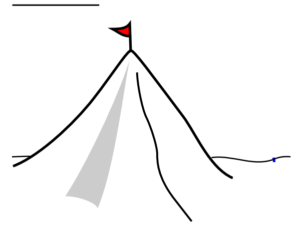


Fig 34



এর বিশদ আলোচনা এই বইয়ের পাল্লার বাইরে, তাই আর কথা বাড়াব না। আজকাল deep learning বলে একটা জিনিসের কথা খুব শোনা যায়। এর মূলেও কিন্তু আছে এই algorithm.

Gradient-এর এই বৈশিষ্ট্যটা নিয়ে একটা ভিডিও বানিয়েছি। ইচ্ছা হলে দেখতে পারো। তার জন্য কী করতে হবে, সে তো জানোই। পাশের QR code-টাকে মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করতে হবে। তাতে একটা link আসবে, সেটাতে ক্লিক করলেই ভিডিওটার কাছে পৌঁছে যাবে। যদি QR code কাজ না করে, তবে সরাসরি নীচের link-টা মোবাইল বা কম্পিউটারে টাইপ করেও ভিডিওটা দেখতে পারো। অবশ্যই কম্পিউটারে ইন্টারনেট থাকতে হবে।
`https://arnabc74.github.io/mult/grad.html`

Exercise 27: Choose the correct option and justify. Let $T(x,y,z) = xy^2 + 2z - x^2z^2$ be the temperature at the point (x,y,z). The unit vector in the direction in which the temperature decreases most rapidly at $(1,0,-1)$ is

(A) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$

[1+1] **(2020.1j)**
HINT: আমরা এক্ষুণি বললাম যে, ∇f বরাবর f-টা সবচেয়ে দ্রুত বাড়ছে। সুতরাং বুঝতেই পারছ যে, f-টা সবচেয়ে দ্রুত কমছে ঠিক তার উল্টো দিকে, মানে $-\nabla f$ বরাবর। সাবধান, এখানে কিন্তু $-\nabla f$ বার করে ছেড়ে দিলেই হবে না, সেই দিক বরাবর unit vector-টা বার করতে হবে। ■

11.2 Contour

Gradient-এর একটা বৈশিষ্ট্য আমরা শিখলাম-- কোন্ দিকে সবচেয়ে বেশী বাড়ছে, সেই দিক নির্দেশ করা। এবার দ্বিতীয় একটা বৈশিষ্ট্য শিখব, এর জন্য **contour** বলে একটা ধারণা জানলে সুবিধা হবে। তোমাদের মধ্যে যারা ট্রেকিং ভালোবাসো, তারা হয়তো contour map-এর কথা শুনে থাকবে, বা এমন কি হয়তো দেখেও থাকবে। ব্যাপারটা হল চ্যাপটা ম্যাপের উপরে ছবি এঁকে পাহাড়পর্বতের চড়াইউৎরাইয়ের ধারণা দেবার একটা চেষ্টা। মনে করো একটা পাহাড় আছে Fig 34-এর মত। আমরা মনে মনে ছুরি দিয়ে কোনো একটা উচ্চতায় সেটাকে horizontally কাটলাম (Fig 35)। এর ফলে একটা যে দাগ বরাবর কাটা হল, সেটাকে বলব ওই উচ্চতায় পাহাড়টার contour, যেটাকে এঁকে দেখিয়েছি ছবিটার নীচে। একটা contour map তৈরী করার জন্য এরকম অনেকগুলো উচ্চতায় ছুরি চালিয়ে পাহাড়টাকে ফালি ফালি করে[4] সেই সব contour-গুলোকে ম্যাপের উপর এঁকে দেওয়া হয় (Fig 36)। প্রতিটা contour-এর গায় যদি উচ্চতাটা লিখে দেওয়া হয়, তবে পুরোটা মিলিয়ে পাহাড়ের চেহারাটার একটা ধারণা করা সম্ভব।

[4] অবশ্যই মনে মনে!

Fig 35

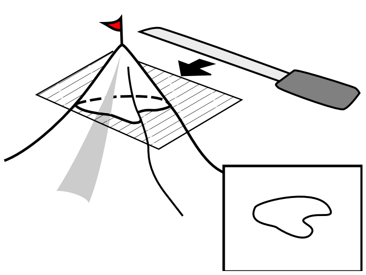
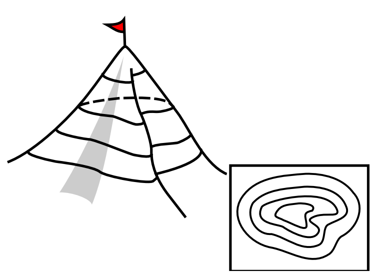


Fig 36



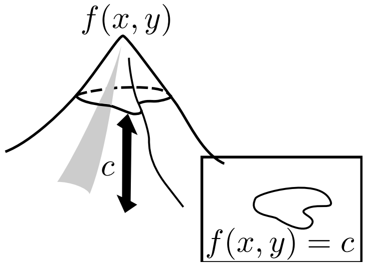


Fig 37

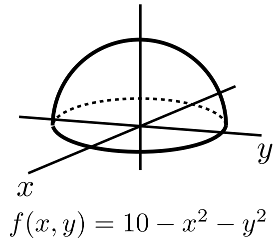


Fig 38

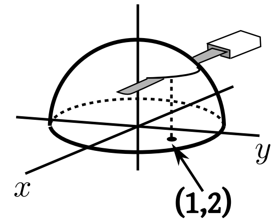


Fig 39

বাস্তবে কাজটা করা বেশ শক্ত। অনেক জরীপ করতে হয় একটা contour map বানাতে। কিন্তু অংকের ভাষায় ব্যাপারটা তত জটিল কিছু নয়, যদি পাহাড়টাকে কোনো একটা $f(x,y)$-এর গ্রাফ বলে ভাবি, আর সেটাকে c উচ্চতায় ছুরি চালিয়ে কাটি, তবে যে contour-টা পাবো, সেটা হল $f(x,y)=c$-এর গ্রাফ। Fig 37 দেখে নাও। অবশ্য সবসময়েই যে contour একটা curve-ই হবে এমন কথা নেই, যেমন যদি ঠিক c উচ্চতায় একটা সমতল মাঠ থাকে, তবে পুরো মাঠটাই contour-এর মধ্যে ঢুকে যাবে। তবে বহু ক্ষেত্রেই contour একটা curve-ই হয়ে থাকে। আমাদের আলোচনায় আমরা সেটাই ধরে নেব। এই গেল contour-এর সংক্ষিপ্ত পরিচয়।

এবার আবার grad-এর প্রসঙ্গে ফিরে আসি। আমরা grad-এর যে জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্যটার কথা বলতে চাইছি সেটা হল এই যে, কোনো বিন্দুতে ∇f সবসময়ে সেই বিন্দুগামী contour-এর সঙ্গে perpendicular হবে, এবং এর মুখ হবে পাহাড়টা যেদিকে উঠছে সেই দিকে। নীচের অংকে সেটা তুমি নিজেই কষে দেখতে পারবে।

Example 19: ধরো $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ হল $f(x,y)=10-x^2-y^2$. এর গ্রাফটা ঠিক একটা ওল্টানো বাটির মত (Fig 38)। বাটির নীচে এই বিন্দুটা নাও, $(1,2)$. এই বিন্দু দিয়ে যে contour-টা যায়, তার equation বার করো। এবার ওই বিন্দুতে gradient-টা বার করে দ্যাখো সত্যিই সেটা contour-এর সাথে perpendicular হচ্ছে কিনা।

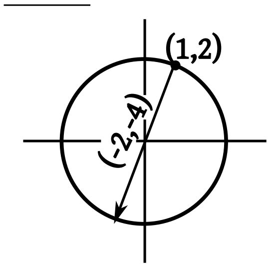
SOLUTION: ওই বিন্দুতে গ্রাফের উচ্চতা হল $f(1,2)=10-1^2-2^2=5$. সুতরাং contour-এর equation-টা হবে $f(x,y)=5$, অর্থাৎ

$$x^2+y^2=5,$$

যেটা একটা circle. ব্যাপারটা বুঝবে Fig 39 দেখলেই। এদিকে $\nabla f(x,y)=(-2x,-2y)$. সুতরাং $(1,2)$ বিন্দুতে $\nabla f(1,2)=(-2,-4)$. Contour আর gradient দুটোই দেখিয়েছি Fig 40-এ। দেখাই যাচ্ছে যে, তীর চিহ্ন হিসেবে ভাবলে gradient-টা circle-টার centre দিয়ে যাচ্ছে, মানে একটা radius বরাবর রয়েছে। যেহেতু radius সর্বদা একটা circle-এর সঙ্গে perpendicular থাকে, তাই এখানে আর কোনো অংক না করেই বলেই দেওয়া যাচ্ছে যে, gradient-টা contour-এর সঙ্গে perpendicular আছে। ■

Exercise 28: এই function-টা দিলাম, $f(x,y)=e^{xy}+\sin(x+y)$. যদি $x=0$ আর $y=\frac{\pi}{2}$ বসাই, তবে $f(x,y)=2$ পাবে। অর্থাৎ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুটা আছে $e^{xy}+\sin(x+y)=2$ এই curve-এর উপরে। এই বিন্দুতে এই curve-এর উপরে tangent বরাবর একটা vector দাও।

Fig 40



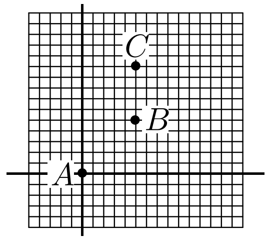


Fig 41

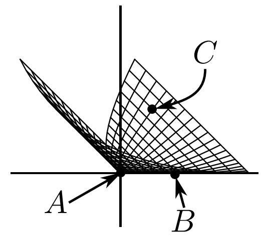


Fig 42

HINT:
প্রথমে normal বার করো। তারপর সেটাকে 90°-তে ঘুরিয়ে দাও। 90° ঘোরানোর কায়দাটা এইরকম--যদি (u, v) কোনো vector হয়, তবে $(-v, u)$ থাকবে তার সঙ্গে 90°-তে। ■

11.3 Derivative matrix-এর rank

Derivative matrix-এর rank অনেক জায়গাতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এ বইতে অবশ্য সেটা খুব একটা কাজে আসবে না, তাও একটু ধারণা থাকা ভালো। আমরা ব্যাপারটা বোঝাব $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ দিয়ে।

Example 20: এই function-টা দিলাম--

$$f(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2,\ x^2 - 2xy + y^2).$$

যদি $[-1, 3] \times [-1, 3]$-এর উপরে এটাকে প্রয়োগ করি, তবে Fig 41-এর গ্রাফ কাগজটা দুমড়ে হয়ে যাবে Fig 42-এর মত। বিভিন্ন জায়গায় কাগজটা বিভিন্নরকম দুমড়েছে। যেসব জায়গায় চিমসে একেবারে একটা লাইন (বা curve) হয়ে গেছে, সেরকম জায়গায় derivative matrix-এর rank হবে 1. যেখানে চিমসে একেবারে একটা বিন্দু হয়ে গেছে, সেখানে rank হবে 0. আর বাকি সব জায়গায় rank হবে 2. আমরা তিনটে বিন্দু দেখিয়েছি, A, B আর C. দোমড়ানোর আগে এরা ছিল যথাক্রমে $(0, 0)$, $(1, 1)$ এবং $(1, 2)$-তে। এই বিন্দুগুলোতে derivative matrix-এর rank আন্দাজ করো Fig 42 দেখে। তারপর derivative matrix বার করে মিলিয়ে দ্যাখো।

SOLUTION: ছবি দেখে মনে হচ্ছে C-তে rank=2, কারণ ওখানে কোনো চিমসানো চোখে পড়ছে না। B-তে চিমসে লাইন হয়ে গেছে, তাই rank=1. ভালো করে দেখলে A-তে একটা ব্ল্যাক হোল আছে বলে মনে হচ্ছে, সবকিছুকে চুষে একটা বিন্দুতে টেনে নিচ্ছে যেন। তাই ওখানে rank=0.
এবার derivative matrix-টা বার করি, মানে Jacobian-টা--

$$2\begin{bmatrix} x+y & x-y \\ x-y & y-x \end{bmatrix}.$$

A-তে এটা $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, তাই rank=0. আবার B-তে এটা $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, যার rank=1. যদি C-তে বার করো, তবে পাবে $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, যার rank=2. ■

এবারে একটা অন্যরকম অংক দেব, যেখানেও matrix-এর rank-এর প্রসঙ্গ আছে। অংকটা বোঝার জন্য খানিকটা linear algebra জানলে সুবিধা হবে। সেটুকু মনে করিয়ে দিই--

- ধরো একটা function দিলাম

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx.$$

এর প্রতিটা term-এই x, y, z-এর ঠিক দুজন উপস্থিত, হয় দুটো x, বা দুটো y বা একটা x, একটা y, এইরকম। এই জাতীয় function-দের বলে **quadratic form**. এদেরকে matrix দিয়ে লেখার একটা কায়দা আছে--

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- যদি এরকম একটা function দিতাম--

$$g(x,y,z) = px + qy + rz,$$

তবে প্রতিটা term-এই x, y, z-এর ঠিক একজন উপস্থিত। এরকম function-কে বলে **linear function**. এটাকেও matrix দিয়ে লেখা যায়--

$$g(x,y,z) = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

ভালো করে বুঝে নাও যে, এই দুটোই আসলে একই জিনিস। যদি $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ এবং $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ নিই, তবে $g(x,y,z) = \mathbf{v}'\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{v}$ লেখা যায়।

- Matrix-দের গুণ করলে rank কখনো বাড়তে পারে না। মানে $C = AB$ হলে, $rank(C) \le rank(A)$ এবং $rank(C) \le rank(B)$ হতে বাধ্য।

- ধরো $A_{n\times n}$ কোনো একটা matrix. তবে

  $rank(A) \le 1$ if and only if $A = \mathbf{v}\mathbf{w}'$ for two $n \times 1$ vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$.

  এইটার প্রমাণ অতি সহজ। যেহেতু $\mathbf{v}$ আর $\mathbf{w}$ দুজনেই $n \times 1$ সাইজের, তাই ওদের $rank$ অবশ্যই ≤ 1. ওদের গুণ করে পাওয়া $A = \mathbf{v}\mathbf{w}'$-এর rank আর তার চেয়ে বেশী হয় কী করে? বিপরীতপক্ষে, যদি $rank(A) \le 1$ হয়, তার মানে A-র প্রতিটা column-ই কোনো একটা vector-এরই multiple, যেমন $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে এর প্রতিটা column-ই $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$-এর multiple. আমরা এই vector-টাকেই নেব $\mathbf{v}$, মানে এই উদাহরণে $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, আর একে কী কী দিয়ে গুণ করে বিভিন্ন column পাওয়া গেছে, তাদের দিয়ে বানাব $\mathbf{w}$, মানে এখানে $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. সুতরাং

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}\mathbf{w}'$$

  হতে বাধ্য।

এবার আমরা সেই অংকটা করার জন্য প্রস্তুত।

Example 21: Using Jacobian find the condition under which the expression

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx$$

can be expressed as a product of two linear factors.[5] **(2016, 2007)**

SOLUTION: এখানে একটা quadratic form দিয়ে জানতে চেয়েছে, সেটাকে কখন দুটো linear function-এর গুণফল হিসেবে লেখা যাবে। সুতরাং linear function-দের গুণফল দেখতে কীরকম হয়, সে বিষয়ে একটু ধারণা থাকলে সুবিধা হবে। ধরো দুটো linear function নিলাম, $\mathbf{v}'\mathbf{x}$ এবং $\mathbf{w}'\mathbf{x}$. এদেরকে গুণ করে দিলে হয়--

$$(\mathbf{v}'\mathbf{x})(\mathbf{w}'\mathbf{x}) = (\mathbf{x}'\mathbf{v})(\mathbf{w}'\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(\mathbf{v}\mathbf{w}')\mathbf{x} = \mathbf{x}'A\mathbf{x},$$

যেখানে $A = \mathbf{v}\mathbf{w}'$. এটা একটা quadratic form. কিন্তু যেকোনো quadratic form নয়, একটা বিশেষ ধরণের quadratic form, যার matrix-টাকে $A = \mathbf{v}\mathbf{w}'$ আকারে লেখা যাবে। আমরা আগেই বলেছি যে, এর মানে হল $rank(A) \leq 1$.
এবার আমাদের অংকে যে quadratic form-টা দিয়েছে সেটা হল

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

এর matrix-টাকে যদি A বলি, মানে

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix},$$

তবে প্রয়োজনীয় শর্তটা হবে $rank(A) \leq 1$. সমস্যা হল শর্তটা তো A-কে দিয়ে বলতে বলে নি, Jacobian দিয়ে দিতে বলেছে। সুতরাং কোনোভাবে A-কে Jacobian দিয়ে প্রকাশ করতে হবে। তার জন্য প্রথমে লক্ষ করো যে, Jacobian-টা হল $2(x, y, z)A$. (কষে দ্যাখো!)। সুতরাং শর্তটা আমরা এইভাবে লিখতে পারি--

> The given function is the product of two linear factors if and only if $rank(A) \leq 1$, where the Jacobian is $2(x, y, z)A$.

■

DAY 12
Chain rule

12.1 কী জিনিস?

একটা function-এর পেটে আরেকটা function ঢোকানোকে বলে **function composition**. যেমন $f(x) = x^2$-কে যদি $g(x) = \sin x$-এর পেটে ঢোকাই, তবে পাব $g \circ f$, যেখানে

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = \sin x^2.$$

যদি উল্টোটা করতাম, মানে $g(x)$-কে $f(x)$-এর পেটে ঢোকাতাম, তবে পেতাম

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = \sin^2 x.$$

এরকম function-কে differentiate করার কায়দা হল **chain rule**. সেটা আমরা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই জানি। কায়দাটা ছিল এইরকম--যদি $h = g \circ f$ হয়, তবে

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

যেমন আমাদের উদাহরণে--

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2) \times 2x.$$

সব কিছু গুছিয়ে লিখলে--

> যদি f আর g দুজনেই এমন হয় যাতে $h = g \circ f$ তৈরী করা সম্ভব[5], এবং যদি কোনো $a \in \mathbb{R}$-এ f-টা differentiable হয়, আর $f(a)$-তে g-টা differentiable হয়, তবে a বিন্দুতে $f \circ g$-ও differentiable হতে বাধ্য, এবং $(f \circ g)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ হবে।

ঠিক একইরকম কাজ করা যায় multivariate differentiation-এর বেলাতেও। ব্যাপারটা ধাপে ধাপে বোঝা যাক। প্রথমে দেখি multivariate ক্ষেত্রে function composition কীভাবে হয়।

Example 22: ধরো $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ আর $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ হল এইরকম--

$$f(x, y) = (2xy,\, x^2 - y^2,\, (x + y)^2) \text{ আর } g(t) = (\cos t,\, \sin t).$$

তবে $f \circ g$ কী হবে?

SOLUTION: মনে রেখো $f \circ g$ মানে f-এর পেটে g-কে ঢোকানো। সেটা এখানে করা যাবে, কারণ g-র codomain হল $\mathbb{R}^2$, আর f-এর domain-ও তাই। সুতরাং $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, যেখানে

$$(f \circ g)(t) \equiv f(g(t)) = (2\cos t \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t, (\cos t + \sin t)^2).$$

■

এবার দেখি এরকম multivariate function-কে differentiate করার জন্য chain rule কী বলে। মনে রেখো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ হলে কোনো $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-এ $f'(\mathbf{a})$ হল একটা $m \times n$ সাইজের matrix. তাই multivariate chain rule-এ matrix-এর গুণ লাগবে। যদি আগের অংকটায় f, g আর $f \circ g$-এর derivative বার করি তবে পাব--

$$\begin{aligned}
f'(x, y) &= \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix} \\
g'(t) &= \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \\
(f \circ g)'(t) &= \begin{bmatrix} 2\cos^2 t - 2\sin^2 t \\ -4\sin t \cos t \\ 2(\cos t + \sin t)(-\sin t + \cos t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

কষে দেখে নাও ঠিক লিখলাম কিনা। Multivariate chain rule বলে যে, এই তিনটে matrix-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক আছে--

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \times g'(t). \qquad (*)$$

পরীক্ষা করে দেখা যাক। এখানে তিনটে matrix আছে। এদের মধ্যে $(f \circ g)'(t)$ আর $g'(t)$ তো দিলামই। অন্যটাকে পাবে f'-এর পেটে $g(t)$ ঢোকালে--

$$f'(g(t)) = 2\begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \\ \cos t + \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

[5] সবার পেটে সবাইকে তো আর ঢোকানো যায় না, যেমন log-এর পেটে $-x^2$ ঢোকাতে গেলে বিপত্তি, কারণ negative সংখ্যার log নেওয়া যায় না।

Exercise 29: হাতেকলমে matrix-এর গুণ করে দ্যাখো (*) হচ্ছে কিনা। ■

এইটাই হল chain rule. গুছিয়ে লিখলে হয়--

Chain rule

Let $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ and $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ be two functions. Let g be differentiable at $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^p$ and let f be differentiable at $g(\mathbf{a})\in\mathbb{R}^n$. Then $f\circ g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ must be differentiable at $\mathbf{a}$ and

$$(f\circ g)'(\mathbf{a})_{m\times p}=f'(g(\mathbf{a}))_{m\times n}g'(\mathbf{a})_{n\times p}.$$

এবার এটা ব্যবহার করে একটা অংক করি।

Example 23: ধরো $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ হল $h(t)=f(t^2,t^3)$, যেখানে $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ হল একটা differentiable function. তবে $h'(t)=?$

SOLUTION: যদি $g(t)=(t^2,\ t^3)$ নিই, তবে $h=f\circ g$ হচ্ছে। এখানে

$$\begin{aligned} g'(t) &= \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}, \\ f'(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

সুতরাং

$$(f\circ g)'(t)=f'(g(t))g'(t)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) & \frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}=2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)+3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3).$$

■

Exercise 30: দেখাও যে

$$\frac{d}{dt}f(a_1+u_1t,a_2+u_2t)=u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+u_1t,a_2+u_2t)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a_1+u_1t,a_2+u_2t).$$

■

Exercise 31: Chain rule ব্যবহার করে নীচের প্রতিক্ষেত্রে $f\circ g$-এর derivative বার করো। তারপর সরাসরি $f\circ g$ বার করে differentiate করে দ্যাখো একই উত্তর এল কিনা।

1. $f(x,y,z)=e^{xy+yz}$, $g(t)=(t,\ t^2\ t^3)$.
2. $f(x)=(x,\ x^2,\ x^3)$ $g(x,y,z)=x^2+z^2$ (লক্ষ করো y ব্যবহার করা হয়নি)।
3. $f(x,y)=(2x-3y,\ 3x-2y)$, $g(x,y)=(x+y,\ x-y)$.

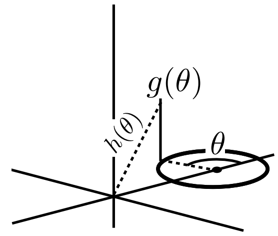


Fig 43

4. $f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,\ g(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$

■

Exercise 32: একটা 1 মিটার উঁচু vertical ডাণ্ডার নীচের প্রান্ত $(x-2)^2 + y^2 = 1$ circle বরাবর ঘুরছে। তাহলে ডাণ্ডার উপরের প্রান্ত origin থেকে কত দূরে থাকবে, সেটা নিয়ে মাথা ঘামাতে চাইছি (Fig 43)। ডাণ্ডাটার অবস্থান আমরা θ দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। ধরো ডাণ্ডাটার উপরের প্রান্তের অবস্থান হল $g(\theta)$, যেখানে $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. ধরো $f(x,y,z)$ হল origin থেকে কোনো (x,y,z)-এর দূরত্ব। তবে chain rule লাগিয়ে $h'(\theta)$ বার করো, যেখানে $h(\theta)$ হল origin থেকে ডাণ্ডার উপরের প্রান্তের দূরত্ব। ■

12.2 Total Derivative

আমরা এতদিন partial derivative-এর কথা শিখেছি। এবার শিখব **total derivative** বলে আরেকটা জিনিসের কথা। একটা উদাহরণ দিয়ে বলি।
ধরো $f(x,y)$ একটা function. আমরা এরকম ক্ষেত্রে x আর y-কে দুটো আলাদা variable বলে ভাবতে অভ্যস্ত। কিন্তু অনেক সময়ে y-এর জায়গায় আলাদা variable না বসিয়ে লোকে x-এরই কোনো একটা function বসায়। ফলে পুরো $f(x,y)$-টাই হয়ে যায় কেবলমাত্র x-র একটা function. এরকম ক্ষেত্রে এই function-টাকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করে যেটা পাওয়া যায়, তাকেই বলে x-এর সাপেক্ষে **total derivative**. একটা উদাহরণ দেখলে সুবিধা হবে।

Example 24: ধরো $f(x,y) = x^2 - y$. এর মধ্যে $y = \sin x$ বসিয়ে x-এর সাপেক্ষে total derivative বার করো।

SOLUTION: এখানে $f(x, \sin x) = x^2 - \sin x$, যাকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করলে হয় $2x - \cos x$. ■

কাজটা in general লেখা যাক। আমরা শুরু করেছিলাম একটা $f(x,y)$ নিয়ে, তার মধ্যে y-এর জায়গায় x-এরই কোনো একটা function বসালাম, ধরো $y(x)$ (আমাদের উদাহরণে $y(x) = \sin x$ ছিল)। ফলে পেলাম $h(x) = f(x, y(x))$. আমরা চাইছি $h'(x)$ বার করতে। এর জন্য $h(x)$-কে দুটো function-এর composition বলে ভাবো--প্রথম function-টা হল $g(x) = (x, y(x))$ আর দ্বিতীয় function-টা হল $f(x,y)$. তাহলে $h = f \circ g$. এবার chain rule লাগাব।
তার জন্য derivative matrix দুটো বার করে নিতে হবে।

$$g'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ dy/dx \end{bmatrix} \text{ এবং } f'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

এদের ব্যবহার করে chain rule লাগালে পাবে--

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ dy/dx \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

এটাই x-এর সাপেক্ষে $f(x, y)$-এর total derivative-এর ফর্মুলা।

Exercise 33: আগের অংকে $f(x, y) = x^2 - y$ এবং $y(x) = \sin x$ নিয়ে কাজ করেছিলাম। এখানেও তাই নিয়ে total derivative-এর ফর্মুলাটা সরাসরি লাগিয়ে দ্যাখো একই উত্তর আসছে কিনা। ■

আমরা এতক্ষণ y-এর জায়গায় x-এর function বসাচ্ছিলাম। চাইলে উল্টোটাও করা যেত, মানে x-এর জায়গায় y-এর function বসানো। সেক্ষেত্রে পেতাম y-এর সাপেক্ষে total derivative.
এখানে খালি দুটো variable নিয়ে কাজ হচ্ছিল। তিনটে থাকলেও একইরকম পথে এগোনো যেত। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Exercise 34: একটা differentiable function দেওয়া আছে $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. তোমাকে $f(x, y, z)$-এর total derivative বার করতে হবে। একবার x-এর সাপেক্ষে, তারপর y-এর সাপেক্ষে, এবং সবশেষে z-এর সাপেক্ষে। যখন যার সাপেক্ষে করছ, তখন ধরে নেবে যে বাকী variable-গুলো সেটার differentiable function. তোমার উত্তরটা হবে f-এর বিভিন্ন partial derivative এবং $\frac{dy}{dx}$ ইত্যাদি ব্যবহার করে। মনে রেখো যে $\frac{dy}{dx}$ কিন্তু x-এর সাপেক্ষে y-এর *total* derivative.
■

Exercise 35: ধরো $f(x_1, ..., x_n)$ দেওয়া আছে। এটার total derivative বার করো x_i-এর সাপেক্ষে। ■

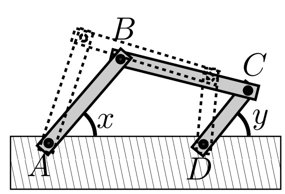
12.3 Implicit differentiation

যদি তোমাকে কোনো function-এর derivative বার করতে বলি, তবে তুমি নিশ্চয়ই সেই function-এর ফর্মুলাটা আগে জানতে চাইবে। যদি বলি "ফর্মুলা তো জানা নেই", তবে তুমিও হাল ছেড়ে বলবে--"তবে আর differentiate করবটা কাকে?" আশ্চর্যের কথা এই যে, ইঞ্জিনিয়ারিংএ হামেশাই এমন সব function আসে, যেগুলোর কোনো ফর্মুলা লেখাই দুষ্কর। কিন্তু তাও লোকে পট্‌পট্‌ করে তাদের derivative বার করে দেয়! এই অসাধ্যসাধনের প্রধান হাতিয়ার হল chain rule. একটা উদাহরণ দিলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 25: অনেকরকম কাঠামোই বেশ কিছু ডাণ্ডা পরপর জুড়ে জুড়ে তৈরী করা হয়। তার একটা উদাহরণ যেমন

হাওড়া ব্রীজ, তেমনি আরেকটা উদাহরণ হল সাইকেলের ফ্রেম। এদের আকার মোটামুটি স্থির থাকে। কোনো কোনো ক্ষেত্রে ডাণ্ডাগুলো পরস্পরের সঙ্গে ঢিলে নাটবল্টু বা কব্জা দিয়ে জোড়া থাকে, ফলে নাড়াচাড়া করা যায়। এর সহজতম উদাহরণ হল জ্যামিতিবাক্সের কম্পাস। আরেকটু জটিল উদাহরণ হল ফোল্ডিং ছাতার ভিতরের ডাণ্ডাগুলো । আরো জটিল উদাহরণ হল রেলের চাকা ঘোরানোর যন্ত্রপাতি বা রেলের লাইন সরানোর হ্যাণ্ডেল। আমাদের উদাহরণে আমরা Fig 44-এর মত একটা জিনিস নেব। এটা তিনটে লোহার ডাণ্ডা জুড়ে তৈরী। নাটবল্টুগুলো ঢিলে, তাই ডাণ্ডাগুলোকে নাড়াচাড়া করা যায়। কোনো একটা ডাণ্ডা নাড়ালে বাকীগুলোও তালে তালে নড়তে বাধ্য। একটু নড়ার পর অবস্থানটা দেখিয়েছি ড্যাশ্‌ ড্যাশ্‌ দিয়ে। মনে মনে খানিকক্ষণ ভাবলেই বুঝবে যে x-এর কোনো value ঠিক করে দিলে y-এর value-ও নির্ধারিত হয়ে যাবে। সুতরাং y হল x-এর একটা function, মানে $y = f(x)$. তোমার কাজ হল $\frac{dy}{dx}$ বার করা।

Fig 44



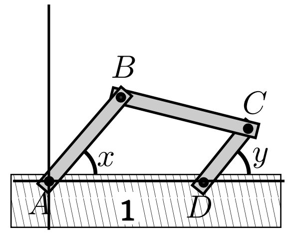


Fig 45

SOLUTION: যদি তুমি আগে $f(x)$-এর ফর্মুলা বার করার চেষ্টা কর, তবে দেখবে কাজটা অতিশয় শক্ত। কিন্তু $f(x)$ না জেনেই কীরকম $\frac{dy}{dx}$ বার করে দেব দ্যাখো! প্রথমে একটা coordinate system নেব (Fig 45)। যা খুশি নিলেই হল, কিন্তু সুবিধার জন্য A বিন্দুতে origin আর AD বরাবর x-axis নিলাম। আর AD-র দৈর্ঘ্যটাকেই একক দৈর্ঘ্য ধরলাম। সেই এককে মাপলে AB, BC আর CD-র দৈর্ঘ্যকে নাম দেওয়া যাক যথাক্রমে L_{AB}, L_{BC} এবং L_{CD}. তবে B বিন্দুর অবস্থান হল $(L_{AB}\cos x, L_{AB}\sin x)$. একইভাবে C বিন্দুর অবস্থান হবে $(1+L_{CD}\cos y, L_{CD}\sin y)$. এই দুটো বিন্দু BC ডাণ্ডাটার দুই প্রান্তে রয়েছে। তাই ওদের মধ্যেকার দূরত্ব L_{BC} হতে বাধ্য! অতএব--

$$\underbrace{(L_{AB}\cos x - 1 - L_{CD}\cos y)^2 + (L_{AB}\sin x - L_{CD}\sin y)^2}_{G(x,y)} = L_{BC}^2.$$

এটাকে খানিকটা সহজ করা যাবে, কিন্তু তা থেকে y-কে x-এর function হিসেবে লেখার সুবিধা হবে না। কিন্তু আমরা এখানে সে চেষ্টাই করব না। আমরা বাঁদিকের জিনিসটাকে $G(x,y)$ নাম দিয়েছি। আমরা জানি যে $y=f(x)$ (যদিও $f(x)$-এর কোনো ফর্মুলা আমাদের জানা নেই)। অতএব লিখতে পারি $G(x,f(x)) = L_{BC}^2$. এটা সব x-এর জন্যই খাটে। সুতরাং x-এর সাপেক্ষে দুপাশের total derivative বার করলে পাব--

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

এখানেই আমরা chain rule ব্যবহার করলাম। এ থেকে চট্ করে পেয়ে যাবে--

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}\Big/\frac{\partial G}{\partial y}.$$

অবশ্য এখানে নীচের ওই $\frac{\partial G}{\partial y}$-টাকে nonzero হতে হবে। এদিকে আমরা $G(x,y)$ তো জানিই। তা থেকে পেয়ে যাবে--

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= \cdots = 2\sin x + 2L_{CD}\sin(x-y),\\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \cdots = -2\sin y - 2L_{AB}\sin(x-y).\end{aligned}$$

সুতরাং

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}\Big/\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\sin x + L_{CD}\sin(x-y)}{\sin y + L_{AB}\sin(x-y)}.$$

পুরো ম্যাজিক, function-টাই জানি না, অথচ দিব্যি কেমন তার derivative বার করে দিলাম! ■

এই কায়দাটাকে বলে **implicit differentiation**. এর জন্য এই অংকে x আর y দুটো variable লাগল, যাদের মধ্যে y-টা ছিল x-এর function. যদিও তার কোনো সহজ ফর্মুলা আমাদের জানা ছিল না। কিন্তু x আর y-এর মধ্যে একটা

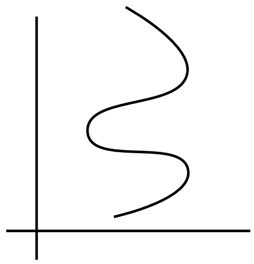


Fig 46

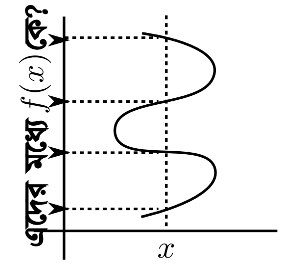


Fig 47



Fig 48

সহজ সম্পর্ক জানা ছিল, যেটাকে $G(x,y)=c$ আকারে লেখা যায়। অমনি আমরা implicit differentiation ব্যবহার করে $\frac{dy}{dx}$ বার করে দিতে পারলাম, এইভাবে--

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x} \Big/ \frac{\partial G}{\partial y}.$$

এখানে দুটো জিনিস নিয়ে সমস্যা বাঁধতে পারে--

- এক, কী করে বুঝব যে y-টা x-এর function.
- দুই, যদি $\frac{\partial G}{\partial y}=0$ হয়ে যায়, তবে?

এ দুয়েরই উত্তর একই জায়গা থেকে আসে। সেটা বোঝার জন্য প্রথমে একটা জিনিস একটু মনে করিয়ে দিই। ধরো তোমাকে Fig 46-এর মত একটা গ্রাফ দিয়ে বললাম, এমন একটা $f(x)$ দিতে যাতে $y=f(x)$-এর গ্রাফটা এরকম দেখতে হয়। তুমি কি তবে মাথা চুলকে ভাবতে বসবে? নাকি দেখামাত্র বলে উঠবে যে, এমন কোনো $f(x)$ হতেই পারে না? আসলে একই vertical লাইন গ্রাফটাকে একাধিকবার ছেদ করেছে (Fig 47)। তাই এরকম কোনো function থাকতেই পারে না। এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা পড়ো। এই ধরণের অংক আকছারই বিভিন্ন পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে দেখা যায়, এবং ছাত্ররাও এরকম অংক দেখামাত্রই তড়বড় করে কিছুমাত্র চিন্তা না করেই implicit differentiation লাগাতে শুরু করে।

Example 26: বলা আছে $x^2+y^2=1$ তবে $\frac{dy}{dx}=?$

SOLUTION: বলে দিয়েছে $x^2+y^2=1$. এটা ঠিক সেই $G(x,y)=c$ চেহারার। এবার x-এর সাপেক্ষে এর দুই দিকের total derivative বার করলেই পাবো

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. যারা একটু বেশী সাবধানী, তারা হয়তো y দিয়ে ভাগ করার সময়ে লিখে দেবে "if $y\neq 0$"।
একটু বুঝে দেখা যাক, ব্যাপারটা কী হচ্ছে। যদি $x^2+y^2=1$-এর ছবি আঁকি, তবে পাবো Fig 48-এর মত একটা গোল। একই vertical লাইন একে একাধিকবার ছেদ করতে পারে, তাই এটা কোনো function-এর গ্রাফ নয়। অর্থাৎ y মোটেই x-এর কোনো function নয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ মানেটা কী? Function-ই যদি না থাকে, তবে differentiate করছিটা কাকে?
যদি ভালো করে Fig 48-এর দিকে তাকাও তবে দেখবে যে ছবিটা কোনো <u>একটা</u> function-এর গ্রাফ নয় বটে, কিন্তু <u>দুটো</u> বিভিন্ন function-এর গ্রাফ মিলিয়ে তৈরী বলে ভাবা যায়--

- এক, $y=\sqrt{1-x^2}$
- আর দুই, $y=-\sqrt{1-x^2}$.

দুজনেরই domain নেওয়া যায় $[-1,1]$. বোঝার জন্য Fig 49 দেখে নাও। এই দুটো গ্রাফের দেখা হয় দুই প্রান্তের বিন্দুতে, এবং সেখানে $y=0$ হচ্ছে। যদি $y\neq 0$ হয়, তবে তুমি হয় উপরের গ্রাফটায় আছো, আর নতুবা নীচের গ্রাফটায়। তুমি যখন $\frac{dy}{dx}$ বার করছ, তখন আসলে সেই function-টাকে differentiate করছ। ■

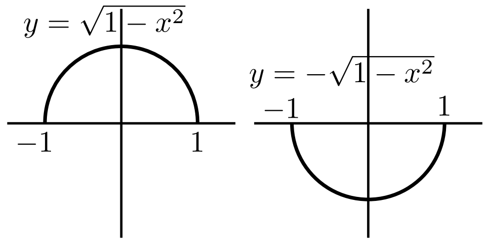


Fig 49

12.4 কিছু অংক

Exercise 36: If $u = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{zx}\right)$ is a differentiable function, show that

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

[5] **(2015.4)**
HINT: এইটা chain rule-এর অংক, কিন্তু সেটা চট্ করে বোঝা নাও যেতে পারে। তার জন্য ধাপে ধাপে চিন্তা করো--শুরু করেছিলাম x, y, z নিয়ে, সেখানে থেকে বানালাম $\frac{y-x}{xy}$ আর $\frac{z-x}{zx}$. তা থেকে তৈরী হল u. যেটা প্রমাণ করতে দিয়েছে, সেখানে একেবারে শেষের u-কে differentiate করছে একেবারে শুরুর x, y, z দিয়ে। যদি $s = \frac{y-x}{xy}$ এবং $t = \frac{z-x}{zx}$ বসিয়ে নাও, তবেই chain rule-এর পরিচিত রূপটা বুঝতে পারবে। এবার $\frac{\partial u}{\partial x}$ বার করো chain rule ব্যবহার করে। একইভাবে $\frac{\partial u}{\partial y}$ এবং $\frac{\partial u}{\partial z}$-ও বেরোবে। তবেই দেখবে অংকটা হয়ে যাচ্ছে। ■

Exercise 37: If $x^2 = vw$, $y^2 = wu$ and $z^2 = uv$, and $f(x, y, z) = \phi(u, v, w)$, show that $xf_x + yf_y + zf_z = u\phi_u + v\phi_v + w\phi_w$. [5] **(2017.8)**
HINT: এখানেও ধাপে ধাপে ভাবো। প্রথম ধাপে ছিল u, v, w. সেখান থেকে পরের ধাপে এল x, y, z. মনে করো যেন $(x, y, z) = g(u, v, w)$. সেখান থেকে তৃতীয় ধাপে হল $f(x, y, z)$. তবে $\phi = f\circ g$. এটা অবশ্যই chain rule লাগানোর পক্ষে অনুকূল, কিন্তু সমস্যা হল $(x, y, z) = g(u, v, w)$ মোটেই দিয়ে দেয়নি, খালি বলেছে $x^2 = vw$, $y^2 = wu$, $z^2 = uv$, যেখান থেকে (x, y, z)-কে মোটেই (u, v, w)-এর function হিসেবে পাওয়া যাচ্ছে না। ঠিক যেমন আগে দেখেছিলাম $x^2 + y^2 = 1$ থেকে y-কে x-এর function হিসেবে লেখা যায় না। সেখানেই implicit differentiation লাগাতে হবে। এবং তার জন্যে ধরে নিতে হবে $x, y, z \neq 0$. চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

Exercise 38: If u and v are functions of x, y, z satisfying the relationships

$$uv = 3x - 2y + z, \quad v^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

[5] **(2004.21)**
HINT:
লক্ষ করো যদি x, y, z দিয়ে দিই, তা থেকে কিন্তু ঠিক একটাই u, v পাওয়া যাচ্ছে না। যেমন $x = y = z = 1$ নিলে $v^2 = 3$ হচ্ছে, সেখানে থেকে v-এর দুটো value আসছে, $\sqrt{3}$ এবং $-\sqrt{3}$. কোন value-টা নিচ্ছ, সেই অনুযায়ী u-এরও দুটো value

আসবে। সুতরাং এখানেও আসলে দুটো function মিলে আছে। যদি $x = y = z = 0$ হয়, তবে অবশ্য $v = 0$ এবং u যা খুশি হতে পারে। সুতরাং ওই বিন্দুতে $\frac{\partial u}{\partial x}$ ইত্যাদি নিয়ে কথা বলা যাবে না। সুতরাং বলা না থাকলেও এখানে $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ধরে কাজ করতে হবে। এত কিছু না ভেবে অন্ধের মত differentiate করে দিলে অংকটা মিলিয়ে দেওয়া অবশ্য সহজই। ■

Example 27: If α, β, γ are the roots of the equation

$$\frac{u}{a+t} + \frac{v}{b+t} + \frac{w}{c+t} = 1$$

in t, show that

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

(2010.23,2012.7)

SOLUTION: প্রথমতঃ ধরে নিতে হবে যে a, b, c সবাই আলাদা আলাদা (নইলে ডানদিকের নীচের তলায় শূন্য এসে যাবে। যদি তাই হয়, তবে এটা দেখানো সম্ভব যে (u, v, w) সত্যিই (α, β, γ)-র function, মানে যাই $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ দিই না কেন, তার জন্য ঠিক একটাই $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ পাবে।

Writing the given equality as a polynomial in t we get

$$t^3+(a+b+c-u-v-w)t^2+(ab+bc+ca-u(b+c)-v(a+c)-w(a+b))t+(abc-ubc-vac-wab) = 0.$$

Also, the monic cubic polynomial with roots α, β, γ,

$$t^3 + (-\alpha-\beta-\gamma)t^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Comparing coefficients,

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= u+v+w-(a+b+c), \\
\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= -u(b+c)-v(a+c)-w(a+b)-(ab+bc+ca), \\
\alpha\beta\gamma &= ubc+vac+wab-abc.
\end{aligned}$$

Partially differentiating this w.r.t. α we get

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\
\beta+\gamma &= -\frac{\partial u}{\partial \alpha}(b+c) - \frac{\partial v}{\partial \alpha}(a+c) - \frac{\partial w}{\partial \alpha}(a+b), \\
\beta\gamma &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}bc + \frac{\partial v}{\partial \alpha}ac + \frac{\partial w}{\partial \alpha}ab.
\end{aligned}$$

We shall get two more such sets of equalities by differentiating w.r.t β and γ.

Combining all the 9 equalities we can write

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(b+c) & -(a+c) & -(a+b) \\ bc & ac & ab \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{\partial u}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial v}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} & \frac{\partial w}{\partial \beta} & \frac{\partial w}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{bmatrix}}_{B}.$$

Taking determinants we have $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} = |B|/|A| = \cdot = -\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, as required.

■

DAY 13
Differentiation-এর রকমফের

যখন আমরা কোনো $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-কে differentiate করি, তখন তার পিছনে একটা উদ্দেশ্য থাকে তার পরিবর্তনের হার বার করা। পরিবর্তনের হার মানে x খুব অল্প একটু বাড়লে $f(x)$ তার কতগুণ বাড়বে। কিন্তু যদি $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ নিই, তবে আরো অন্যান্য ধরণের পরিবর্তনের হার সম্ভব। তার একটার নাম **divergence**, এবং $n=3$ হলে এরকম আরেকটার নাম হচ্ছে **curl.** এবার আমরা এদের কথা শিখব। ছবি দিয়ে ভাবার জন্য $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ বা $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ কল্পনা করো যেন একটা নদীর মধ্যে জলকণার গতিপথ, বা খোলা মাঠের উপর বায়ুকণার আলোড়ন (Fig 50)। যে কণাটা $\mathbf{x}$ বিন্দুতে আছে, $f(\mathbf{x})$ হল তার বেগ।

13.1 Divergence

প্রথমে একটা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-এর উদাহরণ নিয়ে শুরু করি। আমরা যদি এটাকে ছবি দিয়ে ভাবতে চাই, তবে তার প্রচলিত পদ্ধতি হল গ্রাফ আঁকা। ধরো $f(x)$-এর গ্রাফটা হল Fig 51-এর মত। আমরা এবার $f(x)$-কে জলকণা বা বায়ুকণার বেগ হিসেবে ভাবব। তবে এখানে domain-টা হল $\mathbb{R}$, যেটা একেবারে সটান একটা লাইন। দুঃখের কথা, জলকণা বা হাওয়া সাধারণতঃ খালি একটা সরলরেখা ধরেই চলে না, তাই এক্ষেত্রে আরো ভালো উপমা হবে রেশন দোকানের লাইন। এখানে $\mathbb{R}$-এর উপরের বিন্দুগুলো হল সেই লাইনের একেকটা লোক। যে লোকটা x বিন্দুতে আছে সে ডানদিকে এগোচ্ছে $f(x)$ গতিতে। ব্যাপারটা বোঝার জন্য Fig 52 দ্যাখো। প্রতিটা বিন্দুতে একটা করে লোক আঁকা কঠিন, তাই বোঝানোর জন্য খালি তিনটে মানুষ দেখিয়েছি। প্রত্যেকের গায়ে একটা করে ছোটো তীর চিহ্ন এঁকে দিয়েছি, তার গতিবেগ বোঝানোর জন্য। মাসীর গায় অবশ্য কোনো তীর চিহ্ন নেই, কারণ সেখানে $f(x)=0$, তাই মাসী দাঁড়িয়ে দাঁড়িয়ে ঘুমিয়ে পড়েছেন, মোটেই নড়ছেন না। কিন্তু সবার পিছনে ট্যাঁপা যেখানে রয়েছে, সেখানে $f(x)$ বেশ বড়, তাই সে একেবারে দৌড়তে দৌড়তে চলেছে। সামনের চাচার বেলায় $f(x)$ তত বড় নয়, তাই তিনি এগোচ্ছেন ধীরেসুস্থে। গতিবেগের এই তারতম্যের ফলে কী হবে বুঝতেই

Fig 50

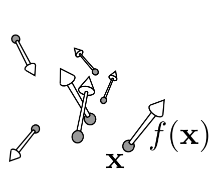


Fig 51

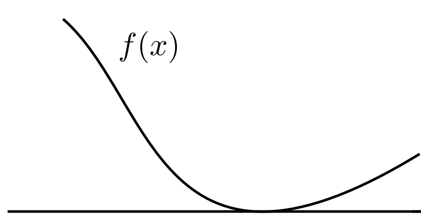


Fig 52

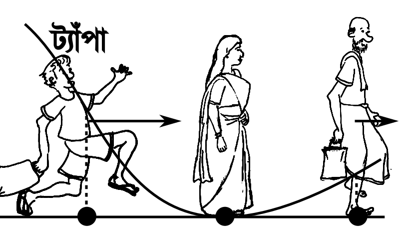




Fig 53

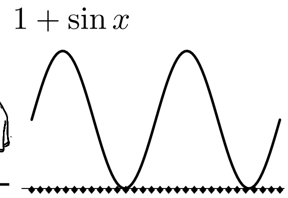


Fig 54

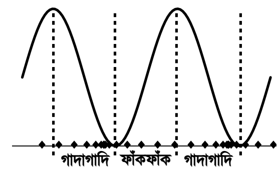


Fig 55

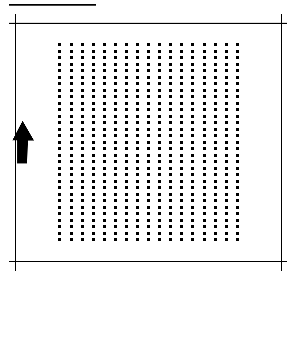
পারছ। যদিও শুরুতে মানুষগুলো সমান সমান অন্তরে আছে, কিছুক্ষণের মধ্যেই সেটা আর থাকবে না, যেমন Fig 53-এ দেখা যাচ্ছে যে, ট্যাঁপা গিয়ে মাসীর ঘাড়ের উপর পড়ে মাসীর ঘুম ভাঙিয়ে দিয়েছে, আর সেই সুযোগে চাচা গুটিগুটি বেশ খানিকটা এগিয়ে গেছেন। অর্থাৎ লাইনটার কোথাও বেশী গাদাগাদি, আবার কোথাও ফাঁকফাঁক হয়ে গেছে। এইবার আস্তে আস্তে ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করার দিকে এগোনো যাক। তার জন্য অনেকগুলো মানুষ কল্পনা করো, যারা প্রথমে সবাই সমান সমান অন্তরে আছে। এঁকে বোঝানোর সুবিধার জন্য মানুষগুলোকে Fig 54-এ একেকটা বিন্দু দিয়ে দেখালাম, উপরে যে গ্রাফটা রয়েছে সেটা ওদের গতিবেগের। Function-টা নিয়েছি $f(x) = 1 + \sin x$. যে বিন্দুতে গ্রাফটার উচ্চতা বেশী, সেই লোকটার গতিবেগও বেশী। এইভাবে খানিকক্ষণ চলার পরে অবস্থাটা দাঁড়িয়েছে Fig 55-এর মত। লক্ষ করো গতিবেগের গ্রাফটা যেখানে চড়ছে, সেখানেই ভীড় পাতলা হয়ে এসেছে। আবার যেখানে যেখানে গ্রাফটা নামছে, সেখানে গাদাগাদিও বেশী। এইরকম কোথাও-গাদাগাদি-কোথাও-ফাঁক-ফাঁক ব্যাপারটা হত না, যদি সকলেই একই দিকে একই গতিতে নড়ত, মানে $f(x)$ যদি একটা constant হত। আমরা জানি $f(x)$-এর হ্রাসবৃদ্ধির হার মাপার হাতিয়ার হল differentiation. সুতরাং $f'(x)$ জানা থাকলে বলতে পারা উচিত কোথায় গাদাগাদি হবে, আর কোথায় ফাঁকফাঁক হবে। কাজটা তেমন কঠিন নয়। একবার Fig 55 দেখলেই বুঝবে যেখানে $f'(x) > 0$ সেখানে ফাঁক ফাঁক হবে, আর $f'(x) < 0$ হলে গাদাগাদি হবে। যদি $f'(x) = 0$ হয়, সেখানে কোনোটাই হবে না। এমনটা কেন হচ্ছে, সেটাও বোঝা যায় একটু চিন্তা করলেই। ধরো $f'(x) > 0$, তার মানে $f(x)$ সেখানে বাড়ছে, অর্থাৎ আমি যে গতিতে এগোচ্ছি, আমার সামনের লোকটা তার চেয়েও বেশী গতিতে এগোচ্ছে, ফলে আমাদের মধ্যে ফাঁকটা বেড়ে যাচ্ছে। এর উল্টো ব্যাপারটা হত $f'(x) < 0$ হলে, মানে $f(x)$ যদি কমত। সেখানে আমার গতির চেয়ে আমার সামনের লোকটার গতি কম, তাই আমি ওর ঘাড়ে গিয়ে পড়ছি। যদি $f'(x) = 0$ হয়, তবে আমি আর আমার সামনের লোক দুজনেই সমান তালে এগোচ্ছি, তাই আমাদের মধ্যেকার দূরত্বও অপরিবর্তিত থাকছে।

এই ফাঁকফাঁক আর গাদাগাদির ব্যাপারটাকে আমরা অংকের ভাষায় প্রকাশ করি **divergence** দিয়ে। ফাঁকফাঁক হয়ে যাওয়া মানে divergence > 0, গাদাগাদি মানে divergence < 0. সাবধান, এই divergence-এর সঙ্গে কিন্তু sequence বা series-এর divergence-এর কোনো সম্পর্ক নেই। এখানে খালি divergence শব্দটাই ব্যবহৃত হয়, convergence-এর কোনো স্থান নেই। এই উদাহরণে আমরা দেখলাম যে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-এর বেলায় আমাদের পরিচিত derivative দিয়েই divergence মাপা গেল। কিন্তু যদি function-টা হত $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, যেখানে $n \geq 2$, তবে এত সহজে পার পাওয়া যেত না।

একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$-এর উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 28: ধরো একটা মাঠে এক দল সৈন্য সারে সারে দাঁড়িয়ে আছে (Fig 56)। এরা সবাই তীর চিহ্নটা বরাবর

Fig 56



মুখ করে আছে। সেনাপতি হুকুম দিলেন--মার্চ! অমনি সবাই একই গতিতে সামনে এগোতে লাগল। খানিক পরে এদের দেখতে হবে Fig 57-এর মত। এখানে ওদের ঘনত্বের কোনো পরিবর্তন হয় নি। আচ্ছা, যদি (x,y)-তে দাঁড়ানো সৈন্যটা সামনের দিকে x গতিবেগে এগোতো, তবে?

SOLUTION: এখানে কিন্তু সৈন্যদের গতিবেগের তারতম্য আছে। একই vertical লাইনে দাঁড়ানো সব সৈন্যের গতিবেগ সমান, কিন্তু যত ডানদিকে যাব, ততই বেগ বাড়বে।

এক্ষেত্রে কী হবে সেটা দেখিয়েছি Fig 58-এ। এখানে ওদের rectangular আকারটা পরিবর্তিত হয়েছে বটে, কিন্তু তাও ঘনত্বের কোনো পরিবর্তন ঘটে নি। কারণটা বোঝা কঠিন নয়। প্রতিটা column-কে (মানে vertical সারিকে) এককেটা রেশন দোকানের লাইন বলে ভাবো। তাহলে প্রতিটা x-র জন্য একটা করে লাইন, এবং সেই লাইনের সব লোকেরই একই গতিবেগ। পাশের লাইনের গতিবেগটা আলাদা ঠিকই, কিন্তু তাতে কী এসে যায়? কেউ তো আর পাশের লাইনে যাচ্ছে না, সামনের লোকটা যে একই তালে এগোচ্ছে সেটাই বড় কথা। ■

এবার একটা উদাহরণ দেখি, যেখানে ঘনত্ব বদলাবে।

Example 29: আবার আমরা Fig 56 থেকে শুরু করব। কিন্তু এবার (x,y)-এর সৈন্যটা সামনে এগোবে $1+\sin y$ বেগে। এবার কী হবে?

SOLUTION: এবার একই লাইনের মধ্যে গতির তারতম্য হচ্ছে, তাই ঘনত্ব বদলে যাবে Fig 59-এর মত করে। এটা কী করে পেলাম, বুঝলে তো? আমরা এখানে প্রতিটা vertical সারিকে এককেটা রেশনের লাইন বলে ভেবে প্রত্যেকটাকেই Fig 55-এর মত করে সাজিয়েছি। ■

এই গেল ছবি দিয়ে বোঝা। এবার আমাদের উদ্দেশ্য হল ঘনত্বটা কীভাবে বদলাবে, সেটা অংক কষে বার করা। তার জন্য প্রথম কাজ হল প্রতিটা সৈন্যের গতি অংকের ভাষায় প্রকাশ করা। যে সৈন্যটা (x,y)-তে আছে, তার গতিবেগকে আমরা $f(x,y)$ বলব। মনে রেখো গতিবেগের মধ্যে কত তাড়াতাড়ি যাচ্ছে এবং কোন্ দিকে যাচ্ছে দুটোই ধরা আছে, তাই $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ হবে। যেমন, একেবারে শুরুতে যেখানে সৈন্যরা সবাই একই বেগে (ধরো c বেগে) সামনে এগোচ্ছিল, সেখানে $f(x,y)=(0,c)$. ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও। এগোনোর দিকটা হল positive y-axis বরাবর, সেই জন্যই $(0,c)$ হল। তেমনি, যখন বেগটা ছিল x, তখন $f(x,y)=(0,x)$ হবে। একদম শেষের উদাহরণে $f(x,y)=(0,1+\sin y)$ নিয়েছি।

এবার আমরা কী চাইছি লিখে নিই--

> আমরা এমন একটা function চাইছি (যাকে আমরা divergence নাম দেব), যেটা কোনো (x,y)-তে >0 হওয়া মানে সেখানে সৈন্যরা ফাঁক ফাঁক হয়ে যাবে, আর <0 হলে গাদাগাদি হয়ে যাবে। যত বেশী positive, তত বেশী ফাঁকফাঁক, আবার যত বেশী negative, ততই বেশী গাদাগাদি।

কীভাবে এরকম function পাওয়া যায়, সেটা না বলে দিলে মাথায় আসা শক্ত। সংজ্ঞাটা Gauss (গাউস)-এর উর্বর মস্তিষ্কপ্রসূত। এখানে $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, তাই এর দুটো component আছে, ধরো f_1 আর f_2. মানে

$$f(x_1,x_2)=\big(\ f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)\ \big).$$

Fig 57

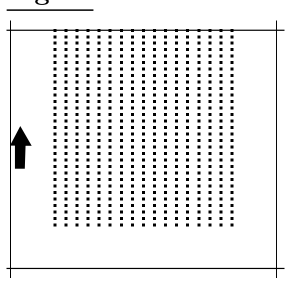


Fig 58

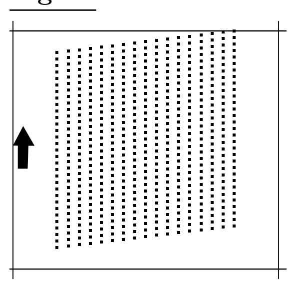


Fig 59

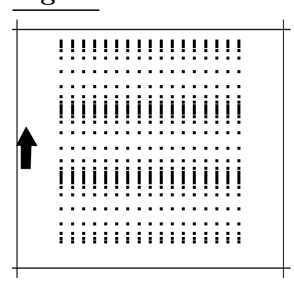
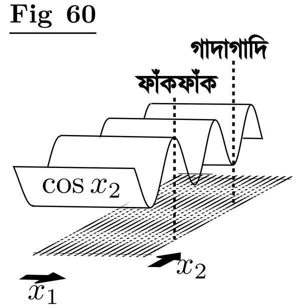


Fig 60



লক্ষ করো, আমরা x, y-এর বদলে x_1, x_2 লিখলাম[6]। তাহলে f-এর divergence হবে

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

একইভাবে কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$-এর বেলায় সংজ্ঞাটা হবে--

DEFINITION: Divergence

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a differentiable function with components $f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)$. Then the **divergence** of f is defined as

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

It is a function from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$.

কয়েকটা উদাহরণ দেখে হজম করে নেওয়া যাক।

Example 30: আমরা প্রথম যে উদাহরণটা দেখেছিলাম, সেখানে $f(x_1, x_2) = (0, c)$ ছিল। এর divergence কী হবে?

SOLUTION: এখানে divergence হবে

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \frac{\partial c}{\partial x_2} = 0 + 0 = 0.$$

অর্থাৎ divergence সর্বত্রই শূন্য। এবং সত্যিই, সৈন্যদের ঘনত্বও কোথাও বদলায়নি। ■

Example 31: আমাদের দ্বিতীয় উদাহরণে $f(x_1, x_2) = (0, x_1)$ ছিল। এখানে $\operatorname{div}(f) = ?$

SOLUTION: এখানে

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0 + 0 = 0.$$

তাই এক্ষেত্রেও কোনো গাদাগাদি বা ফাঁক ফাঁক হয়নি। ■

Example 32: তৃতীয় ক্ষেত্রে ছিল $f(x_1, x_2) = (0, 1 + \sin x_2)$. এখানে $\operatorname{div}(f) = ?$

SOLUTION: এখানে

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \frac{\partial 1 + \sin x_2}{\partial x_2} = 0 + \cos x_2 = \cos x_2.$$

এই divergence-এর সঙ্গে Fig 59-এর মত ঘনত্ব পরিবর্তনের সম্পর্কটা যদি স্পষ্ট না হয়ে থাকে, তবে একবার Fig 60-র দিকে চোখ ফেরালেই সেটা বুঝতে পারবে। ■

Exercise 39: নীচের function-গুলোর divergence বার করো।

[6] এতে $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$-এর জন্য generalise করতে সুবিধা হবে।

1. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1)$
3. $f(x_1, ..., x_n) = (\sum x_i, \sum x_i^2, ..., \sum x_i^n)$
4. $f(x_1, x_2) = (\cos(x_1 + x_2), \sin(x_1 + x_2))$
5. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, x_1x_2x_3)$.

■

13.1.1 ∇ দিয়ে লেখা

আমরা আগেই বলেছিলাম যে, যদি $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ হয়, তবে $\nabla F(x_1, ..., x_n)$ বলতে আমরা বুঝি

$$\nabla F(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

অবশ্যই খালি ∇-টুকুর কোনো মানে হয় না, কিন্তু লোকে তাও ∇-র একটা মানে কল্পনা করেছে--

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

এইভাবে দেখলে divergence-কেও ∇ দিয়ে লেখা যায়। ধরো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$-এর component-গুলো হল $f_1, ..., f_n$. তবে

$$\text{div}(f) \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \nabla \bullet f.$$

Notation-টা বুঝলে তো? ঠিক যেন ∇ একটা vector আর f আরেকটা vector. এদের মধ্যে dot product নেওয়া হচ্ছে। চট্ করে dot product-এর সংজ্ঞাটা মনে করিয়ে দিই। যদি $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ আর $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$-এর মধ্যে dot product মানে হল

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

Divergence-এর বেলাতেও সেরকম, $\mathbf{u}$-এর জায়গায় ∇, আর $\mathbf{v}$-র জায়গায় f. তাই u_i-এর জায়গায় $\frac{\partial}{\partial x_i}$ আর v_i-এর জায়গায় f_i. অতএব u_iv_i-এর জায়গায় হয়েছে $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

13.2 Curl

এবার divergence-এর মত আরেকটা জিনিস শিখব, তার নাম **curl**. আমরা divergence-এর বেলায় $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ নিয়ে কাজ করছিলাম। কিন্তু curl-এর বেলায় কাজ করা হয় খালি $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ নিয়ে।

Fig 61

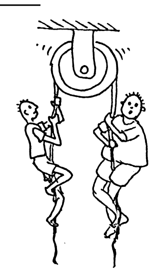


Fig 62

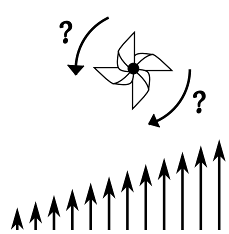


Fig 63

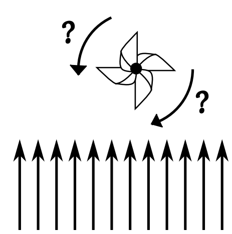
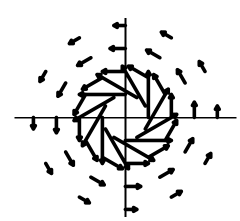


Fig 64



ধারণাটা প্রথমে গল্প করে বুঝে নেওয়া যাক। মনে করো একটা পুলি আছে Fig 61-এর মত। এর উপর দিয়ে একটা দড়ি রয়েছে, আর দড়ির দু প্রান্ত ধরে দুটো লোক ঝুলছে। পুলিটা কোন্ দিকে ঘুরবে বলে মনে হয়? অবশ্যই মোটা লোকটার দিকে, কারণ সেদিকের টানটা বেশী। এবার মনে করো একটা মাঠের উপর দিয়ে হাওয়া বইছে Fig 62-এর মত করে। যত লম্বা তীর চিহ্ন, তত বেশী জোরে হাওয়া বইছে সেখানে। এবার যদি তার মধ্যে একটা বাচ্চাদের ঘুর্ণি পাখা বসাই, সেটা কোন দিকে ঘুরবে? লক্ষ করো, যতই ডানদিকে যাচ্ছ, হাওয়ার জোর ততই বাড়ছে। সুতরাং পাখাটার ডানদিকে হাওয়া বেশী জোরে ধাক্কা মারছে। ফলে ওটা ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে ঘুরবে। কিন্তু যদি হাওয়া সর্বত্রই সমানভাবে বইত (Fig 63), তবে পাখাটা মোটেই ঘুরত না, কারণ দুই পাশের ধাক্কা কাটাকাটি হয়ে যেত। এই ব্যাপারটা, মানে পাখাটা কোথায় বসালে কত জোরে কোন্ দিকে ঘুরবে, সেটাও বার করা যায় differentiation-এর কায়দায়। তার জন্য প্রথমে হাওয়ার কণাগুলো কে কোন্ দিকে কত বেগে ছুটছে, সেটাকে একটা function-এর আকারে লিখে নিতে হবে। বোঝার সুবিধার জন্য প্রথমে 2-dimensional উদাহরণ নিই, যেখানে function-টা হল $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, মানে (x,y) বিন্দুতে হাওয়ার যে কণাটা আছে তার বেগ হল $f(x,y)\equiv(f_1(x,y),\ f_2(x,y))$. তবে ঘুর্ণির ফর্মুলাটা হল--

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}. \qquad (*)$$

এইটা যদি >0 হয়, তবে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে ঘুরবে, এবং <0 হলে ঘড়ির কাঁটা দিকে। যদি 0 হয়, তবে আদৌ ঘুরবে না। এটা 0-র থেকে যত বেশী দূরে যাবে (positive বা negative যে দিকেই হোক), ততই জোরে ঘুরবে পাখাটা। এই ফর্মুলাটা চট্ করে সহজবুদ্ধিতে বোঝার কোনো কায়দা আছে বলে জানি না। জিনিসটা বিখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানী James Clerk Maxwell-এর তৈরী। কয়েকটা উদাহরণ করে হজম করা যাক ফর্মুলাটা।

Example 33: যদি $f(x,y)=(y,x^2)$ হয়, তবে ফর্মুলাটা লাগালে কী পাবে?

SOLUTION: এখানে f-এর component-দুটো হল $f_1(x,y)=y$ এবং $f_2(x,y)=x^2$. সুতরাং

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}=2x-1.$$

■

Exercise 40: নীচের প্রতিক্ষেত্রে ফর্মুলাটা লাগাও।
(1) $f(x,y)=(x,y)$ **(2)** $f(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$ **(3)** $f(x,y)=(xy,x+y)$ **(4)** $f(x,y)=(2x-3y,2y-3x)$.
■

এখানে ছবি দিয়ে চিন্তা করার সময়ে একটা ব্যাপারে সাবধান। আমরা যে ঘুর্ণিটা বসাচ্ছি সেটা কিন্তু খুবই ছোট্টো, একটা বিন্দু বললেই হয়। সেই কারণে যে বিন্দুতে ওটা বসানো হয়েছে, কেবলমাত্র সেই বিন্দুতে বায়ুপ্রবাহের উপরেই ওটা নির্ভর করে। এই ব্যাপারটা ঠিকমত না বুঝলে কী সমস্যা বাঁধতে পারে, সেটা নীচের অংকটা দেখলেই টের পাবে।

Example 34: $f(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ if $(x,y)\neq 0$. যদি তীর চিহ্ন দিয়ে ছবি আঁকো, তবে Fig 64-এর মত দেখাবে। নিশ্চয়ই তোমার মনে হচ্ছে যে এখানে একটা কাগজের ঘুর্ণি বসালেই ঘুরতে শুরু করবে। এবার ফর্মুলাটা লাগিয়ে দ্যাখো কী পাও।
SOLUTION: এখানে component দুটো হল

$$f_1(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\ \text{এবং}\ f_2(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

সুতরাং

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

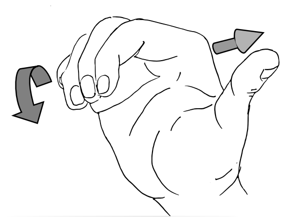


Fig 65

এবং

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

অতএব $\text{curl}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$. সুতরাং f-এর domain-এর যেখানেই ঘুর্ণি বসাও না কেন, মোটেই সেটা ঘুরবে না! কিন্তু ছবি দেখে তো ঠিক এর উল্টোটাই মনে হচ্ছিল! আসলে ছবিটার দিকে ভালো করে তাকালে বুঝবে যে ঘুর্ণিটা ঘুরবে, যদি তুমি ওটাকে origin-এ বসাও। কিন্তু origin-টা আমাদের f-এর domain-এ নেই। ■

এই উদাহরণগুলো ছিল $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$-এর জন্য। এই ব্যাপারটাই আমরা $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$-এর বেলাতে করলেই curl-এর ধারণায় পৌঁছব। মনে করো যেন শূন্যে হাওয়া বইছে এলোমেলোভাবে। হাওয়ার গতিটা প্রকাশ করা হচ্ছে $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ দিয়ে, মানে (x, y, z) বিন্দুতে হাওয়ার গতি হল $f(x,y,z) \equiv (f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z))$. তার মধ্যে একজায়গায় একটা ছোট্টো শোলার বল ভাসছে। সেটা এমনভাবে আটকানো আছে যে ওই বিন্দু থেকে সরে যাবে না, কিন্তু ওই বিন্দুতে থেকেই যেদিকে খুশি ঘুরতে পারে। এবার বলের ঘোরাটা বোঝানোর জন্য খালি ঘড়ির কাঁটা দিকে নাকি বিপরীতে, সেটুকু বললেই হবে না, তার ঘোরার axis (মানে অক্ষ)-টাও বলতে হবে। প্রচলিত নিয়ম হল-- বলটা যেভাবে ঘুরছে, সেইভাবে যদি ডানহাতের আঙুলগুলোকে বাঁকাও (Fig 65), তবে বুড়ো আঙুল বরাবর একটা vector-কে অক্ষ কল্পনা করা হয়। তীর চিহ্নটার অভিমুখটা প্রকাশ করে কোন্ দিকে ঘুরছে সেটা, আর তীর চিহ্নটার দৈর্ঘ্যটা প্রকাশ করে কত জোরে ঘুরছে। প্রতিটা বিন্দুতেই আমরা এরকম একটা করে vector পেতে পারি। একেই বলে সেই বিন্দুতে f-এর **curl**, যাকে লিখি $\text{curl}(f)$. সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: Curl

For a differentiable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ we define its **curl** as

$$\text{curl}(f) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

বুঝতেই পারছ, এটা আসলে একটু আগের (*) ফর্মুলাটা থেকেই এসেছে, তিনবার ব্যবহার করা হয়েছে x, y আর z এই তিন দিকের জন্য। একটা উদাহরণ করে ফর্মুলাটা সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

Example 35: ধরো $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ হল $f(x,y,z) = (x, 2y, e^{x+z})$. তবে $\text{curl}(f)$ বার করো।

SOLUTION: এখানে component তিনটে হল $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = 2y$ এবং $f_3(x,y,z) = e^{x+z}$. সুতরাং

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 - 0 = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} &= 0 - e^{x+z} = -e^{x+z}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

সুতরাং

$$\mathrm{curl}(f) = (0, -e^{x+z}, 0).$$

■

13.2.1 ∇ দিয়ে লেখা

আমরা আগে দেখেছিলাম যে divergence-কে ∇ দিয়ে লেখা যায়। Curl-কেও আমরা ∇ দিয়ে লিখতে পারি। মনে আছে নিশ্চয়ই যে--

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

এটা ব্যবহার করলে curl(f)-কে লেখা যায়

$$\mathrm{curl}(f) = \nabla \times f.$$

এখানে '×' দিয়ে **cross product** বোঝানো হচ্ছে। চট্ করে মনে করে নেওয়া যাক cross product-এর সংজ্ঞাটা। ধরো $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ আর $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$-এর cross product বার করতে হবে। সেটা হল $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে আরেকটা vector--

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

একইভাবে

$$\nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

এবং সেটাই হল curl(f).
অনেকে ফর্মুলাটা determinant-এর মত করে মনে রাখতে ভালোবাসে--

$$\mathrm{curl}(f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Exercise 41: নীচের $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$-দের বেলায় curl($f$) বার করো।

1. $f(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$
2. $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, যেখানে A হল কোনো 3×3 সাইজের matrix.

■

13.2.2 Irrotational এবং potential

আগেই বলেছি curl-এর ধারণাটা James Clerk Maxwell-এর আবিষ্কার। তিনি এটা বানিয়েছিলেন electromagnetism-এর অংক করবার জন্য। সেখানে এমন সব function লাগে যাদের curl শূন্য হয়। এরকম function-দের একটা আলাদা নামই আছে--

> DEFINITION: **Irrotational**
>
> A function $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ is called **irrotational** if $\text{curl}(f)=\mathbf{0}$ everywhere.

এরকম একটা উদাহরণ হল constant function. কিন্তু সেটা নিতান্তই মামূলী উদাহরণ হল। নীচের অংকে তোমাকেই এরকম একটা উদাহরণ বানাতে বলেছে।

Exercise 42: এমন একটা $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ দাও যেটা irrotational, অথচ মোটেই constant নয়। একটা কায়দা ভাবতে পারো যা দিয়ে এরকম বহু উদাহরণ চোখের নিমেষে বানানো যায়? ■

এইসব function-দের একটা আশ্চর্য ধর্ম আছে, যেটা physics-এ প্রচুর কাজে লাগে। সেটাকে একটা theorem-এর আকারে লিখে রাখি--

> THEOREM
>
> A differentiable function $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ is irrotational if and only if it can be written as $f=\nabla\phi$ for some $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Such a ϕ is called a **potential** function for f.

Exercise 43: Find the constants a,b,c so that the vector

$$\vec{V}=(x+2y+az)\hat{i}+(bx-3y-z)\hat{j}+(4x+cy+2z)\hat{k}$$

is irrotational. Find a scalar function ϕ for which $\vec{V}=\vec{\nabla}\phi$.[2+3] **(2021.1a)**

HINT:

কষ্ট করে $\text{curl}(f)=(0,0,0)$ করলেই দেখবে $a=4,\ b=2$ আর $c=-1$ আসছে। সুতরাং--

$$\vec{V}=(x+2y+4z,2x-3y-z,4x-y+2z).$$

তার মানে দ্বিতীয় অংশের জন্য এমন $\phi(x,y,z)$ চাই, যাতে এই তিনটে শর্ত পালিত হয়--

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=x+2y+4z,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2x-3y-z,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=4x-y+2z.$$

প্রথম শর্তটাকে যদি x-এর সাপেক্ষে integrate করে দিই (y, z-কে স্থির রেখে) তবে পাব

$$\phi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + c_1(y, z).$$

ওই শেষের $c_1(y, z)$-টা হল x-এর সাপেক্ষে arbitrary constant. একইভাবে বাকি দুটো শর্ত থেকে পাবে--

$$\phi(x, y, z) = 2xy - \tfrac{3}{2}y^2 - yz + c_2(x, z) = 4xz - yz + z^2 + c_3(x, y).$$

সবগুলো চেহারাই একইসঙ্গে রক্ষা করা যায় ϕ-কে এভাবে নিলে--

$$\phi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \tfrac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c,$$

যেখানে c একটা arbitrary constant. এইটা হল ϕ-এর general চেহারা। আমাদের অবশ্য একটা কোনো ϕ বার করতে বলেছে, তাই c-এর যা খুশি একটা value বসিয়ে দিলেই হবে। ■

Exercise 44: Show that $f(x, y, z) = (1 + y + yz, x + xz, xy)$ is irrotational. Obtain a potential function for it. ■

Exercise 45: Let $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be two differentiable functions. Let $a, b \in \mathbb{R}$. Then is it true that $\text{curl}(af + bg) = a\,\text{curl}(f) + b\,\text{curl}(g)$? ■

Answers

1. **(1)** $3, 2, -5$ **(2)** $3, -1, 2$ **(3)** $0, 1, 0$ **(4)** $5, 0, 0$. **2.** **(1)** $p(x, y) = -1 + 3x$. **(2)** $p(x, y) = 1 + (x-2) + m \cdot (y-1)$, যেখানে m হল y-axis বরাবর slope. যেহেতু $(0, 0, 0)$ দিয়ে যায়, তাই $0 = 1 + (0-2) + m \cdot (0-1)$. সুতরাং $m = -1$. **3.** নাঃ, limit নেই। **5.** চারটে row আর তিনটে column. **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$. **7.** (C)$\begin{bmatrix} 4 & -6 \end{bmatrix}$. **8.** $\frac{\partial w}{\partial x} = yz + y + z + 1$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xz + x + z + 1$ এবং $\frac{\partial w}{\partial z} = xy + x + y + 1$. **9.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, তাই $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$. **10.** $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3(x_1 - \bar{x})^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{n}\sum_{i=2}^n (x_i - \bar{x})^2$. **11.** $f(x, 0) = |x|$ এবং $f(0, y) = |y|$. এদেরকে $x = 0$ এবং $y = 0$-তে differentiate করা যায় না। **12.** এখানে $f(x, 0) = x$ এবং $f(0, y) \equiv 0$. তাই $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. সুতরাং (C). **13.** z-কে x, y-এর function ধরলে $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + \cos(x-y) - x\sin(x-y)$. কিন্তু z-কে x, v-এর function ধরলে $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + v$. **14.** $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + v + x\frac{\partial v}{\partial x}$. **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \\ -2(x_2 - x_1) & 2(x_2 - x_1). \end{bmatrix}$ **16.** **(1)** $(2, 3)$ **(2)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix}$ **(3)** $\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$. **18.** ???-এর জায়গায় 1 নিলেই চলবে। **20.** যেহেতু $(h_1 \pm h_2)^2 \geq 0$, তাই $h_1^2 + h_2^2 \geq 2|h_1h_2| \geq |h_1h_2|$.
সুতরাং $\frac{|h_1h_2|^{3/2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |h_1h_2|$. এবার sandwich law লাগাও। **21.** প্রমাণের বাকি অংশটা এইরকম--

Now

$$\begin{aligned}\frac{4(h_1+h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \frac{4(h_1^2+h_2^2)+8h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= 4\sqrt{h_1^2+h_2^2}+\frac{8h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.\end{aligned}$$

Here $4\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$ as $(h_1,h_2)\to(0,0)$.

Also

$$\left|\frac{8h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le \frac{8|h_1|\cdot|h_2|}{|h_1|} = 8|h_2| \to 0.$$

Hence f is differentiable at (a,b).

So f is differentiable everywhere.

22. যদি $(1,0)$-টা বাঁদিকের vector-টায় গিয়ে থাকে, তবে $M = \begin{bmatrix} -\cos\phi & 2\cos\theta \\ \sin\phi & 2\sin\theta \end{bmatrix}$. যদি $(1,0)$ গিয়ে থাকে ডানদিকের vector-টায়, তবে $M = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -\cos\phi \\ 2\sin\theta & \sin\phi \end{bmatrix}$. **23.** এখানে A আর C বিন্দুতে এবং আলাদা করে B আর D বিন্দুতেও derivative matrix দুটো সমান বলেই মনে হচ্ছে। এখানে derivative matrix হল $\begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & -3y^2 \end{bmatrix}$. সুতরাং A এবং C-তে derivative matrix হল $\begin{bmatrix} 5.07 & 1 \\ 1 & -5.07 \end{bmatrix}$ এবং বাকি দুটো বিন্দুতে $\begin{bmatrix} 5.07 & 1 \\ 1 & -1.92 \end{bmatrix}$. **27.** $\nabla T = (y^2-2xz^2, 2xy, 2-2x^2z)$. তাই $-\nabla T(1,0,-1) = (2,0,-4)$. তাই উত্তর (B). **28.** $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}+\cos(x+y), xe^{xy}+\cos(x+y))$. সুতরাং $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2},0\right)$. একে 90° ঘোরালে হয় $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **29.** না হয়ে যাবেটা কোথায়? **30.** এখানে $h'(t)$ চাইছি, যেখানে $h(t)=f(g(t))$ আর $g(t) = (a_1+u_1t, a_2+u_2t)$. সুতরাং
$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+u_1t, a_2+u_2t), \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+u_1t, a_2+u_2t)\right)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

31. **(1)** $(3t^2+5t^4)e^{t^3+t^5}$. **(2)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2(x^2+z^2) \\ 3(x^2+z^2)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$.
(3) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **(4)** 0.

32. এখানে $h(\theta) = f(g(\theta))$, যেখানে $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ আর $g(\theta) = (2+\cos\theta, \sin\theta, 1)$. তাই

$$\begin{aligned}h'(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{(2+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+1}}\begin{bmatrix} 2+\cos\theta & \sin\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}\\ &= -\frac{2\sin\theta}{\sqrt{6+2\cos\theta}}.\end{aligned}$$

33. একই উত্তর আসছে। **34.**

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx},\\ \frac{df}{dy} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy},\\ \frac{df}{dz} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz}+\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

35. $\frac{df}{dx_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j\neq i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dx_i}$. **37.** যেহেতু $x^2=vw$, তাই implicit differentiation করে পাচ্ছি $2x\frac{\partial x}{\partial v}=w$ এবং $2x\frac{\partial x}{\partial w}=v$. আর যেহেতু এখানে u নেই, তাই $\frac{\partial x}{\partial u}=0$. আমরা ধরেছি $x\neq 0$. অতএব $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{w}{2x}$ এবং $\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{v}{2x}$. একইরকম কাজ $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ ইত্যাদিদের জন্যও করা যাবে।
ওদিকে chain rule দিয়ে বলতে পারি $\frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$. একইভাবে $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ এবং $\frac{\partial\phi}{\partial w}$-এর জন্যও। এবার গায়ের জোরে $u\frac{\partial\phi}{\partial u}+v\frac{\partial\phi}{\partial v}+w\frac{\partial\phi}{\partial w}$ বার করো। এর মধ্যে তিনটে term থাকবে $\frac{\partial f}{\partial x}$-ওয়ালা, তিনটে $\frac{\partial f}{\partial y}$-ওয়ালা, আর তিনটে $\frac{\partial f}{\partial z}$-ওয়ালা।
এদের মধ্যে $\frac{\partial f}{\partial x}$-ওয়ালা term-গুলোর থেকে $\frac{\partial f}{\partial x}$-টাকে 'কমন' নিয়ে নিলে পরে থাকবে $u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}+w\frac{\partial x}{\partial w}$. একটু আগেই যে $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ ইত্যাদি বার করেছিলাম, সেগুলো বসালেই দেখবে এটা x হয়ে যাচ্ছে। ব্যস্, বাকি term-গুলোরও একইরকম গতি হবে। **38.** $\because uv=3x-2y+z,\ \therefore \frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}=3.$
আবার $\because v^2=x^2+y^2+z^2,\ \therefore 2v\frac{\partial v}{\partial x}=2x.$
সুতরাং $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{v}\left(3-\frac{ux}{v}\right)$. এখানেই আমরা $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ ব্যবহার করলাম।
একইভাবে $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{v}\left(-2-\frac{uy}{v}\right)$ আর $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{v}\left(1-\frac{uz}{v}\right)$.
এবার $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$ নিয়ে একটু দলাইমলাই করলেই শূন্য পেয়ে যাবে। **39.** **(1)** 0. **(2)** $x_1+x_2+x_3$. **(3)** $\sum ix_i^{i-1}$ **(4)** $\cos(x_1+x_2)-\sin(x_1+x_2)$. **(5)** $1+x_1+x_3+x_1x_2$. **40.** **(1)** 0. **(2)** $2x-2y$. **(3)** $1-x$. **(4)** $-3+3=0$.
41. **(1)** 0. **(2)** যদি A-র (i,j)-th entry-কে a_{ij} লিখি তবে $\mathrm{curl}(f)=(a_{32}-a_{23},a_{13}-a_{31},a_{21}-a_{12})$.
42. f_1 খালি x-এর function নাও, f_2 নাও খালি y-এর function, আর f_3 যেন হয় খালি z-এর function. এরকম function অবশ্যই irrotational হবে। অবশ্য এর বাইরেও বিস্তর irrotational function আছে।
44. $\phi(x,y,z)=x+xy+xyz$. **45.** হ্যাঁ। যেমন ধরো $\mathrm{curl}(af+bg)$-র প্রথম component-টা হল $\frac{\partial}{\partial x}(af_2+bg_2)-\frac{\partial}{\partial y}(af_1+bg_1)=a\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)-b\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)$, যেটা $a\,\mathrm{curl}(f)+b\,\mathrm{curl}(g)$-এর প্রথম component.

Chapter III
Differentiation (part 2)

DAY 14
Slice এবং component

এবার যা করতে চলেছি সেটা বোঝার জন্য একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নিয়ে শুরু করা যাক, ধরো $f(x, y) = xy$. এর থেকে আমরা বিভিন্ন slice বার করতে পারি। প্রথম অধ্যায়েই এদের কথা আমরা শিখেছিলাম। যদি $x = 1$ স্থির রেখে খালি y-এর function হিসেবে ভাবি, তবে পাব এই slice-টা, $f(1, y) = y$. ঠিক যেন $x = 1$ বরাবর $\mathbb{R}^2$-তে যে লাইনটা হয়, সেটা ধরেই খালি function-টাকে দেখছি। একইভাবে $y = 5$ বরাবর slice করলে পেতাম $f(x, 5) = 5x$. সব সময়েই যে লাইনটাকে x-axis বা y-axis-এর সমান্তরাল হতে হবে, এমন কোনো কথা নেই। চাইলে $2x + 3y = 4$ বরাবরও slice করা যেতে পারে। এই সরলরেখার উপর প্রতিটা বিন্দুকেই $\left(x, \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right)$ আকারে লেখা যায়। সুতরাং slice করলে পাব এই function-টা, $f\left(x, \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right) = x\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right)$. স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে যে, কোনো বিন্দুতে f-টা differentiable হলে সেই বিন্দুগামী কোনো সরলরেখা বরাবর slice নিয়ে পাওয়া function-টাও ওখানে differentiable হবে কিনা। সেখান থেকেই জন্ম হয় **directional derivative** নামে একটা গুরুত্বপূর্ণ ধারণার।

14.1 Directional derivative

আমরা ছবি আঁকার সুবিধার জন্য $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করব। এইরকম function-এর গ্রাফকে অনেক সময়েই একটা ঢেউ-খেলানো ছাদের মত কল্পনা করলে সুবিধা হয়, যেখানে xy-plane-টা হল মেঝে। এই মেঝের উপরে একটা বিন্দু নিলাম $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. এখানে একটা লোক দাঁড়িয়ে আছে। তার মাথার উপর ছাদের উচ্চতা হল $f(\mathbf{a})$. ব্যাপারটা দেখিয়েছি Fig 1-এ। এবার লোকটা হাঁটতে শুরু করবে একটা লাইন বরাবর। লাইনটা ঠিক করার জন্য একটা vector দিচ্ছি $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq \mathbf{0}$. এই vector-টার দৈর্ঘ্যটা বলবে লোকটা কত দ্রুত এগোচ্ছে, আর অভিমুখটা বলবে কোন দিকে যাচ্ছে। হিসেবটা এইরকম--প্রতি সেকেণ্ডে লোকটা $\mathbf{u}$ পরিমাণ এগোবে। প্রথমে (মানে $t = 0$-তে) ছিল $\mathbf{a}$-তে, $t = 1$-এ থাকবে $\mathbf{a} + \mathbf{u}$-তে, আবার $t = 2$-তে পৌঁছবে $\mathbf{a} + 2\mathbf{u}$-তে, এইরকম। অর্থাৎ কিনা, t সময়ে লোকটার অবস্থান হবে $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$. বোঝার জন্য Fig 2 দেখে নাও। সেই সময়ে লোকটার মাথার উপরে ছাদের উচ্চতা হবে $f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. যেহেতু এখানে $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{u}$ দুটোই দেওয়া আছে, তাই এই উচ্চতাটা কেবলমাত্র t-এর function. ধরো এর নাম দিলাম $g(t)$, অর্থাৎ--

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}).$$

Fig 1

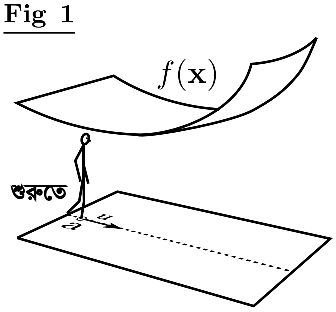
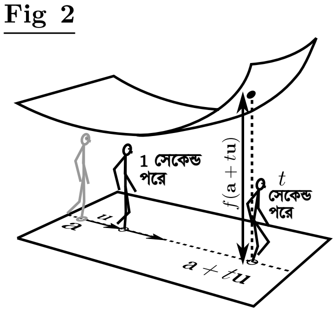


Fig 2



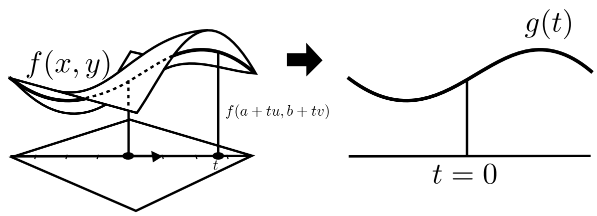


Fig 3

বোঝার জন্য Fig 3 দেখে নাও। এখানে আমরা $t < 0$-ও নিতে পারি, যদিও সেক্ষেত্রে লোকটাকে পিছু হাঁটতে হবে।
এবার যদি $g(t)$-টা $t = 0$-তে differentiable হয়, তবে আমরা $g'(0)$ বার করতে পারব। এই $g'(0)$-কে বলব **directional derivative** of $f(x,y)$ at **a** along **u**.
এতক্ষণ আমরা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নিয়ে আলোচনা করেছি। যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ হত, তাহলেও একইরকম ব্যাপার করা যেত। সেটাই লিখেছি নীচের সংজ্ঞায়।

DEFINITION: **Directional derivative**

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Let $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, where $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Then the **directional derivative of f at a along u** is defined as $g'(0)$, where

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}).$$

Directional derivative দিয়ে কী হয়, খায় না মাথায় মাখে, সেই প্রসঙ্গে যাওয়ার আগে কিছু অংক কষে সংজ্ঞাটা বুঝে নেওয়া যাক।

Example 1: Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function defined by $f(x,y) = xy$ for all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Let $\mathbf{v} = (1,2)$ and $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ be two elements of $\mathbb{R}^2$. Find the directional derivative of f at the point **a** in the direction **v**.[2] **(2019.12b)**

SOLUTION:

Let $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(a_1 + t, a_2 + 2t) = (a_1 + t)(a_2 + 2t) = a_1 a_2 + (2a_1 + a_2)t + 2t^2$.
Then $g'(t) = 2a_1 + a_2 + 4t$.
The required directional derivative is $g'(0) = 2a_1 + a_2$.

■

Exercise 1: নীচের প্রতিটা ক্ষেত্রে f-এর directional derivative at **a** along **u** বার করো।

(A) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{u} = (2,3)$.

(B) $f(x,y,z) = xyz$, $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$.

(C) $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i x_i)^2$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1)$.

(D) $f(x_1, ..., x_n) = \sum_i \alpha_i x_i$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = (\beta_1, ..., \beta_n)$, যেখানে α_i আর β_i-গুলো তোমাকে দেওয়া আছে।

■

Exercise 2: যদি $\mathbf{u} = (1,0)$ নাও, তবে যে directional derivative-টা পাবে, দেখাও যে সেটা আসলে $\frac{\partial f}{\partial x}$. একইভাবে $\mathbf{u} = (0,1)$-র জন্য directional derivative-টা হবে $\frac{\partial f}{\partial y}$. ■

Example 2: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify.
Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^2 & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{if } y = 0 \end{cases}.$$

If the directional derivative of f at $(0,0)$ exists along the direction $\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$, where $\sin\alpha \neq 0$, then the value of $\cot\alpha$ is

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) -2

[1+1] **(2019.1i)**

SOLUTION: এখানে যে $\hat{i} = (1,0)$ আর $\hat{j} = (0,1)$, সে তো জানোই। সুতরাং $\cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Let

$$g(t) = f\big((0,0) + t(\cos\alpha, \sin\alpha)\big) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \begin{cases} (1 + \cot\alpha)^2 & \text{if } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \end{cases},$$

since $\sin\alpha \neq 0$.

This is continuous and differentiable at $t = 0$, if and only if $1 + \cot\alpha = 0$, ie, $\cot\alpha = -1$.

So the correct option is (A).

■

একই বিন্দুতে বিভিন্ন vector বরাবর directional derivative-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক থাকে। এবার সেটাই আলোচনা করব। ব্যাপারটা বোঝার জন্য প্রথমে নীচের অংকটা করো।

Example 3: ধরো $f(x,y) = e^{xy}$. আমি $\mathbb{R}^2$-তে একটা বিন্দু দিচ্ছি, $\mathbf{a} = (2,3)$. এই বিন্দুতে আমরা বিভিন্ন vector বরাবর directional derivative বার করব। Vector-গুলো দিচ্ছি এইরকম--

$$\mathbf{u} = (1,2) \text{ এবং } \mathbf{v} = (2,4).$$

লক্ষ করো, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$. এই দুটো vector বরাবর f-এর directional derivative দুটো বার করো। এই দুটো directional derivative-এর মধ্যে কোনো সম্পর্ক দেখতে পাচ্ছ? সেইটা ব্যবহার করে আন্দাজ করতে পারো ওই একই $\mathbf{a}$-তে $\mathbf{w} = (3,6)$ বরাবর directional derivative-টা কী হবে?

SOLUTION: প্রথমে $\mathbf{u} = (1, 2)$ বরাবর বার করি।

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) = f(2 + t, 3 + 2t) = e^{(2+t)(3+2t)} = e^{6+7t+2t^2}.$$

এটাকে t-এর সাপেক্ষে differentiate করলে হবে $(4t + 7)e^{6+7t+2t^2}$, যার মধ্যে $t = 0$ বসালে পাবে $7e^6$.
যদি একইভাবে আমরা $\mathbf{v} = (2, 4)$ বরাবর directional derivative বার করতে চাই, তবে পাব

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(2 + 2t, 3 + 4t) = e^{(2+2t)(3+4t)} = e^{6+14t+8t^2}.$$

এর derivative হল $(14 + 16t)e^{6+14t+8t^2}$. এতে $t = 0$ বসালে হয় $14e^6$.
লক্ষ করো $\mathbf{v}$ ছিল $\mathbf{u}$-এর দ্বিগুণ, এবং $14e^6$-ও $7e^6$-এর দ্বিগুণ! এই প্যাটার্ণ থেকে আন্দাজ করতে পারছি যে, যেহেতু $\mathbf{w} = (3, 6)$ হল $\mathbf{u}$-এর তিন গুণ, তাই $\mathbf{w}$ বরাবর directional derivative হবে $\mathbf{u}$ বরাবর directional derivative-এর তিন গুণ, মানে $21e^6$. সত্যি সত্যি কষে দেখলে দেখবে সেটাই আসছে। ■

এই প্যাটার্ণটা মোটেই কাকতালীয় নয়। সেটা chain rule দিয়েই দেখা যায়। নীচের অংকে তোমার উপরেই সেটা দেখানোর দায়িত্ব দিলাম।

Exercise 3: ধরো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. তোমাকে $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ আর $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ দেওয়া আছে। তুমি যখন $\mathbf{a}$-তে $\mathbf{u}$ বরাবর f-এর directional derivative বার করবে, তখন এই function-টাকে differentiate করবে--

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}).$$

এবার ধরো $\mathbf{a}$ অপরিবর্তিত রেখে $\mathbf{u}$-টাকে দ্বিগুণ করে $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ করে দিলাম। ফলে একই লাইনেই রইল, খালি লম্বায় দ্বিগুণ হয়ে গেল। এবার যদি $\mathbf{a}$-তে $\mathbf{v}$ বরাবর f-এর directional derivative বার করতে বলি, তবে তুমি differentiate করবে এই function-টাকে--

$$h(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}).$$

দ্যাখো তো $h(t)$-কে $g(t)$ দিয়ে প্রকাশ করতে পারো কিনা। তারপর chain rule লাগিয়ে দ্যাখো $h'(0) = 2g'(0)$ হচ্ছে কিনা।
HINT: এখানে multivariate chain rule-এর কথা হচ্ছে না। হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা chain rule-এর কথা হচ্ছে। ■

Exercise 4: আবার আগের অংকটাই কর, কিন্তু এবার $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ নিয়ে। কী পাচ্ছ? ■

আরেকটা অংক দেখাই যেটা একইরকম হলেও একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। এই অংকগুলোতে আমরা একই বিন্দুতে বিভিন্ন vector বরাবর directional derivative-দের মধ্যে সম্পর্ক নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি। আগের অংকগুলোতে vector-গুলো সবাই একই লাইন বরাবর ছিল। এবার লাইনটাও বদলাব।

Exercise 5: আবার $f(x, y) = e^{xy}$ আর $\mathbf{a} = (2, 3)$ দিলাম। একটু আগেই দেখলাম যে $\mathbf{u} = (1, 2)$ বরাবর directional derivative হয় $7e^6$. এবার $\mathbf{v} = (2, 5)$ বরাবর directional derivative বার করো। তারপর $\mathbf{w} = (1, 2)+(2, 5) = (3, 8)$ বরাবর directional derivative বার করে দেখাও যে directional derivative দুটোও যোগ হয়ে গেছে! ■

এই ব্যাপারটাও কাকতালীয় নয় মোটেই, যদিও যেকোনো f-এর বেলায় এটা নাও হতে পারে। কিন্তু যদি f-টা $\mathbf{a}$-তে differentiable হয়, তবে এমনটা হবেই। এটাও প্রমাণ হবে chain rule দিয়ে, তবে এবার আর হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা বাচ্চা chain rule দিয়ে কাজ চলবে না, multivariate chain rule লাগবে। ব্যাপারটা দরকারী, তাই গুছিয়ে একটা theorem হিসেবে লিখে প্রমাণ করে রাখা যাক।

THEOREM

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be differentiable at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ with derivative matrix $D_{1\times n}$. Then for any $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ the directional derivative of f at $\mathbf{a}$ along $\mathbf{u}$ is $D\mathbf{u}$.

Proof: যেকোনো $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ নাও। আমরা যখন এই $\mathbf{u}$ বরাবর directional derivative বার করব, তখন আমাদের বার করতে হবে $g'(0)$, যেখানে--

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}).$$

এটা দুটো function-এর composition, বাইরে f এবং তার পেটে $h(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$.
লক্ষ করো, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ এবং $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. এখানে h-টা সর্বত্রই differentiable, এবং derivative-টা সর্বত্রই একই, $\mathbf{u}$. মনে রেখো এটা $\mathbb{R}^n$-এর একটা সদস্য, যাকে matrix হিসেবে ভাবলে হয় একটা $n \times 1$ সাইজের matrix. অপরপক্ষে, $\mathbf{a}$-তে f-এর derivative matrix বলে দিয়েছে D.
এবার $\mathbf{a}$-তে chain rule লাগালে পাচ্ছি--

$$g'(0) = D\mathbf{u},$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। **[Q.E.D]**

কিন্তু সাবধান, এর উল্টোদিকটা কিন্তু মোটেই ঠিক নয়, অর্থাৎ--

> যদি কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ এবং $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-এর জন্য দ্যাখো যে
>
> > এমন একটা $D_{n\times n}$ আছে, যাতে যেকোনো $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$-এর জন্যই $\mathbf{a}$-তে $\mathbf{u}$ বরাবর f-এর directional derivative হচ্ছে $D\mathbf{u}$,
>
> তা থেকেই কিন্তু জোর দিয়ে বলা যাবে না যে--
>
> > f-টা ওই $\mathbf{a}$-তে differentiable. এমনকি এমনও হতে পারে যে, f-টা $\mathbf{a}$-তে continuous পর্যন্ত নয়!

এরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক, যেটা ছবি দিয়ে বুঝতে খুবই সহজ, এবং অংক কষে দেখতেও কঠিন নয়।

Example 4: আমরা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নেব এইভাবে--

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = x^2 \text{ and } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

দেখাও যে, $(0, 0)$-তে যেকোনো দিকেই directional derivative হল 0, অর্থাৎ যাই $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2$ নাও না কেন, সেটা বরাবর directional derivative হবে $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$. কিন্তু এটাও দেখাও যে f-টা মোটেই $(0, 0)$-ত continuous পর্যন্ত নয়, differentiable তো দূরের কথা! প্রথমেই অংক কষা শুরু কোরো না, আগে ছবি দিয়ে ভাবো।
SOLUTION: এখানে $f(x, y)$-এর গ্রাফটা কল্পনা করা শক্ত নয়। $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে $y = x^2$-কে দেখতে একটা parabola-র মত। সেই parabola-টাকে যেন গ্রাফ কাগজ থেকে ব্লেড দিয়ে কেটে 1 ঘর শূন্যে ভাসিয়ে তোলা হয়েছে, খালি origin-টা যথাস্থানেই রয়ে গেছে। ফলে দেখতে হয়েছে Fig 4-এর মত। যেহেতু গ্রাফটা বাকি সব জায়গাতেই xy-plane-এর সঙ্গে লেপ্টে আছে, তাই সব দিকেই directional derivative হবে 0. অথচ $(0, 0)$-তে যে continuous নয় সেটা বোঝাই যাচ্ছে, কারণ যদি $y = x^2$ বরাবর $(0, 0)$-র দিকে এগোও, তবে limit পাবে 1, যেটা মোটেই $f(0, 0) = 0$-র সমান নয়। ■

এবার আরেকটু জটিল একটা উদাহরণ। এখানেও সবগুলো directional derivative আছে, এমন কি function-টা continuous-ও বটে। কিন্তু তাও differentiable নয়।

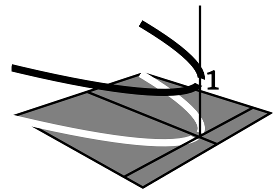


Fig 4

Example 5: ধরো

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $(0,0)$-তে এর সবগুলো directional derivative-ই আছে, কিন্তু তাও সেখানে $f(x,y)$ মোটেই differentiable নয়।

SOLUTION: যেকোনো একটা $\mathbf{u} \equiv (u,v) \neq \mathbf{0}$ নেওয়া যাক। এইটা বরাবর $(0,0)$-তে directional derivative বার করার জন্য আমরা নেব

$$g(t) = f(\mathbf{0} + t\mathbf{u}) = f(tu, tv) = \cdots = \frac{tuv^4}{(u^2+v^2)^2},$$

এবং $g'(0)$ বার করব। দেখাই যাচ্ছে যে

$$g'(0) = \frac{uv^4}{(u^2+v^2)^2}.$$

সুতরাং যেকোনো $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$-র জন্যই directional derivative আছে। যদি f-টা $\mathbf{0}$-তে differentiable হত, তবে আগের theorem-টা অনুযায়ী এই directional derivative-টাকে $D\mathbf{u}$ আকারে লেখা যেত, যেখানে $D_{1\times 2}$ হত $\mathbf{0}$-তে f-এর derivative matrix. তাই যদি যেত, তবে ধরো $D = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, এবং সেক্ষেত্রে $D\mathbf{u} = au + bv$. এটা কোনোভাবেই $\frac{uv^4}{(u^2+v^2)^2}$ হতে পারে না, কারণ $au + bv$ হল একটা চমৎকার linear function, কিন্তু $\frac{uv^4}{(u^2+v^2)^2}$ মোটেই তা নয়! ■

Exercise 6: এমন একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ দাও, যার $(0,0)$-তে $(1,2)$ বরাবর directional derivative আছে, কিন্তু ওই $(0,0)$-তেই $(2,1)$ বরাবর directional derivative নেই। ■

Exercise 7: এমন কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ দিতে পারো, যার জন্য $\mathbf{0}$-তে যেকোনো unit vector বরাবরই directional derivative হয় 1? ■

14.2 Component ব্যবহার করে

মনে আছে নিশ্চয়ই যে, কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ আসলে m-খানা function মিলিয়ে তৈরী, যারা প্রত্যেকেই $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. এদের বলে একেকটা component function. যেমন $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ যদি এরকম হয়--

$$f(x,y) = (x+y,\ x^2y,\ \sin y),$$

তবে তার component function-রা হল $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x^2y$ এবং $f_3(x,y) = \sin y$.

গত অধ্যায়েই আমরা বলেছি যে--

যদি f-এর সবগুলো component function-ই differentiable হয়, তবে (এবং একমাত্র তবেই) f-টা differentiable হবে।

যেমন, যদি $f(x,y) = (\sin(x+y), e^{xy}, x+5y)$ দিই, অমনি তুমি বলে দিতে পারবে যে, এটা সর্বত্র differentiable হবে, কারণ এর component function-গুলো সকলেই ভদ্রসভ্য, দেখেই বোঝা যাচ্ছে ওরা প্রত্যেকে differentiable. গত অধ্যায়ে এটা বলেছি, কিন্তু প্রমাণ করি নি। এবার এটাকে একটা theorem-র আকারে লিখে প্রমাণ করে রাখা যাক।

THEOREM

Let $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Let the component functions of f be $f_1,\ldots,f_m$. Then f is differentiable at $\mathbf{a}$ if and only if $\forall i$ f_i is differentiable at $\mathbf{a}$.

Proof: এটা একটা if and only if-জাতীয় theorem. মানে দুটো শর্ত আছে, যাদেরকে সমার্থক দেখাতে হবে--

- একদিকে আছে "f is differentiable at $\mathbf{a}$", অর্থাৎ কোনো একটা matrix আছে $M_{m\times n}$ যাতে $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ হলে--

$$\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\to\mathbf{0}.$$

- অন্য দিকে আছে "$\forall i$ f_i is differentiable at $\mathbf{a}$", অর্থাৎ এমন M_i আছে $(1\times n)$, যাতে $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ হলে--

$$\forall i \quad \frac{f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_i(\mathbf{a})-M_i\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\to 0,$$

প্রমাণটা অতি সংক্ষিপ্ত। খালি একটা কথা মনে রাখলেই চলবে--

"$(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)$ হওয়া" আর "$\forall i \quad x_i\to 0$ হওয়া" সমার্থক।

> If for any $M_{m\times n}$, the rows are denoted by $M_1,\ldots,M_m$ (each a $1\times n$ matrix), then
>
> $$= \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$$
> $$= \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_1(\mathbf{a})-M_1\mathbf{h} \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_1(\mathbf{a})-M_m\mathbf{h}\end{bmatrix}.$$

সুতরাং $\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$-এর component-গুলোই হল আসলে $\frac{f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_i(\mathbf{a})-M_i\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$.

> Thus, as $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$,
>
> $$\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\to\mathbf{0} \iff \forall i \quad \frac{f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_i(\mathbf{a})-M_i\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\to 0,$$
>
> completing the proof.

∎

[Q.E.D]

DAY 15
Necessary এবং sufficient কিছু শর্ত

ধরো একটা function দেওয়া আছে, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. কী করে বুঝব সেটা differentiable কিনা? সরাসরি সংজ্ঞা লাগানোটা একটা কায়দা বটে, কিন্তু সবসময়ে সেটা সহজ নাও হতে পারে। তাই আমরা কিছু necessary শর্ত আর কিছু sufficient শর্ত শিখে রাখব। Necessary শর্তগুলো কাজে লাগবে কোনো function-কে differentiable নয় দেখাতে, কারণ যদি necessary শর্তদের একটাও ক্ষুণ্ণ হয়, অমনি বলতে পারব যে, function-টা বা differentiable হতে পারে না। Sufficient শর্তগুলো কাজে লাগবে কোনো function-কে differentiable দেখাতে, কারণ একটাও sufficient শর্ত পালিত হলেই জোর দিয়ে বলা যাবে যে, function-টা differentiable. সবশেষে continuity-র একটা sufficient শর্তও আলোচনা করব।

15.1 Necessary conditions for differentiability

Differentiability-র জন্য কয়েকটা necessary শর্ত ইতিমধ্যেই শিখেছি। সেগুলো মনে করে শুরু করি--

- এক, partial derivative-গুলো exist করতে হবে।
- দুই, এরই একটু জোরালো সংস্করণ--সবগুলো directional derivative-কেও exist করতে হবে।

এদের ব্যবহার করে একটা অংক করা যাক।

Example 6: Show that $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ is not differentiable at $(0,0)$.[5] **(2010.19)**

SOLUTION: Function-টাকে দেখেই কেমন যেন $|x|$-এর কথা মনে পড়ে, যেটা $x=0$-তে differentiable নয়। যদি $f(x,y)$-এর মধ্যে $x=y$ বসাই, তবে সত্যিই $f(x,x)=|x|$ হয়। এখানে $x=y$ বসানো মানে যে $(1,1)$ বরাবর directional derivative নেওয়া, সেটা আশা করি বুঝতে পারছ।

> Let, if possible, $f(x,y)$ be differentiable at $(0,0)$.
> Then its directional derivative along $(1,1)$ at $(0,0)$ should exist.

এখানেই আমরা একটা necessary condition লাগালাম।

> This directional derivative is $g'(0)$, where $g(t)=f((0,0)+t(1,1))$.
> Now
> $$g(t)=f(t,t)=\sqrt{t^2}=|t|,$$

এখানে absolute value-টা কী করে এল বুঝলে তো? $\sqrt{\cdot}$ মানে হল nonnegative square root, তাই। যেমন $\sqrt{(-2)^2}=2$.
বুঝতেই পারছ $g(t)$ মোটেই $t=0$-তে differentiable নয়--

> which is not differentiable at $x=0(\Rightarrow\Leftarrow)$

এই contradiction থেকেই আমরা বলতে পারি যে--

> So $f(x,y)$ cannot be differentiable at $(0,0)$.

■

Exercise 8: Is the function $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ differentiable at $(0,0)$? Justify you answer.[3] **(2004)**
HINT: প্রায় আগের অংকটাই। কিন্তু এখানে বলে দেয় নি differentiable হবে কিনা। সেটা কী করে আন্দাজ করব? তার একটা কায়দা এইরকম--প্রথমেই দ্যাখো partial derivative দুটো আছে কিনা। না থাকলে গল্প শেষ, differentiable হতে পারে না। এখানে অবশ্য আছে, দুজনেই 0. সুতরাং যদি differentiable হতে হয়, তবে প্রতিটা directional derivative-কেই 0 হতে হয়। তেমনটা হবার কোনো কারণ চোখে পড়ছে না। এবার একটু এদিক-ওদিক ঢুঁ মারতে হবে, কয়েকটা সহজ directional derivative হাতেকলমে করে দেখার চেষ্টা করতে পারো। এবং সেটা করতে গিয়েই চোখে পড়বে যে $(1,1)$ বরাবর directional derivative-টা exist করছে না। অবশ্য $(1,1)$-এর মধ্যে কোন ম্যাজিক নেই। চাইলে $(1,2)$ বা $(3,-5)$ বা অন্য কোনো দিক বরাবরও directional derivative বার করার চেষ্টা করে দেখতে পারো, একই ফল পাবে। ■

এবার আরেকটা necessary শর্ত বলব। স্কুলে ক্যালকুলাস শেখার সময়ে শিখেছিলাম যে, differentiability-র একটা necessary শর্ত হল continuity. এখানেও সেটা খাটে। নীচের অংকের বক্তব্য সেটাই।

Example 7: Show that differentiability of f at (a,b) implies the continuity of f at (a,b).[2] **(2012, 2006)**
SOLUTION: এখানে (a,b)-র উল্লেখ থেকে বুঝতে পারছি যে f-এর domain হল $\mathbb{R}^2$. কিন্তু codomain সম্পর্কে কিছু বলে দেয় নি। আমরা ধরে নিচ্ছি codomain-টা হল $\mathbb{R}$.

> Let $\mathbf{a} = (a,b)$. Then from the definition of differentiability, we have
>
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - [f(\mathbf{a}) + M\mathbf{h}]}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$
>
> for some matrix $M_{1\times 2}$. So
>
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - [f(\mathbf{a}) + M\mathbf{h}] = 0$$
>
> and hence
>
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a})$$
>
> or, writing $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{h}$,
>
> $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$
>
> So f is continuous at (a,b) as required.

■

Example 8: Let $f : S \to \mathbb{R}$ where S is an open set in $\mathbb{R}^2$ and let f be differentiable at a point $(a,b) \in S$. Prove that f is continuous at (a,b). Is the converse true? Justify your answer.[2+3] **(2012.4)** প্রথম অংশ তো আগের অংকেই করেছি এবার converse-টার পালা। Converse-টা ঠিক নয় মোটেই। যদি

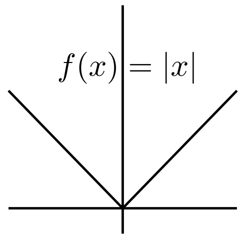


Fig 5

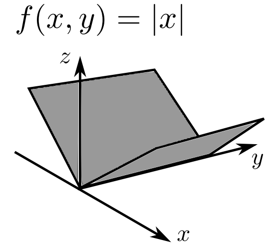


Fig 6

তোমাকে real analysis-এর বেলায় counterexample দিতে বলতাম, তবে কী দিতে? সম্ভবতঃ $|x|$, তাই না? এর গ্রাফটা ছিল Fig 5-এর মত। এখানেও আমরা তাই নেব, তবে দুটো variable ব্যবহার করে, ফলে গ্রাফটা দেখতে হবে Fig 6-এর মত।

> Counterexample: Let $f(x, y) = |x|$. Then $f(x, 0) = |x|$, which is not differentiable at $x = 0$. So $\frac{\partial f}{\partial x}$ does not exist at $(0, 0)$. Hence f cannot be differentiable at $(0, 0)$.
> But f is continuous there.
>
> ⟦ Because:
>
> Take any $\epsilon > 0$. Choose $\delta = \epsilon$. Then whenever $(x, y) \in N_2((0, 0), \delta)$ we have $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, and so $|x| \le \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$.
>
> ⟧

■

নীচের অংকটা একইরকম।

Exercise 9: Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Show that f is not differentiable at $(0, 0)$, though it is continuous at that point.[3+2] **(2009, 2008, 2007)** ■

15.2 Sufficient condition for differentiability

এবার আমরা differentiability-র একটা sufficient condition দেব। শর্তটা দেখতে খুব উপাদেয় নয় অবশ্য।

A sufficient condition for differentiability

Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Let $(a,b) \in D$.
If

- f_x exists over a neighbourhood of (a,b) and is continuous at (a,b),
- and f_y exists at (a,b),

then f must be differentiable at (a,b).

Proof: প্রমাণের ধাপগুলো না বুঝে পড়লে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। তাই প্রথমে খুঁটিনাটিগুলো বাদ দিয়ে মূল ধারণাটা দিয়ে নিই। কোনো বিন্দু $\mathbf{a}$-তে f-এর differentiable হওয়া মানে হল এমন এমন একটা matrix আছে, $M_{1\times 2}$, যাতে $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ হলে

$$\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$$

হয়। আমরা এও জানি যে এমনটা যদি হতে হয়, তবে M-কে Jacobian matrix হতে হবে। সুতরাং $\mathbf{a} = (a,b)$ এবং $\mathbf{h} = (h,k)$ লিখলে ব্যাপারটা দাঁড়ায় এরকম--

> $f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k$ এমন একটা জিনিস, যাকে $\sqrt{h^2+k^2}$ দিয়ে ভাগ করার পরও শূন্যের দিকে যায়।

এই অব্ধি কোনো প্যাঁচ নেই। প্যাঁচটা আসছে এইবার। আমরা $f(a+h,b+k) - f(a,b)$-কে দুটো অংশে ভেঙে লিখব--

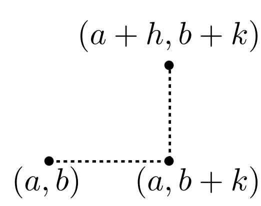
$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \underbrace{f(a+h,b+k) - f(a,b+k)}_{A} + \underbrace{f(a,b+k) - f(a,b)}_{B}.$$

ঠিক যেন আমরা সরাসরি (a,b) থেকে $(a+h,b+k)$-তে না গিয়ে মাঝখানে $(a,b+k)$-কে ছুঁয়ে গেলাম (Fig 7)। এর ফলে $f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k$-টা দুটো অংশে ভেঙে গেল--

> $A - f_x(a,b)h$ এবং $B - f_y(a,b)k$.

আমরা আলাদা করে দেখাব যে এদের দুজনকেই $\sqrt{h^2+k^2}$ দিয়ে ভাগ করলেও ওরা শূন্যের দিকে যায়। Theorem-টায় যে দুটো শর্ত দিয়েছে, তার একেকটা কাজে লাগবে একেকটা অংশের জন্য।
এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে প্রমাণটা পড়। আর হ্যাঁ, এখানে আমরা f_x-এর continuity এবং f_y-এর existence ধরেছি, চাইলে উল্টোটাও করতে পারতে, তাতে একইরকম আরেকটা theorem পেতে।

Fig 7



By the first condition, f_x exists in some neighbourhood $N_2((a,b),\delta)$ of (a,b).
Let $(a+h,b+k)$ be any point in this neighbourhood.

এবার আমরা সেই ঘুরপথের ব্যাপারটা করব, মানে (a,b) থেকে $(a+h,b+k)$-এ যাব $(a,b+k)$-কে ছুঁয়ে। লক্ষ করো $(a+h,b+k)$ যেহেতু neighbourhood-টার মধ্যে আছে, তাই $(a,b+k)$-ও neighbourhood-টার মধ্যে থাকতে বাধ্য।

Then

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\underbrace{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}_{A}+\underbrace{f(a,b+k)-f(a,b)}_{B}.$$

Now, by mean value theorem,

$$A=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=h\,f_x(a+\theta h,b+k),$$

where $\theta\in(0,1)$.

এবার আমরা দেখাব যে, $(h,k)\to(0,0)$ হলে $\frac{A-hf_x(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$ হবে।

So

$$A-h\,f_x(a,b)=h\underbrace{[f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)]}_{P}.$$

আমাদের উদ্দেশ্য তো $\frac{h\,P}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$ দেখানো। যেহেতু $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\le 1$, তাই খালি $P\to 0$ দেখাতে পারলেই চলবে।

Now, by continuity of f_x at (a,b), we have

$$P=f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\to 0$$

as $(h,k)\to(0,0)$.
Hence $\frac{A-h\,f_x(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$.

ব্যস্‌, প্রথম কেল্লা ফতে! এবার দ্বিতীয় অংশটা নিয়ে পড়া যাক।

Also

$$B=f(a,b+k)-f(a,b)=k\times\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

আমাদের দেখাতে হবে $\frac{B-k\,f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$. তার জন্য $B-k\,f_y(a,b)$-কে একটু সাজিয়ে লিখি--

So

$$B - k\,f_y(a,b) = k \times \left[\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} - f_y(a,b) + f_y(a,b)\right] = k\underbrace{\left(\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} - f_y(a,b)\right)}_{Q} + k\,f_y(a,b).$$

দেখাতে হবে যে একে $\sqrt{h^2+k^2}$ দিয়ে ভাগ করলেও শূন্যতে যায়। আগের মতই এখানেও $Q \to 0$ দেখানোই যথেষ্ট। সেটা দেখানোর কায়দাটা অবশ্য খানিকটা অন্যরকম--

By definition of $f_y(a,b)$ we see that

$$Q = \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} - f_y(a,b) \to 0$$

as $(h,k) \to (0,0)$.
Hence $\frac{B-k\,f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$.

দ্বিতীয় কেল্লাতেও বিজায়পতাকা ওড়ানো গেল! এবার উপসংহারটুকু লেখার পালা--

Thus

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\,f_x(a,b)-k\,f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{A-h\,f_x(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{B-k\,f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0,$$

as $(h,k) \to (0,0)$.
Hence $f(x,y)$ is differentiable at (a,b), as required.

[Q.E.D]

Exercise 10: Let f be a real valued function defined over $D \subseteq \mathbb{R}^2$ and $(a,b) \in D$. Prove that if $f_y(a,b)$ exists and f_x is continuous at (a,b) then f is differentiable at (a,b).[5] **(2011.19)**
HINT: এখানে আসলে আগের theorem-টার প্রমাণই চেয়েছে, কিন্তু শর্তে একটা সামান্য গোলমাল করেছে। খালি বলেছে f_x is continuous at (a,b). যেটা আরো বলা দরকার ছিল, সেটা হল f_x is defined over a neighbourhood of (a,b). কোনো একটা function কোথাও continuous মানেই এই নয় যে সেটা তার neighbourhood-এও defined হতে হবে, যেমন ধরো যদি একটা function নিই, $g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ যেখানে $g(x) = x$, তবে g অবশ্যই 1, 2 এবং 3 এই তিন জায়গাতেই continuous, কিন্তু ওদের কোনো neighbourhood-এই defined নয়। ■

একটা শর্তকে sufficient জানলেই পরবর্তী প্রশ্ন ওঠে সেটা necessary কিনা। সেই নিয়েই এবারের প্রশ্নটা।

Example 9: Let $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ where

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

Show that f is differentiable at $(0,0)$ but f_x, f_y are not continuous at $(0,0)$.[5] **(2011.20)**
SOLUTION:

Here

$$f(x,0)=g(|x|)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{|x|} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}.$$

এখানে $f(x,0)=g(|x|)$ হল, কারণ $\sqrt{x^2+0^2}=|x|$.

So

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|}\\ &= 0, \end{aligned}$$

by sandwich law since $\left|\sin\frac{1}{|x|}\right|\leq 1$.

এখানে sandwich law কী করে লাগানো হল, বুঝেছ তো? $x\sin\frac{1}{|x|}$ রয়েছে $-x$ থেকে x-এর মধ্যে। যখন $x\to 0$ হবে তখন $-x\to 0$-ও হবে, তাই $x\sin\frac{1}{|x|}\to 0$ না হয়ে যায় কোথায়?

Similarly, $f_y(0,0)=0$.

So the Jacobian matrix is $M=\begin{bmatrix} 0 & 0\end{bmatrix}$.

Hence to check the required differentiability we have to check if

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{0})-M\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}=0,$$

ie, writing $\mathbf{h}=(x,y)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

ie,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

which is obviously true, by the sandwich law.

So f is differentiable at $(0,0)$.

এইবার দেখাতে হবে যে f_x বা f_y কেউই $(0,0)$-তে differentiable নয়।

Now for $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Here, for $x \neq 0$, we have $g'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
So, writing $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{r} - \frac{x}{r}\cos\frac{1}{r}.$$

As we approach $(0,0)$ along the x-axis, the second term does not have a limit. So f_x is not continuous at $(0,0)$.
Similarly, f_y also is not continuous there.

এখানে “similarly” লিখে ছেড়ে দিলাম, তুমি একটু কষিয়ে দেখিয়ে দিতে পারো। ■

একইরকম আরেকটা অংক।

Exercise 11: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + y^2\sin\frac{1}{y} & \text{if } x\neq 0, y\neq 0 \\ x^2\sin\frac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ y^2\sin\frac{1}{y} & \text{if } y\neq 0 \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Prove that f_x, f_y exist at $(0,0)$, but none is continuous. Examine the differentiability of f at $(0,0)$. [5] **(2015, 2006)**
HINT: দুটো জিনিস লক্ষণীয়--এক, $f(x,y) = f(y,x)$ হওয়ায় f_x নিয়ে অংকটুকু করলেই হবে, একই জিনিস f_y-এর জন্যও বলা যাবে। দুই, এখানে দ্বিতীয় লাইনে শর্তটা $x \neq 0$ না হয়ে $x\neq 0,\ y=0$ হওয়া উচিত ছিল। একইভাবে তৃতীয় লাইনে থাকা উচিত ছিল $y\neq 0,\ x=0$. ■

Exercise 12: State a set of sufficient conditions for differentiability of a function of two variables. Are these conditions necessary? Justify your answer.[5] **(2017.3)**
HINT: এই প্রশ্নের ভাষাটা একটু বোকা-বোকা। যেমন ধরো, যদি differentiability-এর সংজ্ঞাটাকেই তুমি শর্ত হিসেবে লিখে দাও, তবে সেটা অবশ্যই sufficient condition হবে, এবং necessary condition-ও হবে। কিন্তু যারা পরীক্ষায় এই প্রশ্নের সম্মুখীন হবে, তারা সেই সহজ কথাটা লিখে এলে পরীক্ষকমশাই খুশী নাও হতে পারেন। বিঘৎখানেক গপ্প না লিখলে পাঁচ-পাঁচটা নম্বরের মান থাকে কী করে? সেই বিপদের হাত থেকে রক্ষা পেতে তুমি এক্ষুণি আমরা যে শর্তগুলো আলোচনা করলাম সেটা দিতে পারো। এরা অবশ্য necessary নয়। তার জন্যে একটা counterexample দেওয়া উচিত। আগের অংকগুলোর মধ্যেই এরকম একটা counterexample লুকিয়ে আছে। ■

Example 10: State the sufficient conditions for differentiability of a function $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Examine whether the sufficient conditions of differentiability are satisfied for the following function $f(x,y)$ and hence comment on the differentiability of $f(x,y)$ at $(0,0)$ where

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{when } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{when } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

[1+4] **(2020.13)**

HINT: এই অংকটার ভাষাটা একটু হাস্যকর। বলেছে "State the sufficient conditions...", যেন দুনিয়ায় এরকম ঠিক একপ্রস্থ sufficient শর্তই সম্ভব। বস্তুতঃ কেউ যদি এই প্রশ্নের উত্তরে differentiability-র সংজ্ঞাটাকেই sufficient শর্ত বলে লিখে দেয়, তাহলেও যুক্তির বিচারে ভুল হয় না। যাই হোক, এক্ষুণি যে theorem-টা দিলাম, এখানে সম্ভবতঃ প্রশ্নকর্তা সেটার কথাই বলতে চেয়েছেন।
সেই মত এখানে তোমাকে f_x এবং f_y এরা দুজন $(0,0)$-তে continuous কিনা সেটা পরীক্ষা করে দেখতে হবে। ■

15.3 Sufficient condition for continuity

Example 11: State and prove a sufficient condition for continuity of a bivariate function.

SOLUTION:

> Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Let (a,b) be an interior point of D.
> If
>
> - f_x exists and is bounded in a neighbourhood of (a,b), and
> - f_y exists at (a,b),
>
> then
>
> f is continuous at (a,b).

প্রমাণটা এখানেও আগের theorem-টার প্রমাণের মত করেই এগোবে।

> Proof: By assumption f_x exists and is bounded in some neighbourhood $N_2((a,b),\delta)$. Take any $(a+h,b+k)$ in this neighbourhood.

এবার আমরা (a,b) থেকে $(a+h,b+k)$-তে যাব ঘুরপথে, $(a,b+k)$-কে ছুঁয়ে।

> Then
>
> $$\begin{aligned} & f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ = \quad & \underbrace{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}_{A}+\underbrace{f(a,b+k)-f(a,b)}_{B}. \end{aligned}$$

এবার দেখাব যে, $(h,k)\to(0,0)$ হলে A আর B দুজনেই 0-র দিকে যাবে--

> Then, by Lagrange's mean value theorem,
>
> $$\begin{aligned} A &= f(a+h,b+k)-f(a,b+k) \\ &= h(f_x(a+\theta h,b+k) \quad \left[\text{ for some } \theta\in(0,1)\right] \\ &\to 0 \text{ as } h\to 0, \end{aligned}$$
>
> since f_x is bounded in the neighbourhood.

Again,

$$\begin{aligned} B &= k \times \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \\ &\to 0 \times f_y(a,b) = 0 \end{aligned}$$

as $k \to 0$.
So

$$f(a+h,b+k) \to f(a,b) \text{ as } (h,k) \to (0,0),$$

completing the proof.

■

Exercise 13: State and prove a set of sufficient condition for continuity of a real valued function of two real variables at a point of the domain of definition of the function.[2+3] **(2012.3)**
HINT: আগের অংকের সমাধানটা এখানেও ব্যবহার করতে পারো। সেক্ষেত্রে তোমাকে এখানে sufficient শর্তের মধ্যে এটাও ধরে নিতে হবে যে point-টা domain-এর একটা interior point. ■

Exercise 14: State and establish a set of sufficient condition under which a function $f : S \to \mathbb{R}$ ($S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) may be continuous at a point of S.[1+4] **(2007.8)**
HINT: একই অংক আবার একটু অন্য ভাষায়। এখানেও interior point ধরে নিতে হবে। ■

DAY 16
Functional dependence

এবার যে বিষয়টা আলোচনা করতে চলেছি, সেটা অধিকাংশ আধুনিক বইতেই আলোচিত হয় না। যেসব বইতে হয়ও, সেখানেও অনেক সময়ে সব খুঁটিনাটি গুছিয়ে লেখে না। আমাদের বইতেও আমরা বেশী গভীরে যাব না। যারা বেশী গভীরে যেতে চাও, তাদের পক্ষে W.F. Newns-এর লেখা Functional Dependence প্রবন্ধটা আদর্শ। এটি 1967-এ প্রকাশিত হয়েছিল। আমাদের এই বইয়ের ওয়েবপেজ থেকে (`https://arnabc74.github.io/mult/`) এই paper-টা ডাউনলোড করতে পারো। তবে আমাদের সিলেবাসের জিনিসপত্র বোঝার জন্য যেটুকু দরকার সেটা এই বইতেই সহজ ভাষায় লিখে দিয়েছি, তার জন্য গুরুভার প্রবন্ধ হাতড়াতে হবে না।
অনেক সময়ে দেখা যায় যে, কিছু function-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক থাকে। যেমন $f_1(x,y) = x^2+y^2+2xy$ আর $f_2(x,y) = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$ হলে ওদের মধ্যে একটা সম্পর্ক আছে। যেহেতু $f_2(x,y) = (x+y)^2$ এবং $f_3(x,y) = (x+y)^3$, তাই $f_1^3 - f_2^2 \equiv 0$ হবে। কিন্তু যদি $g_1(x,y) = x+y$ আর $g_2(x,y) = x-y$ নিই, তবে এই জাতীয় কোনো সম্পর্ক পাবে না। এরকম কয়েকটা function দেওয়া থাকলে তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি নেই, সেটা বোঝা বেশ কঠিন হতে পারে। অনেকক্ষণ চেষ্টা করেও কোনো সম্পর্ক না পাওয়া গেলেই তুমি জোর দিয়ে বলে পারো না যে, ওদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই। হয়তো খুব জটিল কোনো সম্পর্ক আছে, যেটা আপাততঃ তোমার চোখে পড়ছে না। এইখানে একটু ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। ছবিগুলো আমরা আঁকব গ্রাফ কাগজের বিকৃতি হিসেবে।

Example 12: একটু আগে যে f_1 আর f_2-র কথা বললাম, ওদেরকে component হিসেবে নিয়ে একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

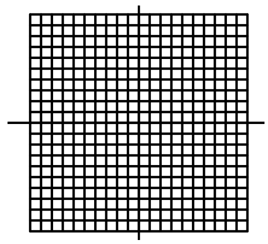


Fig 8

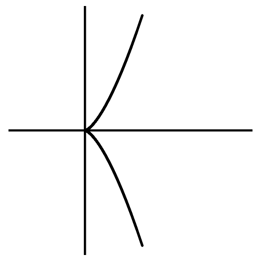


Fig 9

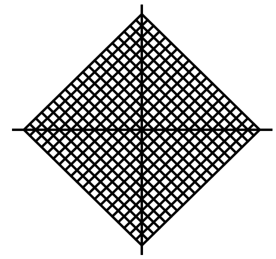


Fig 10

বানানো যাক--

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2xy,\ x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y).$$

গ্রাফ কাগজের বিকৃতি হিসেবে এটাকে দেখতে কীরকম হবে?

SOLUTION: আমরা ছবিটা এক্ষুণি দেব, কম্পিউটারে এঁকে। কিন্তু কম্পিউটার ছাড়াই কী করে ভাবা যায় বলি। যাই x, y নাও, $f_1(x, y)$ হবে $x + y$-এর square আর $f_2(x, y)$ হবে $x + y$-এর cube. উদাহরণস্বরূপ, যেসব বিন্দুতে $x + y = 5$ হবে (যেমন, $x = 1, y = 4$ বা $x = 10, y = -5$ এইরকম), এরা সকলেই গিয়ে পড়বে $(5^2, 5^3) = (25, 125)$ বিন্দুতে। এইভাবে আন্দাজ করতে পারছ যে Fig 8-র গ্রাফ কাগজের প্রতিটা বিন্দুই (t^2, t^3) জাতীয় বিন্দুতে পরিণত হবে, ফলে পুরো জিনিসটা কেমন চিমসে দড়ি হয়ে যাবে (Fig 9), যে দড়ির প্রতিটা বিন্দুই (t^2, t^3) আকারের। ■

এবার এর সঙ্গে তুলনা করো g_1, g_2-র ব্যাপারটা। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 13: আমরা $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ নেব $g(x, y) = (x + y, x - y)$. এবার গ্রাফ কাগজটার কী দশা হবে?

SOLUTION: উত্তরটা রয়েছে Fig 10-এ। এবার কিন্তু মোটেই চিমসে দড়ি হয়নি। ■

এইভাবে চিমসে দড়ি হয়ে যাওয়া বা না যাওয়া থেকেই বোঝা যায় function-গুলোর মধ্যে কোনো একটা সম্পর্ক আছে কি নেই। যদি চিমসে দড়ি হয়ে যায়, তবে function-গুলোকে অংকের ভাষায় বলে **functionally related**.

DEFINITION: **Functionally related**

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ have component functions $f_1, ..., f_n$. We say that $f_1, ..., f_n$ are **functionally related** if there is a function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that $F(f(\mathbf{x})) \equiv 0$ but

$$\text{range}(f) \subseteq \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ F(\mathbf{y}) \neq 0\}}.$$

এমনিতে সংজ্ঞাটা বেশ সহজই ছিল, খালি ওই শেষের বদখত শর্তটার কী দরকার বোঝা যাচ্ছে না। যদি এমন কোনো $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ পাওয়া যায়, যার পেটে $f_1, ..., f_n$-দের ঢুকিয়ে দিলেই সব সময়ে শূন্য হয়ে যায়, তবেই তো functionally related হয়ে যাওয়া উচিত বলে মনে হয়, তাই না? আসলে তা না, কারণ সেক্ষেত্রে যদি $F \equiv 0$ নিই, তবে যেকোনো $f_1, ..., f_n$-ই functionally related হয়ে যাবে! তাই আমরা এমন F চাই, যেটা ঠিক ওই চিমসানো দড়িটুকু বরাবরই শূন্য হয়। একটা উদাহরণ নিয়ে বুঝে নেওয়া যাক।

Example 14: একটু আগে আমরা $f_1(x, y)$ আর $f_2(x, y)$ নামের দুটো function দেখেছিলাম। সেখানে $f_1^3 - f_2^2 \equiv 0$ হয়েছিল, মানে যদি $F(u, v) = u^3 - v^2$ নিই, তবে $F(f_1(x, y), f_2(x, y)) \equiv 0$ হবে। আমরা Fig 11-এ $F(u, v)$-এর গ্রাফ এঁকেছি। লক্ষ করো, এটা কোথায় শূন্য হচ্ছে (মানে xy-plane-কে ছেদ করছে)। ঠিক একটা curve বরাবর (ড্যাশ্ ড্যাশ্

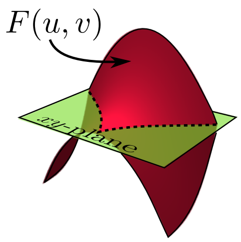


Fig 11



Fig 12

দিয়ে দেখানো)। $F(u,v)$-র surface-টা কোথাও কিন্তু xy-plane-এর গায় লেপটে নেই, যেমন আছে Fig 12-এর বেলায়। ■

কোথাও লেপটে থাকলে তা দিয়ে functionally related-এর কাজ হবে না। এই ব্যাপারটাকেই অংকের ভাষায় লিখতে গিয়ে সংজ্ঞার ওই শেষের শর্তটাকে পাওয়া গেছে। ওর মানে হচ্ছে যদিও range($\mathbf{f}$) বরাবর (মানে দড়িটা বরাবর) F-টা শূন্য হচ্ছে, কিন্তু সেখান থেকে সামান্যমাত্র সরলেই $F \neq 0$ হয়ে যাবে। সেই কারণে যদি $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ : \ F(\mathbf{u}) \neq 0\}$ নিই, তবে range($\mathbf{f}$)-টা এর মধ্যে না থাকলেও এর closure-এর মধ্যে থাকবে।
সংজ্ঞা তো বোঝা গেল, ছবি দিয়ে ভাবাও গেল। কিন্তু কয়েকটা function দিয়ে যদি পরীক্ষা করে দেখতে বলে ওরা functionally related কিনা, তবে কী করব? কম্পিউটার দিয়ে ছবি আঁকতে বসব? না, তার চেয়ে সহজ উপায় আমরা আগেই শিখেছি। চিমসে দড়ি হয়ে যাওয়া মানে Jacobian-এর determinant শূন্য হয়ে যাওয়া। সেটা ব্যবহার করেই functionally related কিনা বোঝা যাবে। নীচের theorem-টার সেটাই বক্তব্য।

THEOREM

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ have component functions $f_1, ..., f_n$, which are continuously differentiable. Then they are functionally related if and only if the Jacobian determinant of f is zero everywhere.

Example 15: আবার $f_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ এবং $f_3(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ নিয়ে এই theorem-টা ব্যবহার করে পরীক্ষা করে দ্যাখো functionally related কিনা।
SOLUTION: Jacobian-টা হচ্ছে

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ 3x^2+6xy+3y^2 & 3x^2+6xy+3y^2 \end{bmatrix}.$$

এর দুটো column-ই সমান, তাই determinant শূন্য হচ্ছে। অতএব সিদ্ধান্ত করতে পারি যে f_1 এবং f_2 হল functionally related. ■

Exercise 15: একইভাবে $g_1(x,y) = x + y$ এবং $g_2(x,y) = x - y$ নিয়ে Jacobian বানিয়ে দ্যাখো functionally related হচ্ছে কিনা। ■

Exercise 16: ধরো $f(x,y) = \sin(x+y)$ আর $g(x,y) = \cos(x+y)$. এরা কি functionally related? এখানেও Jacobian-এর determinant বার করে দ্যাখো কী হয়। ছবি দিয়ে ব্যাখ্যা করো। ■

Jacobian-এর কায়দায় functionally related কিনা সেটা পরীক্ষা করা যায় বটে, কিন্তু যদি functionally related হয়, তবে সেই relation-টা বার করার কোনো সুবিধা নাও হতে পারে। Relation-টা বার করার কোনো ভদ্র পদ্ধতি আছে বলে জানি না। অনেক সময়ে function-গুলোর দিকে খানিকক্ষণ চোখ পাকিয়ে কটমট করে তাকিয়ে থাকলেই কিছু একটা relation আন্দাজ করা যায়। সেরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 16: Show by using the method of Jacobian the functions

$$u = x + y - z, \quad v = x - y + z, \quad w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$$

are not independent. Find the relation among them.[5] **(2010.24)**

SOLUTION:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y-2z & -2y+2z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y-2z & -2y+2z \end{vmatrix} \quad \text{[adding row 2 to row 1]} \\ &= \cdots = 0.\end{aligned}$$

সুতরাং functional relation যে আছে তাতে কোনো সন্দেহ নেই।

Hence u, v and w are not independent.

কিন্তু কী করে ওদের মধ্যে একটা functional relation পাওয়া যাবে সেটাই এখন প্রশ্ন। এটা বার করার জন্য এক কথায় কোনো পদ্ধতি আছে বলে জানি না।
এখানে অবশ্য চোখে দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, u^2 আর v^2 মিলিয়ে w-এর মত কিছু একটা পাওয়া যাবে।

By inspection

$$u^2 + v^2 = 2x^2 + 2(y-z)^2 = 2w.$$

■

এই অংকটা দেখে মনে হতে পারে যে, চোখে দেখেই যদি relation বার করা গেল তো Jacobian-ফ্যাকোবিয়ানের দরকারটা কী? আসলে সব সময়ে চোখে দেখে চট্ করে কোনো functional relation পাওয়া যায় না, অনেকক্ষণ হাতড়াতে হয়। সেই হাতড়ানোটা যাতে পণ্ডশ্রম না হয়, তাই প্রথমেই Jacobian-এর শর্তটা পরীক্ষা করে নেওয়া ভালো। অনেক সময়ে আমাদের উদ্দেশ্য হয় functionally related নয় দেখানো। সেক্ষেত্রে determinant-এর কায়দাটা অপরিহার্য। যেমন নীচের অংকটায়।

Exercise 17: Show that $ax^2 + 2hxy + by^2$ and $Ax^2 + 2Hxy + By^2$ are independent unless

$$\frac{a}{A} = \frac{h}{H} = \frac{b}{B}.$$

[5] **(2012.9,2008.23,2006.15)**

HINT: এখানে ধরে নিতে হবে $A, B, H \neq 0$. প্রথমে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ নাও এইভাবে--

$$f(x, y) = (ax^2 + 2hxy + by^2,\ Ax^2 + 2Hxy + By^2).$$

এর Jacobian-এর determinant যদি সব x, y-এর জন্যই 0 হয়, তবে determinant-এর মধ্যে x^2 এবং xy এবং y^2, এদের সবারই coefficient শূন্য হতে হবে। সেখান থেকেই এটা আসছে। ■

Example 17: Let f be a real-valued function on $[1, \infty[$ and $f(1) = 0$. If $f'(x) = \frac{1}{x}$ for all $x \in [1, \infty[$ using Jacobians for function of two variables, prove that

$$f(x) + f(y) = f(xy) \quad (x, y \in [1, \infty[).$$

[5] **(2005.13)**

SOLUTION: প্রথমে notation নিয়ে একটা কথা বলে নিই-- ওই যে $[1, \infty[$ লিখেছে, ওর মানে হল $[1, \infty)$. এমনিতে অংকটা সহজই ছিল, কারণ differential equation-টা থেকে $f(x) = c + \log x$ পাবে। এবার $f(1) = 0$ বসালে $c = 0$ হবে। সুতরাং $f(x) = \log x$, তাই $f(x) + f(y) = \log x + \log y = \log xy = f(xy)$. সমস্যা হল এর মধ্যে কোনো Jacobian-এর ব্যাপার নেই। কিন্তু এখানে Jacobian ব্যবহার করতে বলেছে। প্রশ্নকর্তাকে খুশি করার জন্য আমরা তাই ঘুরিয়ে নাক দেখানোর চেষ্টা করব।

> Let $g_1(x, y) = f(x) + f(y)$, $g_2(x, y) = f(xy)$ and $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$.

অর্থাৎ, আমাদের যে $f(x) + f(y) = f(xy)$ দেখাতে বলেছে, তার বাঁদিকটাকে $g_1(x, y)$ এবং ডানদিকটাকে $g_2(x, y)$ নাম দিয়েছি। ওদেরকে component হিসেবে নিয়ে $g(x, y)$ বানানো হয়েছে।

> Then its Jacobian matrix is
>
> $$\begin{bmatrix} f'(x) & f'(y) \\ yf'(xy) & xf'(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{bmatrix} = J, \text{ say.}$$
>
> Clearly, $\det(J) = 0$, since J has identical rows.

আমরা দেখাতে চাইছি $g_1(x, y) = g_2(x, y)$, অর্থাৎ $g_1(x, y) - g_2(x, y) = 0$. ঘুরিয়ে নাক দেখানোর জন্য $g_1(x, y) - g_2(x, y)$-কে লিখব $F(g_1(x, y), g_2(x, y))$, যেখানে $F(u, v) = u - v$.

> We take $F(u, v) = u - v$ and consider $h(x, y) = F(g_1(x, y), g_2(x, y))$.

আমরা দুই ধাপে এগোব। প্রথমে দেখাব $h(x, y)$ আসলে একটা constant. তারপর দেখাব যে constant-টা শূন্য। এর মধ্যে প্রথম ধাপে Jacobian লাগাব--

> Now
>
> $$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
>
> So $h(x, y) \equiv$ constant.

এবার দেখাতে হবে যে constant-টা শূন্য।

> Putting $x = y = 1$, we get $h(1,1) = f(1) + f(1) - f(1\times 1) = 0$. So the constant is 0.
> Hence $h(x,y) \equiv 0$, ie, $F(g_1(x,y), g_2(x,y)) \equiv 0$, ie, $g_1(x,y) = g_2(x,y)$,
> or $f(x) + f(y) = f(xy)$, as required.

■

এবার তোমার করার জন্য কয়েকটা অংক।

Exercise 18: Prove that the following three functions u, v, w are functionally related:

$$u = \frac{x}{y-z}, \quad v = \frac{y}{z-x}, \quad w = \frac{z}{x-y}.$$

Also find the relation among u, v, w.[5] **(2018, 2015, 2007)**

HINT:

প্রথমে Jacobian বার করে নাও। একটু সাজিয়ে লিখলে হবে--

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y-z} & -\frac{x}{(y-z)^2} & \frac{x}{(y-z)^2} \\ \frac{y}{(z-x)^2} & \frac{1}{z-x} & -\frac{y}{(z-x)^2} \\ -\frac{z}{(x-y)^2} & \frac{z}{(x-y)^2} & \frac{1}{x-y} \end{bmatrix} = \frac{1}{(x-y)(y-x)(z-x)} \begin{bmatrix} 1 & -u & u \\ v & 1 & -v \\ -w & w & 1 \end{bmatrix}.$$

লক্ষ করো যে, এটা শূন্য হবার জন্য ওই শেষের determinant-টাকে শূন্য হতে হবে। যেহেতু ওই determinant-টা কেবল u, v আর w দিয়ে তৈরী, তাই ওখান থেকেই ওদের মধ্যে একটা relation পেয়ে যাবে।

■

Exercise 19: Show that $u = 3x + 2y - z$, $v = x - 2y + z$ and $w = x(x + 2y - z)$ satisfy the condition to be functionally related. Hence find the relating function.[4+1] **(2004.20)** ■

Exercise 20: Show that the functions $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ and $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ are not independent. Find the relation between u, v and w.[3+2] **(2017.7)** ■

DAY 17
Higher order derivatives

17.1 কী জিনিস?

ধরো $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ দেওয়া আছে, $f(x,y) = y + \sin x$. যদি $\frac{\partial f}{\partial x}$ বার করো, তবে পাবে $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$, যেটাও ফের $\mathbb{R}^2$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function. এটাকে যদি ফের x-এর সাপেক্ষে partially differentiate করো, তবে যেটা পাবে তাকে আমরা লিখি $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. অর্থাৎ কিনা--

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = -\sin x.$$

যদি $\frac{\partial f}{\partial x}$-কে y-এর সাপেক্ষে partially differentiate করো, তবে যেটা পাবে, সেটাকে বলব $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. অর্থাৎ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = 0.$$

লক্ষ করো নীচের তলার ∂x আর ∂y-এর মধ্যে কোনটাকে বাঁদিকে আর কোনটাকে ডানদিকে লিখেছি। যেটা প্রথমে করছ, সেটা ডানদিকে আছে। ঠিক function composition-এর মত। যেমন, $(f \circ g)(x)$ মানে হল $f(g(x))$. এখানে প্রথমে g বার করতে হয়, f আসে তার পরে। সেই মত g রয়েছে ডানদিকে, f রয়েছে তার বাঁদিকে। অনেক সময়ে লোকে যেমন $\frac{\partial f}{\partial x}$-কে f_x লিখে থাকে, তেমনি $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$-কে লেখে f_{xx}. একইভাবে $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$-কে লেখে f_{xy}. সাবধান, এবার কিন্তু y লিখেছি x-এর ডানদিকে!
এতক্ষণ প্রথমে x-এর সাপেক্ষে partial differentiation করছিলাম। যদি x-এর বদলে y দিয়ে শুরু করতাম, তবে পেতাম $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ এবং $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. এদেরকে f_{yy} এবং f_{yx}-ও লেখে। আমাদের উদাহরণে $f(x,y) = y + \sin x$. তাই এখানে $f_{yy}(x,y) = 0$ এবং $f_{yx}(x,y) = 0$ হবে।

Exercise 21: নীচের প্রতিটি $f(x,y)$-এর বেলায় f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} এবং f_{yx} বার করো। খেয়াল রেখো f_{xy} এবং f_{yx} আলাদা হচ্ছে কিনা।
(1) $f(x,y) = x^2y^3$, **(2)** $f(x,y) = e^x - \sin y^3$, **(3)** $f(x,y) = \sin(xy)$. ■

এই অংকটা করলে লক্ষ করবে প্রতিটা ক্ষেত্রেই f_{xy} আর f_{yx} সমান হচ্ছে। এটা কি কাকতালীয়, নাকি সব সময়েই হয়? এবার সেটাই আলোচনা করব।

17.2 Mixed partial derivative-দের সমান হওয়া

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ আর $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$-কে বলে **mixed partial derivative**. এরা যে সব সময়ে সমান হবেই এমন কোনো কথা নেই, কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রে সেটাই হয়ে থাকে। বস্তুতঃ যদি তোমাকে আমি এমন একটা function ভেবে বার করতে বলি, যার বেলায় এরা সমান হবে না, তবে সম্ভবতঃ তুমি সারাদিন ভেবেও সেরকম function বার করতে পারবে না। সেরকম একটা উদাহরণ আমরা এক্ষুণি দেব। কিন্তু তার আগের নীচের অংকটা করে একটু গা গরম করে নাও।

Example 18: ধরো

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

তবে $f_{xy}(0,0) = ?$
SOLUTION: এখানে আমরা প্রথমে f_x বার করব, এবং তারপর y-এর সাপেক্ষে তার partial derivative নেব। ভালো করে বুঝে নাও যে $(0,0)$-তে y-এর সাপেক্ষে f_x-এর partial derivative বার করার জন্য তোমার প্রয়োজন $f_x(0,y)$ জানা। সাবধান, এইখানে অনেক হোঁচট খায়, ভেবে বসে যে বুঝি $f_x(0,0)$ জানাই যথেষ্ট!
প্রথম কাজ তবে $f_x(0,y)$ বার করা। তার জন্য যেকোনো y স্থির রাখো, এবং $f(x,y)$-কে সেই y-এর জন্য খালি x-এর সাপেক্ষে $x = 0$-তে differentiate করো। যদি $y \neq 0$ হয়, তবে কাজটা সোজাই, খালি প্রথমে $\frac{xy^4}{x^2+y^2}$-কে x-এর সাপেক্ষে differentiate করতে হবে--

$$\frac{y^4(x^2+y^2) - xy^4(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

এবং তার মধ্যে $x = 0$ বসালেই পেয়ে যাবে $f_x(0,y) = y^2$. সাবধান, এখনই যেন ফূর্তির চোটে এটাকে differentiate করে $f_{xy}(0,0)$ বার করতে শুরু কোরো না! এখনও আমরা $y = 0$ হলে $f_x(0,y)$ কী হয়, সেটা দেখি নি। যদি $y = 0$ হয়, তবে শুরু করব $f(x,0)$ থেকে, সেটা হল $f(x,0) \equiv 0$. তাই $f_x(0,0) = 0$.
সুতরাং বলতে পারি

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_x(0,y) = y^2.$$

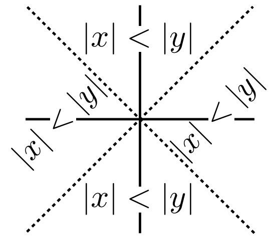


Fig 13

একে y-এর সাপেক্ষে differentiate করলে পাব $f_{xy}(0,y) = 2y$. এর মধ্যে অবশেষে $y = 0$ বসালে হবে $f_{xy}(0,0) = 0$. ■

Exercise 22: ধরো

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

তবে $f_{yx}(0,0) = ?$ ■

এইবার একটা উদাহরণ দেখব, যেখানে কোনো একটা বিন্দুতে $f_{xy} \neq f_{yx}$ হবে।

Exercise 23: If

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{if } |y| < |x| \\ -xy & \text{if } |x| \leq |y|, \end{cases}$$

show that $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.[5] **(2004.16)**

HINT:

এই function-টাকে বোঝার জন্য Fig 13-এর দিকে চোখ রাখো। ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন দুটো বরাবর $|x| = |y|$ হয়। বাকি জায়গাগুলোর কোথায় $|x| < |y|$ আর কোথায় $|x| > |y|$ সেটাও বুঝে নাও।

এবার দেখি $f_{xy}(0,0)$ আর $f_{yx}(0,0)$ বার করার জন্য আমাদের কী কী লাগবে। এর মধ্যে $f_{xy}(0,0)$-র জন্য লাগবে $f_x(0,y)$ এবং $f_{yx}(0,0)$-এর জন্য লাগবে $f_y(x,0)$. অর্থাৎ x-axis বরাবর f_y এবং y-axis বরাবর f_x বার করতে হবে। এগুলো Fig 13 থেকে চোখে দেখেই বলে দেওয়া যায়। যেমন ধরো $f_x(0,y)$. যেহেতু y-axis-টা প্রায় পুরোটাই "$|x| < |y|$" অঞ্চলের মধ্যে পড়ে[1], তাই $y \neq 0$ হলে $f_x(0,y) = \frac{\partial -xy}{\partial x} = -y$ হবে। খালি $y = 0$ নিয়ে একটু খাটতে হবে। যাই হোক, পুরো জিনিসটা অংকের ভাষায় লিখলে এরকম দাঁড়াবে--

> Here
>
> $$f_x(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } |y| < |x| \\ -y & \text{if } |x| < |y| \end{cases} .$$

এখানে আমরা $|x| = |y|$ কেসটা (বাদে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন দুটো) বাদ রেখেছি।

> So if $y \neq 0$, we have $f_x(0,y) = -y$.

আমাদের উদ্দেশ্য y-axis বরাবর f_x পাওয়া। তার মধ্যে বাকি রয়েছে খালি $f_x(0,0)$ বার করা।

[1] খালি origin-টা বাদে।

Again, $f(x,0) \equiv 0$. So $f_x(x,0) \equiv 0$, and in particular, $f_x(0,0) = 0$.
Thus, $\forall y \in \mathbb{R} \quad f_x(0,y) = -y$.
Hence, $f_{xy}(0,y) \equiv -1$. In particular, $f_{xy}(0,0) = -1$.

একইভাবে $f_{yx}(0,0)$ বার করতে পারবে। সেটা করে দেব না, তুমি নিজেই করবে। করলে দেখবে $f_{yx}(0,0) = 1$ আসছে। সুতরাং $f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$ হচ্ছে, যেমনটা দরকার ছিল। ■

এবার একই রকম আরেকটা অংক তোমার করার জন্য।

Exercise 24: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-y^3x}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Find $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$. Examine whether $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.[5] **(2005.10)**
HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি--

$$\begin{aligned} f(x,0) &\equiv 0 \\ f(0,y) &\equiv 0 \\ f_x(x,y) &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y) \neq (0,0) \\ f_y(x,y) &= -\frac{xy^4+4x^3y^2-x^5}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

■

Exercise 25: If

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2\tan^{-1}\frac{x}{y} & \text{if } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

show that $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.[5] **(2010.20)**
HINT:

$f(0,y) \equiv 0$. So $f_y(0,0) = 0$.
Also if $x \neq 0$ then

$$\begin{aligned} f_y(x,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}}{y} \\ &= \cdots \\ &= x. \end{aligned}$$

এখানে দুটো কৌশল করেছি। এক, আমরা জানি $x \to 0$ হল $\frac{\sin x}{x} \to 1$ হয়। সেখান থেকে পাবে $\frac{\tan x}{x} \to 1$. এবার যদি $x = \tan^{-1} x$ নাও, তবে লক্ষ করো $y \to 0$ হচ্ছে এবং $\frac{y}{\tan^{-1} y} \to 1$. আর দ্বিতীয় কৌশল হল sandwich law. মনে রেখো $\tan^{-1} x$ একটা bounded function. এভাবে দেখাতে পারবে যে, $f_y(x,0) = x$. এবং সেখান থেকে $f_{yx}(0,0) = 1$. একইভাবে দেখাতে পারবে যে $f_{xy}(0,0) = -1$.

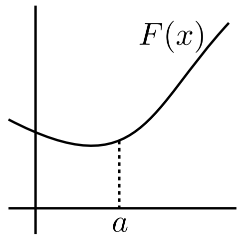


Fig 14

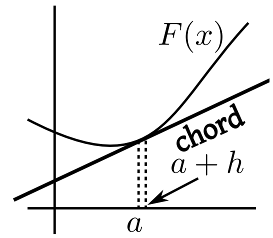


Fig 15

■

তবে এরকম বিদ্ঘুটে function বাস্তবে বড় একটা আসে না। সাধারণতঃ f_{xy} আর f_{yx} সমানই হয়। কেন হয়, সেটা একটু ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। ধরো তোমাকে একটা function দিলাম $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. গ্রাফটা Fig 14-এর মত। দিব্যি differentiable. তোমাকে বললাম $F'(a)$ আন্দাজ করতে। কীভাবে করবে? ছবি দিয়ে কাজটা করার একটাই পথ, মনে মনে a-র খুব কাছে আরেকটা বিন্দু নেওয়া, $a+h$, এবং Fig 15-এর মত chord-এর slope-টা ভাবা। বস্তুতঃ চোখের আন্দাজে যখন আমরা tangent আঁকি, তখন আমরা আসলে এই কাজটাই করি। $F'(a)$-র ধারণাটার জন্ম এই চিন্তা থেকেই, কারণ ওর সংজ্ঞাই হল

$$F'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}.$$

ঠিক এই ব্যাপারটাই দুবার লাগালে বোঝা যাবে কেন f_{xy} সাধারণতঃ f_{yx}-এর সমান হয়। এখানে f_{xy}-কে পাওয়া গেছে f_x-কে y-এর সাপেক্ষে differentiate করে। সুতরাং $f_{xy}(a,b)$-কে কল্পনা করতে পারি $\frac{f_x(a,b+h)-f_x(a,b)}{h}$ হিসেবে (যেখানে h খুব ছোটো)। এর মধ্যে দুবার যে f_x রয়েছে, সেটাও তো আবার একটা derivative. তাই সেখানেও একই কায়দা করা যায়--

- $f_x(a,b+h)$ হল মোটামুটি $\frac{f(a+h,b+h)-f(a,b+h)}{h}$.
- $f_x(a,b)$ হল মোটামুটি $\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.

সুতরাং সব মিলিয়ে আন্দাজ করতে পারছি যে--

$$f_{xy}(a,b)\approx\frac{\{f(a+h,b+h)-f(a,b+h)\}-\{f(a+h,b)-f(a,b)\}}{h^2}.$$

এখানে ওই "≈"-টার মানে হল-- যদি $h\to 0$ নিই, তবে limit-টা $f_{xy}(a,b)$ হবে। এবার $f_{yx}(a,b)$-কে নিয়ে একই কাজ করা যাক--

$$\begin{aligned} f_{yx}(a,b) &\approx \frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h}\\ &\approx \frac{\frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)}{h}-\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}}{h}\\ &\approx \frac{\{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)\}-\{f(a,b+h)-f(a,b)\}}{h^2}\end{aligned}$$

ভালো করে দেখলেই বুঝবে যে, এটা সেই আগের জিনিসটাই। সুতরাং $h\to 0$ নিলে এর limit একই সঙ্গে $f_{xy}(a,b)$ এবং $f_{yx}(a,b)$ হচ্ছে। একই জিনিসের তো আর একাধিক limit হতে পারে না, তাই $f_{xy}(a,b)$ এবং $f_{yx}(a,b)$ যে সমান হবে

এটাই স্বাভাবিক। অবশ্যই আমাদের এই "যুক্তি"-র মধ্যে কিছু ফাঁক আছে। বাড়তি কিছু মৃদু শর্ত চাপিয়ে সেই ফাঁকগুলো পূর্ণ করা সম্ভব। কী শর্ত চাপাব, তার উপর নির্ভর করে দুটো theorem পাওয়া যায়, Young's theorem এবং Schwarz's theorem. সেই সব খুঁটিনাটি আমরা কালকে আলোচনা করব। আপাততঃ খালি এটুকু মনে রাখো যে, অধিকাংশ অংকের বেলাতেই mixed partial derivative দুটোকে সমান ধরে নিয়ে চিন্তা করাই ভালো।

দুটো mixed partial derivative কেন সাধারণতঃ সমান হয়, সেটা অনুভব করার অন্য একটা পথও আছে। সেটা নিয়ে একটা ভিডিও বানিয়েছি। পাশের QR code-টা মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করে বা নীচের URL-টা সরাসরি টাইপ করে সেটা দেখতে পারবে। কোনো অসুবিধা হলে আমাকে Whatsapp করে জানাতে পারো। নম্বর পাবে বইয়ের ভূমিকায়।
`https://arnabc74.github.io/mult/lax.html`

DAY 18
Young's theorem এবং Schwarz's theorem

18.1 Young's theorem

Example 19: State Young's theorem on the commutativity of the order of partial derivatives.

(2008)

SOLUTION:

> **Young's theorem**
>
> Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Let (a, b) be an interior point of D.
> If
>
> f_x and f_y both exist in a neighbourhood of (a, b), and are differentiable at (a, b),
>
> then
> $$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

■

প্রমাণটা চেয়েছে নীচের অংকে।

Example 20: Let $f : D \to \mathbb{R}$ where $D \subseteq \mathbb{R}^2$. If

1. f_x, f_y exist in a neighbourhood of $(a, b) \in D$, and

2. f_x, f_y are differentiable at (a, b),

then show that $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.[5] **(2011.21)**

SOLUTION: লক্ষ করো, এখানে (a, b)-কে D-এর interior point বলেনি। তাও আমরা সেটা ধরেই করব, কারণ প্রথম শর্তের মধ্যে "neighbourhood of $(a,b) \in D$"-এর উল্লেখ আছে।

একটু আগে আমরা যেভাবে আমরা অনুভব করেছিলাম কেন অধিকাংশ ক্ষেত্রেই f_{xy} আর f_{yx} সমান হওয়া উচিত, আমাদের প্রমাণটা ঠিক সেই পথেই এগোবে। সেখানে আমরা বলেছিলাম যে, $f_{xy}(a,b)$ আর $f_{yx}(a,b)$ দুজনেই হল একই জিনিসের limit. সেই "একই জিনিস"-টা ছিল--

$$\frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2}. \quad (*)$$

আমরা h নিয়েছিলাম "খুব ছোট্টো একটুখানি" কিছু। এই ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় বেঁধে ফেলতে দরকার একটা neighbourhood-এর ধারণা--

> Since f_x, f_y are differentiable at (a,b) so $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ exist at (a,b).
> By assumption f_x, f_y both exist in some neighbourhood of (a,b).
> Take any $(a+h, b+h)$ in this neighbourhood.
> Consider
> $$\phi(h) = f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b).$$

এটা হল (*)-এর numerator-টা। আমরা দেখাব যে, একভাবে দেখলে $\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h^2} = f_{xy}(a,b)$ হবে, আবার আরেকভাবে দেখলে $\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h^2} = f_{yx}(a,b)$ হবে। এবং তা থেকেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Limit-টা দুইভাবে বার করার জন্য $\phi(h)$-কে দুইভাবে সাজাতে হবে। একবার--

> Then
> $$\begin{aligned}\phi(h) &= \{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)\}-\{f(a,b+h)-f(a,b)\}\\ &= g(a+h)-g(a),\end{aligned}$$
> where $g(x) = f(x,b+h)-f(x,b)$.

আর অন্যবার--

> Also,
> $$\begin{aligned}\phi(h) &= \{f(a+h,b+h)-f(a,b+h)\}-\{f(a+h,b)-f(a,b)\}\\ &= G(b+h)-G(b),\end{aligned}$$
> where $G(y) = f(a+h,y)-f(a,y)$.

আমরা প্রথমটা থেকে দেখাব যে $\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h^2} = f_{yx}(a,b)$ হচ্ছে। ঠিক একই যুক্তিতে দ্বিতীয়টা থেকে অন্য limit-টা আসবে। এতই একইভাবে যে সেটা আর আলাদা করে লিখতে হবে না।

এবার আমরা $g(x)$-এর উপর mean value theorem লাগাব $x \in [a, a+h]$-এর জন্য। তার জন্য শর্ত পরীক্ষা করতে হবে--এক, $(a, a+h)$-এর উপরে differentiable, এবং দুই, $[a, a+h]$-এর উপরে continuous. তা, আমাদের $g(x)$-টা পুরো $[a, a+h]$-এর উপরেই differentiable. তাই দুটো শর্তই পালিত হবে--

> Now, by the given conditions, $g(x)$ is differentiable for $x \in [a, a+h]$.
> So by Lagrange's mean value theorem we have
> $$\phi(h) = h\, g'(a+\theta h) \text{ for some } \theta \in (0,1).$$
> Since $g'(x) = f_x(x, b+h) - f_x(x, b)$, we get
> $$\phi(h) = h[f_x(a+\theta h, b+h) - f_x(a+\theta h, b)].$$

এইবার আমরা (a,b)-তে f_x-এর differentiability কাজে লাগাব। চট্ করে differentiability-র সংজ্ঞাটা মনে করিয়ে দিই। ধরো তুমি কোনো বিন্দু নিলে $(a+\delta_1, b+\delta_2)$. তবে $f_x(a+\delta_1, b+\delta_2)$ হবে প্রায় $f_x(a,b)+f_{xx}(a,b)\delta_1+f_{xy}(a,b)\delta_2$. "প্রায়", কারণ এদের পার্থক্যটা এতই ছোটো যে, যদি সেটাকে $\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}$ দিয়ে ভাগও করো, তাও $(\delta_1,\delta_2) \to (0,0)$ হলে এটা শূন্যর দিকে যাবে। আমরা এই ব্যাপারটা দুবার ব্যবহার করব, একবার $f_x(a+\theta h, b+h)$-এর জন্য, আরেকবার $f_x(a+\theta h, b)$-এর জন্য।

> Now, since f_x is differentiable at (a,b), so when $h \to 0$,
> $$\frac{f_x(a+\theta h, b+h) - \{f_x(a,b) + \theta h f_{xx}(a,b) + h f_{yx}(a,b)\}}{\sqrt{(\theta h)^2 + h^2}} \to 0,$$
> and also
> $$\frac{f_x(a+\theta h, b) - \{f_x(a,b) + \theta h f_{xx}(a,b) + 0 \times f_{xy}(a,b)\}}{\sqrt{(\theta h)^2 + 0^2}} \to 0.$$

এবার একটা থেকে অন্যটা বিয়োগ করে $\phi(h)$-এর সম্পর্কে কিছু জানা যেতে পারে। সমস্যা হল denominator দুটো সামান্য আলাদা। সেই অসুবিধাটুকু দূর করা অবশ্য সহজই--

> Since $\theta \in (0,1)$, we have
> $$\frac{f_x(a+\theta h, b+h) - \{f_x(a,b) + \theta h f_{xx}(a,b) + h f_{yx}(a,b)\}}{h} \to 0,$$
> and also
> $$\frac{f_x(a+\theta h, b) - \{f_x(a,b) + \theta h f_{xx}(a,b) + 0 \times f_{xy}(a,b)\}}{h} \to 0.$$

এইটা কী করলাম, বুঝলে কী? যেহেতু θ-টা bounded, তাই নীচের তলায় $\sqrt{(\theta h)^2+h^2} = |h|\sqrt{\theta^2+1}$-ই লিখি, আর h-ই লিখি, limit-টা শূন্যই থাকবে।
এবার একটা থেকে অন্যটাকে বিয়োগ করতে আর বাধা নেই--

> Subtracting, we have
> $$\frac{f_x(a+\theta h, b+h) - f_x(a+\theta h, b) - h f_{yx}(a,b)\}}{h} \to 0,$$

ie,

$$\frac{\phi(h)}{h^2} \to f_{yx}(a,b).$$

এবার অন্য দিকটা। একই যুক্তি, তাই "similarly" বলে ছেড়ে দেব।

Similarly, considering $\phi(h)$ as $\phi(h) = G(b+h) - G(b)$, we get

$$\frac{\phi(h)}{h^2} \to f_{xy}(a,b).$$

So $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$, as required.

■

Exercise 26: Let (a,b) be an interior point of domain of a function f of two variables. If f_x and f_y are both differentiable at (a,b). Prove that $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.[5] **(2004.17)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

Exercise 27: If $f(x,y)$ is a function of two variables x and y such that the first order partial derivatives f_x and f_y are differentiable at an interior point (a,b) of the domain of definition of the function then show that

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

[5] **(2006.12)**
HINT: ফের একই অংক সামান্য অন্য ভাষায়। ■

Exercise 28: Let

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Show that $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Which condition of Young's theorem is not satisfied by f? Justify your answer.[3+2] **(2017.4)**
HINT:
প্রথম অংশটা তোমার জন্য রেখে দিলাম। দ্বিতীয় অংশটা একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। তোমাকে দেখাতে হবে যে, f_x এবং f_y-এর মধ্যে অন্ততঃ একজন $(0,0)$-তে differentiable নয়। তার জন্য নীচের জিনিস কয়টা কাজে লাগবে--

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\
f_y(x,y) &= \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\
f(x,0) &\equiv 0\\
f(0,y) &\equiv 0\\
f_x(0,0) &= 0\\
f_y(0,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

চিন্তা করে দ্যাখো এমন কোনো পথে কি তুমি $(0,0)$-র দিকে যেতে পারো, যে পথে গেলে f_x বা f_y শূন্যর দিকে যাবে না? ছোট্টো একটা সমাধানসূত্র দিচ্ছি, $f_y(x,y)$-এর উপরতলায় দুটো term-এই x এবং y দুজনেই আছে, কিন্তু $f_x(x,y)$-এর বেলায় একটা term খালি y^5, তাতে কোনো x নেই। সুতরাং যদি $x=0$ বসাও, মানে y-axis বরাবর এগোও... ■

18.1.1 Not necessary

Young's theorem-এ যে শর্ত দেওয়া আছে, সেটা mixed partial derivative দুটো সমান হওয়ার জন্য sufficient, কিন্তু necessary নয়। অর্থাৎ এমন হওয়া সম্ভব যে, ওই শর্তটা পালিত হয়নি, অথচ তাও mixed partial derivative দুটো দিব্যি সমান হয়েছে। এরকম একটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকে।

Exercise 29: Let (a,b) be an interior point of the domain of a function f of two variables. If f_x and f_y are both differentiable at (a,b), prove that $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. Cite an example to show that the condition is not necessary. [3+2] **(2015.3)**

HINT:

প্রথম অংশ তো Young's theorem-এর প্রমাণ। দ্বিতীয় অংশের জন্য এই function-টা নাও।

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases} .
$$

নীচের জিনিসগুলো অনায়াসেই পাবে--

$$
\begin{aligned}
f(x,0) &\equiv 0\\
f(0,y) &\equiv 0\\
f_x(x,y) &= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\
f_y(x,y) &= \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\
f_x(0,0) &= 0\\
f_y(0,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

এ থেকে দেখাও যে, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ হচ্ছে। তারপর দেখাও যে, f_x মোটেই $(0,0)$-তে differentiable নয়।

■

Exercise 30: Use the following function to check whether the conditions for Young's theorem are necessary.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2/(x^2+y^2) & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

[3] **(2008)**
HINT: আগের অংকের দ্বিতীয় অংশটাই, খালি এখানে function-টা বলেই দিয়েছে। ■

18.2 Schwarz's theorem

Example 21: State Schwarz's theorem on commutativity of the 2nd order mixed partial derivatives of a real valued function of two variables. **(2016, 2007)**
SOLUTION:

> **Schwarz's theorem**
>
> Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Let (a,b) be an interior point of D.
> If
>
> - f_x, f_y and f_{xy} exist in a neighbourhood of (a,b), and
> - f_{xy} is continuous at (a,b),
>
> then $f_{yx}(a,b)$ exists and equals $f_{xy}(a,b)$.

মনে মনে এটাকে Young's theorem-এর সঙ্গে তুলনা করো। সেখানে শর্তটা ছিল x আর y-এর সাপেক্ষে symmetric, কিন্তু এখানে তা নয়, কারণ শর্তের মধ্যে f_{xy}-এর উল্লেখ রয়েছে, অথচ f_{yx}-এর অস্তিত্বমাত্র ধরা হয়নি। ■

Example 22: State and prove Schwarz's theorem for a function of two variables on the commutativity of the order of partial derivatives.[1+4] **(2009.20)**
SOLUTION: প্রথম অংশ তো আগের অংকেই করলাম। এখানে প্রমাণটা করি। প্রমাণের শুরুটা অনেকটা Young's theorem-এর প্রমাণের কায়দাতেই হবে।
Proof:

> By assumption f_x, f_y, f_{xy} exist in a neighbourhood of (a,b).
>
> Take any $(a+h, b+k)$ in this neighbourhood.

এইখানেই Young's theorem-এর প্রমাণের সঙ্গে প্রথম পার্থক্য। ওখানে আমরা $(a+h, b+h)$ নিয়েছিলাম, এখানে $(a+h, b+k)$ নিলাম। এখানেও দেখব যে, $(h,k) \to (0,0)$ হলে $\frac{\phi(h,k)}{hk}$-এর limit হবে $f_{xy}(a,b)$, যেখানে--

> Consider
> $$\phi(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b).$$

আগেরবার আমরা এটাকে দুইভাবে সাজিয়েছিলাম, কারণ তখন শর্তটা x, y-এর সাপেক্ষে symmetric ছিল। এখানে শর্তটা f_{xy}-এর দিকেই বেশী, তাই খালি একভাবেই সাজাব--

> Then
> $$\begin{aligned}\phi(h,k) &= \{f(a+h,b+k) - f(a+h,b)\} - \{f(a,b+k) - f(a,b)\}\\ &= g(a+h) - g(a),\end{aligned}$$
> where $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$.

এখান থেকে f_{xy} আসবে, অনেকটা Young's theorem-এর প্রমাণের মতই।

> Since $g(x)$ is differentiable over $[a, a+h]$,
> hence by Lagrange's mean value theorem,
> $$\begin{aligned}\phi(h,k) &= g(a+h) - g(a)\\ &= h\,g'(a+\theta\,h) \quad \big[\text{ for some } \theta \in (0,1)\big]\\ &= h[f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)],\end{aligned}$$
> since $g'(x) = f_x(x,b+k) - f_x(b)$.

এখানে আমরা আবার mean value theorem লাগাব। এবার লাগাব $f_x(a+\theta h, y)$-এর উপরে $y \in [b+b+k]$-র জন্য। এর ফলে পাব

$$f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b) = f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k),$$

যেখানে $\theta' \in (0,1)$.

> Now, $f_x(a+\theta h, y)$ is differentiable w.r.t. y over $[b+b+k]$.
> Hence, again by Lagrange's mean value theorem, we get
> $$\phi(h,k) = h\,k\,f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$$
> for some $\theta' \in (0,1)$.
> Thus,
> $$\frac{\phi(h,k)}{hk} = f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k).$$

এবার আমরা $(h,k) \to (0,0)$ করে $f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$-কে $f_{xy}(a,b)$ বানানোর মতলব করছি। মনে রেখো θ আর θ' কিন্তু দুটো constant নাও হতে পারে। ওরা সম্ভবতঃ h আর k-র কোনো জটিল function. কিন্তু যতই জটিল হোক, ওরা bounded. তাই $(h,k) \to (0,0)$ হলে $(a+\theta h, b+\theta' k) \to (a,b)$ হতে বাধ্য। এখানে যে একটু sandwich law লাগালাম, সেটা নিশ্চয়ই বুঝেছ?

Hence by the assumption of continuity of f_{xy} at (a,b) we see that

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k)}{hk} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) \\ &= f_{xy}(a,b),\end{aligned}$$

since θ, θ' are bounded.

এতক্ষণ $f_{xy}(a,b)$ নিয়ে লড়াই হল। এবার $f_{yx}(a,b)$ আনতে হবে। মনে রেখো $f_{yx}(a,b)$-র অস্তিত্ব পর্যন্ত ধরা হয় নি। তাই এখানে নতুন কোনো কৌশল লাগবে। আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে $(h,k)\to(0,0)$ হলে double limit-টা exist করে। ওদিকে (a,b)-টা একটা interior point. সুতরাং repeated limit দুটোও exist করবে। তারই মধ্যে একটা আমরা নেব--

Now, since (a,b) is an interior point, the repeated limit $\lim_{h\to0}\lim_{k\to0}\frac{\phi(h,k)}{hk}$ also exists and equals $f_{xy}(a,b)$.

আমরা এইটাকে খানিক দলাইমলাই করে $f_{yx}(a,b)$-তে এনে ফেলব।

Again

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\lim_{k\to0}\frac{\phi(h,k)}{hk}\\ =\ &\lim_{h\to0}\lim_{k\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right]\\ =\ &\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\lim_{k\to0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\lim_{k\to0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right]\end{aligned}$$

$\because f_y$ exists in the neighbourhood

কেন f_y-এর অস্তিত্ব এখানে লাগল, বুঝলে তো?
আমরা $\lim(A-B)=\lim A-\lim B$ সব সময়ে বলতে পারি না।
কিন্তু যদি ডানদিকের limit দুটোই exist করে, তবে পারি।

$$=\ \lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f_y(a+h,b)-f_y(a,b)].$$

Thus, $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f_y(a+h,b)-f_y(a,b)]$ exists and equals $f_{xy}(a,b)$.

কিন্তু এই limit-টাই তো হল $f_{yx}(a,b)$. তাই--

Hence $f_{yx}(a,b)$ exists, and equals $f_{xy}(a,b)$, as required.

[Q.E.D]

■

Exercise 31: Let

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Show that $f_{yx}(0,0)\neq f_{xy}(0,0)$. Which condition of Schwarz's theorem is not satisfied by f?[3+2] **(2012.5)**

HINT:

এটা দাঁতে দাঁত চেপে করার অংক। একেবারে শেষে $(x,y)\neq(0,0)$-র জন্য $f_{yx}(x,y)$ বার করতে হবে। সেটা খুবই বিচ্ছিরি দেখতে একটা জিনিস হবে। কিন্তু তার numerator-এ একটাই term থাকবে, যেখানে কোনো x নেই। তাই $x=0$ বসিয়ে দিলে বাকী সব কিছু মরে গিয়ে খালি ওই term-টাই পড়ে থাকবে numerator-এ।

■

18.2.1 Not necessary

Young's theorem-এর মত Schwarz's theorem-এর শর্তগুলোও mixed partial derivative-দের সমান হবার জন্য sufficient, কিন্তু necessary নয়। অর্থাৎ এমন counterexample সম্ভব, যেখানে Schwarz's theorem-এর শর্ত পালিত হয় না, অথচ mixed partial derivative দুটো সমান হয়। এরকম একটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 23: Considering the function

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{if } x^2+y^2=0\end{cases}$$

show that the conditions of Schwarz's theorem are not necessary for commutativity of order of partial derivatives.[4] **(2007)**

HINT:

তোমাকে দেখাতে হবে যে, এখানে Schwarz's theorem-এর কোনো একটা শর্ত পালিত হচ্ছে না, অথচ তাও $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$ হচ্ছে। এই কয়টা জিনিস তোমার কাজে লাগবে--

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\ f_y(x,y) &= \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0)\\ f(x,0) &\equiv 0\\ f(0,y) &\equiv 0\\ f_x(0,0) &= 0\\ f_y(0,0) &= 0.\end{aligned}$$

■

Exercise 32: Let

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Using this function show that the conditions of Schwarz's theorem are sufficient only for the equality of the mixed partial derivatives.[5] **(2018.4)**
HINT: আগের অংকটাই, সামান্য অন্য ভাষায়। ■

DAY 19
Partial differential equation-দের transformation

ধরো তোমার কাছে কিছু variable আছে, x, y আর z. এদের মধ্যে z হল x, y-এর function. মানে x, y হল independent variable, আর z হল dependent variable. এই function-এর ফর্মুলাটা আমাদের বলে দেয়নি, কিন্তু তার সম্বন্ধে একটা partial differential equation তুমি জানো। এখন যদি আমরা x, y-কে নতুন দুটো variable দিয়ে লিখি, (ধরো u আর v), তবে partial differential equation-টা এখন z এবং u, v-কে নিয়ে একটা নতুন partial differential equation-এ পরিণত হবে। আমাদের কাজ হল সেই equation-টাকে বার করা। অনেক সময়ে z-টাকেও পাল্টে হয়তো কোনো w করে দেওয়া হবে, তখন নতুন equation-টা হবে u, v আর w নিয়ে।
এই কাজটা করে কী লাভ? অনেক সময়ে দেখা যায় যে, x, y, z নিয়ে equation-টা হয়তো বেজায় শক্ত কিছু, অথচ যেই variable-গুলো বদলানো হল, অমনি হয়তো নতুন equation-টা দেখা গেল খুবই সহজ। সেই কারণেই লোকে variable বদলিয়ে বদলিয়ে দেখে, কোনো সুবিধা হয় কিনা। আমরা অবশ্য এখানে partial differential equation-এর সমাধান করা শিখতে বসিনি। আমরা খালি এরকম equation-এর variable বদলানোটুকু শিখব। পুরোটাই chain rule-এর খেলা। কিন্তু সেই খেলা খেলতে গিয়ে মাথাটা গুলিয়ে যেতে চাইবে। তাই একটু operator notation শিখে রাখলে সুবিধা হবে।

19.1 Operator notation

এরকম অংকে বার বার করে partial derivative-গুলো লিখতে লিখতে হাত ব্যথা হয়ে যায়, তাই একটু সংক্ষেপে লিখলে সুবিধা হবে, $\frac{\partial}{\partial x}$-এর বদলে ∂_x, $\frac{\partial}{\partial y}$-এর বদলে ∂_y, এইরকম। এরা হল এককেটা **operator.** যদি অনেকগুলো operator একই variable-এর উপর লাগানো হয়, তবে variable-টাকে আমরা "কমন" নিয়ে লিখি, যেমন $x\partial_x z + 3\partial_y z$-কে লেখে $(x\partial_x + 3\partial_y)z$. এখানে ওই $(x\partial_x + 3\partial_y)$ অংশটুকু হল আরেকটা operator. এটাকে ভাবতে পারো যেন--

- ∂_x-কে x দিয়ে গুণ করে একটা operator পেয়েছি, $x\partial_x$,
- তারপর ∂_y-কে 3 দিয়ে গুণ করে একটা নতুন operator পেয়েছি $3\partial_y$,
- এই দুটো যোগ করে পেলাম $x\partial_x + 3\partial_y$.

এইভাবে operator-দের যোগ বিয়োগ করলে, বা কোনো সংখ্যা বা variable দিয়ে গুণ করলে নতুন operator পাওয়া যায়। যদি দুটো operator একটার পর একটা লাগানো হয়, তবে তাকে বলে operator-এর গুণ। যেমন $\partial_x\partial_y$ মানে হল প্রথমে y-এর সাপেক্ষে partial derivative বার করে, সেটাকে x-এর সাপেক্ষে partially differentiate করা। উল্টোটা করলে হত $\partial_y\partial_x$. যদি ∂_x^2 লিখি, তবে বুঝবে x-এর সাপেক্ষে second partial derivative বার করা হচ্ছে।

Example 24: যদি $z = x^2y^3$ হয়, তবে $(x\partial_x)^2 z$ বার করো। এটা কী $x^2\partial_x^2 z$-এর সমান?

SOLUTION: এখানে z-এর উপরে $x\partial_x$ লাগাতে হবে দুবার। প্রথমবার লাগালে হবে--

$$x\partial_x z = x \times 2xy^3 = 2x^2y^3.$$

দ্বিতীয়বার লাগালে হবে--

$$x\partial_x(2x^2y^3) = x \times 4xy^3 = 4x^2y^3.$$

যদি $x^2\partial_x^2$ করতাম, তবে কী হত দেখি। $\partial_x z = 2xy^3$, তাই $\partial_x^2 z = \partial_x(2xy^3) = 2y^3$. অতএব $x^2\partial_x^2 z = x^2 \times 2y^3 = 2x^2y^3$, যেটা আগের চেয়ে আলাদা। ■

এই অংকটার মধ্যে একটা গুরুত্বপূর্ণ শিক্ষা আছে--operator-দের গুণ commutative নয়। যেমন, "আগে x দিয়ে গুণ করে তারপরে ∂_x লাগানো" আর "আগে ∂_x করে, তারপরে x দিয়ে গুণ করা" আলাদা ব্যাপার। ফলে $x\partial_x \neq \partial_x x$. আমরা যে Young's theorem আর Schwarz's theorem শিখেছিলাম, সেটাকে operator দিয়ে ভাবলে হয় এইরকম--যদি কিছু বাড়তি শর্ত চাপানো যায়, তবে $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$ হয়। আজকের সব অংকেই আমরা ধরে নেব, সেরকম বাড়তি শর্ত চাপানো আছে (যদিও প্রশ্নকর্তারা মাঝে মাঝে সেটা উল্লেখ করতে ভুলে যান)। Operator-র গুণ commutativity না হওয়ায় অনেক সময়েই মাথা গুলিয়ে যায়। তার প্রতিষেধক হিসেবে নীচের অংকটা করো। এই অংকটা করে উত্তর মিলিয়ে তবে পরের অংকগুলো পড়বে, নইলে ঘেঁটে যাবার সমূহ সম্ভাবনা!

Exercise 33: নীচের নামতার ছকটা পূর্ণ করো।

	$x\partial_x$	$x\partial_y$	$y\partial_x$	$y\partial_y$
$x\partial_x$		$*$		
$x\partial_y$				
$y\partial_x$				
$y\partial_y$				

HINT:
যেমন ধরো, $*$ দিয়েছি যেখানে, সেখানে হবে--

$$x\partial_x \times x\partial_y = x \times \partial_x(x\partial_y) = x \times (\partial_y + x\partial_x\partial_y) = x\partial_y + x^2\partial_x\partial_y.$$

■

Exercise 34: আমরা যে $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ফর্মুলাটা জানি, operator-দের বেলাতেও সেটা প্রায় খাটে, খালি গুণটা commutative নয় বলে $2ab$-র বদলে $ab+ba$ লিখতে হয়। এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের operator-গুলোকে সরল কর। সর্বত্রই $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$ ধরে নিতে পারো।

1. $(\partial_x + \partial_y)^2$
2. $(x\partial_x + y\partial_y)^2$
3. $(y\partial_x + x\partial_y)^2$
4. $(x\partial_x - y\partial_y)^2$

HINT: Operator-দের গুণের নামতা ব্যবহার করতে ভুলো না। ■

Example 25: Transform the equation

$$(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

when the independent variables x and y are changed to u and v given by $x = \frac{e^u+e^v}{2}$ and $y = \frac{e^u-e^v}{2}$. [5] **(2016.7)**
SOLUTION: প্রথমেই partial differential equation-টাকে সংক্ষিপ্ত notation-এ লিখে নিই--

> Given
> $$[(x^2+y^2)(\partial_x^2+\partial_y^2)+4xy\partial_x\partial_y+2(x\partial_x+y\partial_y)]z=0.$$

এক্ষুণি যে operator-এর নামতার ছকটা পূর্ণ করেছ, তার বিভিন্ন জিনিস এখানে উঁকি মারছে। তাদেরকে সাজিয়ে ফেললে হবে--

> $$[(x^2\partial_x^2+x\partial_x)+(y^2\partial_y^2+y\partial_y)+y^2\partial_x^2+x^2\partial_y^2+2xy\partial_x\partial_y+(xy\partial_x\partial_y+x\partial_x)+(xy\partial_x\partial_y+y\partial_y)]z=0,$$
> or,
> $$[(x\partial_x)^2+(y\partial_y)^2+(y\partial_x)^2+(x\partial_y)^2+(x\partial_x)(y\partial_y)+(y\partial_y)(x\partial_x)+(x\partial_y)(y\partial_x)+(y\partial_x)(x\partial_y)]z=0,$$
> or,
> $$[(x\partial_x+y\partial_y)^2+(x\partial_y+y\partial_y)^2]z=0.$$

এখন তাহলে কাজ হল $x\partial_x+y\partial_y$ এবং $x\partial_y+y\partial_x$-কে u,v দিয়ে লেখা। এর জন্য কায়দা হল প্রথমে z-কে u,v-এর function এবং u,v-কে x,y-এর function হিসেবে কল্পনা করে chain rule লাগানো। অংকটায় কিন্তু x,y-কে u,v-র function হিসেবে দেওয়া আছে। সেখান থেকে উল্টে u,v-কে x,y-এর function হিসেবে লিখে নিতে হবে--

> Here $x=\frac{e^u+e^v}{2}$ and $y=\frac{e^u-e^v}{2}$.
> Hence $x+y=e^u$ and $x-y=e^v$.
> So $u=\log(x+y)$ and $v=\log(x-y)$.

এইবার আমরা chain rule লাগানোর জন্য তৈরী। প্রথমে $\partial_x z$ নিয়ে পড়া যাক--

> So
> $$\partial_x z=\partial_u z\partial_x u+\partial_v z\partial_x v=\frac{1}{x+y}\partial_u z+\frac{1}{x-y}\partial_v z.$$

এইটা ভালো করে বুঝে নাও। না বুঝতে পারলে z-কে ভাবো $z(u(x,y),v(x,y))$ হিসেবে। একইভাবে--

> $$\partial_x z=\partial_u z\partial_x u+\partial_v z\partial_y v=\frac{1}{x+y}\partial_u z-\frac{1}{x-y}\partial_v z.$$

দেখি এবার $x\partial_x z+y\partial_y z$ দেখতে কীরকম দাঁড়াচ্ছে--

> So $x\partial_x z+y\partial_y z=\cdots=\partial_u z+\partial_v z$.
> We can therefore write symbolically
> $$x\partial_x+y\partial_y=\partial_u+\partial_v.$$

একইভাবে--

$$x\partial_y + y\partial_x = \partial_u - \partial_v.$$

প্রায় মেরে এনেছি--

So the transformed partial differential equation is

$$[(\partial_u + \partial_v)^2 + (\partial_u - \partial_v)^2]z = 0.$$

এবার খানিকটা সহজ করলেই পাবে--

So the final answer is

$$\partial_u^2 z + \partial_v^2 z = 0.$$

■

এই অংকটা করে মনে হতে পারে যে, নামতার ছকের সাথে মিল পাওয়া গেল ছিল বলেই অংকটা করা গেল। এটা ঠিক যে মিলটা ছিল বলে অংকটা অপেক্ষাকৃত সহজে করা গেল। যদি মিল নাও পাওয়া যেত, তাও কিন্তু গায়ের জোরে এগোলেই এরকম অংক হয়ে যায়। এবার সেরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Exercise 35: A function $f(x,y)$ having continuous second order partial derivatives when expressed in terms of new real variables u and v defined by $x = \frac{1}{2}(u+v)$ and $y^2 = uv$ becomes $g(u,v)$. Prove that

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

[5] **(2019, 2006)**

HINT: এখানে f আর g দুটো আলাদা অক্ষর দেখে ভেবো না যেন যে dependent variable-টা বদলে গেছে। আসলে $f(x,y)$ আর $g(u,v)$ একই জিনিস, অর্থাৎ $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

এখানে নামতার ছকের সাথে বিশেষ কোনো মিল চোখে পড়ছে না। সুতরাং আমরা গায়ের জোরে $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ বার করব। তার জন্য chain rule লাগাতে হবে বারবার। বুঝতেই পারছ এখানে x, y-কে u, v-র function হিসেবে ভাবতে হবে। সৌভাগ্যক্রমে অংকটায় সেভাবেই দিয়েছে (যদি u, v-কে x, y-এর function হিসেবে দিত, তবে প্রথমে সেটাকে ওল্টাতে হত)। যেহেতু শীঘ্রই $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ ইত্যাদিদের ডাক পড়বে, তাই শুরুতেই ওগুলো বার করে রাখা যাক--

$\because x = \frac{1}{2}(u+v)$. $\therefore \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$. Also, $\because y^2 = uv$, $\therefore 2y\frac{\partial y}{\partial u} = v$, or $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{2y}$.
Similarly, $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{2y}$.

এবার $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ বার করতে হবে। শুরু করব $\frac{\partial g}{\partial v}$ দিয়ে--

Now,

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f(x(u,v), y(u,v))}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u}{2y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

তারপর $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$-এর পালা। বলাই বাহুল্য আমরা $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ব্যবহার করব। এই অংকে অবশ্য বলে দিয়েছে যে second order partial-গুলো continuous. সুতরাং--

By Schwarz's theorem, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, since the second order partials are given to be continuous.
So

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{u}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] = \cdots$$

বাকিটুকু তোমার জন্য রেখে দিলাম।
■

Exercise 36: A function $f(x, y)$ becomes $g(u, v)$ when $x = \frac{u+v}{2}$ and $y = \sqrt{uv}$. Prove that

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

[5] **(2016.4)**
HINT: আগের অংকটাই, খালি $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ ধরে নেওয়ার কোনো অজুহাত দেয়নি। তাও অবশ্য আমরা ওটা ধরেই এগোব। আরেকটা সামান্য পার্থক্য আছে। ওখানে $y^2 = uv$ দিয়েছিল, এখানে বলেছে $y = \sqrt{uv}$. তাই এখানে-- $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}$ এবং $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}$. ■

Exercise 37: If z is a function of two variables x, y and $x = c\cosh u \cos v$, $y = c \sinh u \sin v$ (c is a real number), show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{c^2}{2}(\cosh 2u - \cos 2v)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Assume that the second order partial derivatives of z are continuous.[3] **(2020, 2017, 2008, 2005)**
HINT:
এখানেও আগের অংকের মতই মোটামুটি গায়ের জোরে এগোতে হবে। আমরা বাঁদিক থেকে শুরু করে ডানদিকে পৌঁছব (উল্টোটা করলেও আপত্তি ছিল না, তবে বাঁদিকটা দেখতে সহজতর)। তার মানে u, v-দের সাপেক্ষে partial derivative-দেরকে x, y-এর সাপেক্ষে partial derivative-এ পরিণত করতে হবে। এর জন্য কায়দা হল z-কে প্রথমে x, y-এর function, এবং তারপর x, y-কে u, v-এর function হিসেবে ভাবা, মানে z-কে $z(x(u, v), y(u, v))$ ভাবা। তবে chain rule থেকে পাবে

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

যেহেতু $\frac{\partial x}{\partial u} = c \sinh u \cos v$ এবং $\frac{\partial y}{\partial u} = c \cosh u \sin v$, তাই--

$$\frac{\partial z}{\partial u} = c\left[\sinh u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + \cosh u \sin v \frac{\partial z}{\partial y}\right]. \qquad (*)$$

এবার $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ বার করতে হবে। কিন্তু তার জন্য নতুন করে খাটবার কোনোও দরকার নেই। কারণ (*) থেকে আমরা লিখতে পারি--

$$\frac{\partial}{\partial u} = c\left[\sinh u \cos v \frac{\partial}{\partial x} + \cosh u \sin v \frac{\partial}{\partial y}\right].$$

লক্ষ করো যে, $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2$ মানে u-এর সাপেক্ষে দুইবার partial derivative বার করা, মানে--

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 = c^2\left[\sinh u\, \cos v \frac{\partial}{\partial x} + \cosh u\, \sin v \frac{\partial}{\partial y}\right]^2.$$

একইভাবে $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2$-ও বার করতে পারবে। এবার $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2$ বার করে খানিক সাজালেই অংকটা হয়ে যাবে। ■

একইরকম কিছু অংক তোমার করার জন্য।

Exercise 38: Transform the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

by the substitution $x = uv,\ y = \frac{1}{v}$. Hence show that is the same function of u and v as of x and y.[4+1] **(2015.7)** ■

Exercise 39: If $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$ and u is a real-valued function in x and y, then show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

[5] **(2018.6)** ■

এবারের অংকটায় সামান্য একটু নতুনত্ব আছে। এতক্ষণ আমরা খালি independent variable-দের বদলাচ্ছিলাম, এবার সেই সঙ্গে dependent variable-টাকেও বদলাব।

Exercise 40: Transform the equation $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ by introducing new independent variables $u = x + y,\ v = \frac{y}{x}$ and the new function $w = \frac{z}{x}$.[5] **(2012.8)**

HINT:

এখানে z_{xx} মানে $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. একইভাবে $z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ইত্যাদি। বুঝতেই পারছ এই notation-এ $\frac{\partial z}{\partial x}$ হবে z_x.

অংকটা পুরো করে দেব না, খালি dependent variable-এর পরিবর্তনটা কী করে হিসেবে নিতে হবে, সেটা বলে ছেড়ে দিচ্ছি। প্রথমে পুরোনো dependent variable-টাকে নতুনটা দিয়ে প্রকাশ করে নাও--

> Here $z = wx$.

তারপর z_x, z_y, z_{xx} ইত্যাদিদের বার করো w এবং x, y দিয়ে--

> Then $z_x = \frac{\partial(wx)}{\partial x} = w_x x + w$ and so $z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = w_{xx}x + w_x + w_x = w_{xx}x + 2w_x$.
> Also $z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = w_{xy}x + w_y$.
> Similarly, $z_y = w_y x$ and $z_{yy} = w_{yy}x$.

এইবার এদের ব্যবহার করে z-এর differential equation-টা লেখো। তাহলে w-এর একটা differential equation পেয়ে যাবে--

Thus

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = w_{xx}x + 2w_x - 2(w_{xy}x + w_y) + w_{yy}x.$$

So the given differential equation becomes

$$w_{xx}x + 2w_x - 2(w_{xy}x + w_y) + w_{yy}x = 0.$$

ব্যস্‌, dependent variable-এর পরিবর্তন করা হয়ে গেল। এবার আগের অংকের মতই independent variable-গুলোর পরিবর্তন করে নাও।

■

Example 26: Let $u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Show that

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = -\frac{\sin u \cos 2u}{4\cos^3 u}.$$

[5] **(2018.5)**

SOLUTION: দুঃখের কথা যে অংকটা মোটেই ঠিক নয়। হওয়া উচিত ছিল--

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = \frac{\sin u}{4\cos^3 u}.$$

আমরা এটা দুভাবে প্রমাণ করব--এক, দাঁতে দাঁত চেপে গায়ের জোরে, আর দুই, transformation-এর কৌশল দিয়ে। গায়ের জোরের কায়দাটা এইরকম--

Differentiating the given relation partially wrt x, we get

$$\begin{aligned}\cos u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \frac{x+y}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\\ \cos u \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \frac{x+y}{2\sqrt{y}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.\end{aligned}$$

দুটোই কষ্ট করে বার করি নি। খালি প্রথমটা করে, x-এর জায়গায় y বসালেই দ্বিতীয়টা পাওয়া যায়। এবার প্রথমটাকে x আর পরেরটাকে y দিয়ে গুণ করে যোগ করে দিলেই পাবে--

So

$$\cos u\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \cdots = \frac{x+y}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sin u}{2},$$

or

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \cdots = \frac{1}{2}\tan u = g(x,y), \text{ say}.$$

এবার সেই একই কাজ ফের $g(x,y)$-এর উপর করব--

Then

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2}\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x},\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{2}\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

So

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)g=\frac{1}{2}\sec^2 u\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\frac{1}{4}\sec^2 u\tan u=\frac{\sin u}{4\cos^3 u},$$

as required.

এই সমাধানটা যে খুব জটিল কিছু এমন বলা যায় না, কারণ অংকটা এমনভাবে সাজানো যাতে সব কিছুই দিব্যি সহজ হয়ে যায়। এবার যে কায়দাটা দেখব, সেটাতে একটু কৌশল আছে বটে, কিন্তু অংকটা এত সাজানো না হলেও সেই কায়দায় পরিশ্রম কমই লাগবে।

বিকল্প পদ্ধতি

কৌশলটা হল independent variable দুটোকে এমনভাবে বদলানো, যাতে এই $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$-টা খুব সহজ কিছু হয়ে যায়। ধরো, আমরা x,y-কে লিখলাম নতুন দুটো independent variable দিয়ে, যাদের নাম দিলাম r,s, মানে $x\equiv x(r,s)$ এবং $y\equiv y(r,s)$. এই দুটো function কী কী নেব, সেটা আমাদের হাতে। আমরা চাইছি এইরকম কিছু পেতে--

$$\frac{\partial}{\partial r}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

এদিকে chain rule বলছে যে

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

সুতরাং যদি $\frac{\partial x}{\partial r}=x$ আর $\frac{\partial y}{\partial r}=y$ করতে পারি, তবেই চলবে। এই দুটো অতি পরিচিত দুটো differential equation. যেমন, প্রথমটা বলছে যে, x-কে r দিয়ে differentiate করলে ফের x-ই আসে। দেখামাত্রই তুমি ধাঁ করে বুঝে ফেলবে যে x নিশ্চয়ই e^r জাতীয় কিছু একটা। গুছিয়ে লিখলে প্রথমটার সমাধান হল

$$x=e^r\times\text{const}(s),$$

যেখানে const(s) হল r-এর সাপেক্ষে arbitrary constant (যেটা s-এর উপরে নির্ভর করতেই পারে)। একইভাবে দ্বিতীয়টার সমাধান হল--

$$y=e^r\times\text{const}(s).$$

মনে হতে পারে যে, তবে তো x আর y একই জিনিস নিলেই চলবে। কিন্তু না, আমরা যখন (x,y) থেকে (r,s)-এ যাব, তখন কাজটা bijection দিয়ে করতে হবে, যাতে চাইলে আবার ফিরে আসতে পারি। অনেকভাবেই করা যায়। তা, এইভাবে নিলে দেখতে বেশ সুন্দর লাগবে--

$$x=e^{r+s}\text{ এবং } y=e^{r-s}.$$

এবার তাহলে দেখি u-কে r,s-এর function হিসেবে লিখলে কেমন দেখায়। যদি খুব জটিল কিছু হয়ে যায়, তবে x আর y-কে r,s-এর অন্যরকম function হিসেবে লিখে দেখব আরো সহজ কিছু হয় কিনা।

$$u(x(r,s),y(r,s))=\sin^{-1}\frac{e^{r+s}+e^{r-s}}{e^{(r+s)/2}+e^{(r-s)/2}}=\sin^{-1}e^{r/2}\frac{e^s+e^{-s}}{e^{s/2}+e^{-s/2}}.$$

এটা কি জটিল লাগছে, নাকি সহজ? মনে রেখো এখন $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ কিন্তু $\frac{\partial}{\partial r}$. সুতরাং আমাদের কাজ হল u-কে পরপর দুবার r-এর সাপেক্ষে partial derivative করা। আশা করি সন্দেহ নেই যে, সে কাজটা খুবই সহজ, কারণ জটিলতা যেটুকু সে তো s নিয়ে। এইবার তবে আমাদের রাফ করা শেষ হল। এবার সবকিছু গুছিয়ে লিখব--

Let $x = e^{r+s}$ and $y = e^{r-s}$.

Then $\frac{\partial x}{\partial r} = x$ and $\frac{\partial y}{\partial r} = y$. So by chain rule

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

So

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u.$$

Now

$$u = \cdots = \sin^{-1} e^{r/2} \frac{e^s + e^{-s}}{e^{s/2} + e^{-s/2}},$$

or

$$\sin u = e^{r/2} A(s), \qquad (*)$$

where

$$A(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{e^{s/2} + e^{-s/2}}.$$

Partially differentiating $(*)$ wrt r, we get

$$\cos u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} e^{r/2} A(s) = \frac{1}{2}\sin u.$$

Hence

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2}\tan u.$$

Differentiating once again,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\sec^2 u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4}\sec^2 u \tan u.$$

So

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{4}\sin u \sec^3 u = \frac{\sin u}{4\cos^3 u},$$

as required.

■

তোমার জন্য একইরকম আরেকটা অংক।

Exercise 41: If $u = \tan^{-1} \frac{x^3+y^3}{x-y}$, show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u.$$

Hence deduce that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 - 4\sin^2 u)\sin 2u.$$

[5] **(2012.6)**
HINT: প্রথমে $(x-y)\tan u = x^3+y^3$ লিখে নিয়ে সেখান থেকে $\frac{\partial u}{\partial x}$ আর $\frac{\partial u}{\partial y}$ বার করে নাও। তারপর সোজা $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ বার করে খানিক ধস্তাধস্তি করলেই $\sin 2u$ এসে যাবে।
প্রথম অংশে দেখানো হল $(x\partial_x+y\partial_y)u = \sin 2u$. দ্বিতীয় অংশে কাজ হচ্ছে $(x\partial_x+y\partial_y)^2 u$ নিয়ে, মানে $(x\partial_x+y\partial_y)\sin 2u$ নিয়ে। ■

Answers

1.

(A) 16. (B) 21. (C) 0. (D) $\sum \alpha_i\beta_i$.

2. যদি $h(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})$ নিই, তবে $\mathbf{u} = (1,0)$ হলে $h(t) = f(a+t,b)$ হবে, যেখানে $\mathbf{a} = (a,b)$. সুতরাং directional derivative-টা হবে $h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. একইভাবে $\frac{\partial f}{\partial y}$-এর বেলাতেও।
3. $h(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}+2t\mathbf{u}) = g(2t)$. তাই $h'(t) = 2g'(2t)$. **4.** $h(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}-t\mathbf{u}) = g(-t)$. তাই $h'(t) = -g'(-t)$. ফলে $h'(0) = -g'(0)$. **5.** $\mathbf{v}$ বরাবর directional derivative হল $16e^6$ এবং $\mathbf{w}$ বরাবর $23e^6$. সত্যিই, $7e^6+16e^6 = 23e^6$. **6.** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = 2x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. তবে $(1,2)$ বরাবর directional derivative হবে 0. কিন্তু $(2,1)$ বরাবর দেখলে origin-এ discontinuity আছে, তাই ওখানে differentiable-ও নয়। **7.** অসম্ভব, কারণ যদি কোনো $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ বরাবর directional derivative হয় 1, তবে $-\mathbf{u}$ বরাবর directional derivative তো -1 হতে বাধ্য! **8.** $h(t) = f\big((0,0)+t\cdot(1,1)\big) = f(t,t) = \sqrt{t^2} = |t|$, যেটা মোটেই $t=0$-তে differentiable নয়। তাই $(0,0)$-তে f-এর directional derivative নেই। সুতরাং f ওখানে differentiable হতে পারে না, কারণ differentiable হলে সব দিক বরাবরই directional derivative থাকত। **9.**

> Here $f(x,0)\equiv 0$.
> So $f_x(0,0) = 0$.
> Similarly, $f_y(0,0) = 0$.
> Hence Jacobian matrix is $M = [\ 0 \quad 0\ ]$.
> So to check differentiability we have to check if
> $$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$
> ie, writing $\mathbf{h} = (x,y)$,
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$
> ie,
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$
> ie,
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

which is not true, because if we approach $(0,0)$ along the $x = y$ line then the limit becomes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \tfrac{1}{2} \neq 0.$$

এবার continuity দেখাই।

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x|$$

Since $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$.

So for any $\epsilon > 0$ we can take $\delta = \epsilon$. Then if $(x,y) \in N_2((0,0),\delta)$, we must have $|x| < \delta = \epsilon$, and so $f(x,y) \in N(f(0,0),\epsilon)$.

11. এখানে $f(x,0) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে differentiate করলেই পাবে $f_x(0,0) = 0$. একই যুক্তিতে $f_y(0,0) = 0$. এদিকে $x \neq 0$ এবং $y \neq 0$ হলে $f_x(x,y) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$. যখন $(x,y) \to (0,0)$ হবে তখন $2x\sin\frac{1}{x} \to 0$ হলেও $-\cos\frac{1}{x}$-এর limit থাকবে না। তাই $f_x(x,y)$-এরও limit থাকতে পারবে না। সুতরাং f_x কোনোভাবেই $(0,0)$-তে continuous হতে পারছে না। **12.** একটা counterexample এরকম, $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ যেখানে $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$. **15.** Jacobian-এর determinant হল $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. তাই functionally related হচ্ছে না। **16.** $\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} = 0$, যার determinant অবশ্যই 0. আসলে এখানেও একটা functional relation আছে, সেটা হল $\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1$, মানে দড়িটা এখানে একটা গোলের মত রয়েছে। **17.** এখানে Jacobian-এর determinant-টা হচ্ছে $\begin{vmatrix} 2ax+2hy & 2by+2hx \\ 2Ax+2Hy & 2By+2Hx \end{vmatrix} = \cdots = (aH-Ah)x^2 + (aB-Ab)xy + (Bh-Hb)y^2$. যদি এটা identically equal to 0 হয়, তবে coefficient-গুলোর প্রত্যেকটা আলাদা করে শূন্য হবে। তাই $aH = Ah$, $aB = Ab$ এবং $Bh = Hb$ হবে। সেখান থেকেই আমাদের প্রয়োজনীয় শর্তটা চলে আসছে।
18. $uv + vw + wx + 1 \equiv 0$. **19.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2x & 2x & -x \end{vmatrix} = \cdots = 0$. তাই functionally related. একটা relation তো চোখে দেখেই পাওয়া যাচ্ছে-- যেহেতু $x = \frac{u+v}{4}$, তাই $w = \frac{v(u+v)}{4}$. **20.** $u^3 - w - 3uv \equiv 0$.
21. **(1)** $f_{xx} = 2y^3$, $f_{yy} = 6x^2y$, $f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2$. **(2)** $f_{xx} = e^x$, $f_{yy} = -6y\cos y^3 + 9y^4\sin y^3$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$. **(3)** $f_{xx} = -y^2\sin(xy)$, $f_{yy} = -x^2\sin(xy)$, $f_{xy} = f_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$.
22. $f(0,y) \equiv 0$. তাই $f_y(0,0) = 0$. আবার $(x,y) \neq (0,0)$ হলে $f_y(x,y) = \frac{x^2[4y^3(x^2+y^2) - y^4(2y)]}{(x^2+y^2)^2}$. তা থেকে $f_y(x,0) \equiv 0$. সুতরাং উত্তর হল $f_{yx}(0,0) = 0$. **24.** $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$. **28.** $f_{xy}(0,0) = 1$, $f_{yx}(0,0) = 0$. এখানে f_x-টা $(0,0)$-তে differentiable নয়। **29.** এখানে $f_x(x,0) \equiv 0$ এবং $f_x(0,y) \equiv 0$. তাই $f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$. সুতরাং $\nabla f_x(0,0) = (0,0)$. অতএব যদি f_x-কে $(0,0)$-তে differentiable হতে হয়, তবে $(x,y) \to (0,0)$ হলে $\frac{f_x(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ হতে হবে, মানে $\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^{5/2}} \to 0$ হতে হবে। কিন্তু $x = y$ লাইন বরাবর এগোলে এটা শূন্যতে যাচ্ছে না। **31.** f_{yx}-টা $(0,0)$-তে continuous নয়, কারণ $f_{yx}(0,0) = 0$ কিন্তু y-axis বরাবর $(0,0)$-র দিকে গেলে $f_{yx}(x,y) \to 1$. **33.**

	$x\partial_x$	$x\partial_y$	$y\partial_x$	$y\partial_y$
$x\partial_x$	$x\partial_x + x^2\partial_x^2$	$x\partial_y + x^2\partial_x\partial_y$	$xy\partial_x^2$	$xy\partial_x\partial_y$
$x\partial_y$	$x^2\partial_y\partial_x$	$x^2\partial_y^2$	$x\partial_x + xy\partial_y\partial_x$	$x\partial_y + xy\partial_y^2$
$y\partial_x$	$y\partial_x + xy\partial_x^2$	$y\partial_y + xy\partial_x\partial_y$	$y^2\partial_x^2$	$y^2\partial_x\partial_y$
$y\partial_y$	$xy\partial_y\partial_x$	$xy\partial_y^2$	$y\partial_x + y^2\partial_y\partial_x$	$y\partial_y + y^2\partial_y^2$

34. **(1)** $\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2\partial_x\partial_y$. **(2)** $x^2\partial_x^2 + y^2\partial_y^2 + x\partial_x + y\partial_y + 2xy\partial_y\partial_x$.
(3) $y^2\partial_x^2 + x^2\partial_y^2 + x\partial_x + y\partial_y + 2xy\partial_y\partial_x$. **(4)** $x^2\partial_x^2 + y^2\partial_y^2 + x\partial_x + y\partial_y - 2xy\partial_y\partial_x$. **38.** পরিবর্তিত differential equation-টা হবে--

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2\frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3)\frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0.$$

লক্ষ করো যে, এটা ঠিক মূল differential equation-টার মতই, খালি x, y-এর জায়গায় u, v, এই যা তফাত। সেই জন্যই বলা যায় যে z-কে x, y-এর function হিসেবে প্রকাশ করতে যেই function লাগবে, সেই একই function দিয়ে z-কে u, v দিয়েও প্রকাশ করা যাবে। মানে, $z = f(x, y)$ হলে $z = f(u, v)$-ও হতে বাধ্য।
কী করে পরিবর্তিত differential equation-টা পেলাম সেটা বোঝার জন্য প্রথমে u আর v-কে x আর y দিয়ে লিখে নাও, $v = \frac{1}{y}$ এবং $u = xy$. এবার $\frac{\partial z}{\partial x}$ ইত্যাদিদেরকে $\frac{\partial z}{\partial u}$ ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশ করে নাও--

- $\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial u}$,
- $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$,
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

39. এখানে $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ এবং $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ বার করে নাও--

- $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta$, ,
- $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

যে জিনিসটা দেখাতে বলেছে তার ডানদিকে এইসব বসালেই দিব্যি সব কেটেকুটে বাঁদিকের জিনিসটা এসে যাবে।
40. শেষ পর্যন্ত উত্তর আসা উচিত $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. এর জন্য প্রথমে $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ইত্যাদি বার করে নাও--

- $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}$
- $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$,
- $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$,
- $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{x-y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$.

এইবার গায়ের জোরে এই সব আমাদের differential equation-এ বসিয়ে দিলে ব্যাপক কাটাকাটি হয়ে উত্তর পেয়ে যাবে।
41. প্রথম অংশের জন্য কাজে লাগবে $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2\cos^2 u - \frac{1}{2}\sin 2u}{x-y}$ এবং $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2\cos^2 u + \frac{1}{2}\sin 2u}{x-y}$.
দ্বিতীয় অংশে $(x\partial_x + y\partial_y)\sin 2u = 2\cos 2u(x\partial_x + y\partial_y)u = 2\cos 2u\sin 2u$.

Chapter IV
Applications of derivatives

DAY 20
Maximum, minimum এবং saddle point (part 1)

20.1 স্মৃতি রোমন্থন

আমরা যখন হায়ার সেকণ্ডারীতে differentiation শিখেছিলাম, তখন একটা জিনিস প্রায়ই করতাম। সেটা হল differentiate করে কোনো function-এর maximum বা minimum বার করা। কাজটা multivariate calculus-এর বেলাতেও করা যায়। প্রথমে হায়ার সেকণ্ডারীর জিনিসটা চট্ করে একটু মনে করিয়ে দিই। ধরো একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দেওয়া আছে, যেটা সর্বত্রই differentiable. যদি কোনো $x = a$-তে $f(x)$-টা maximum হয়, মানে Fig 1-এর মত একটা চূড়া থাকে, তবে সেখানে tangent-টা horizontal হবে, তাই $f'(a) = 0$ হতে বাধ্য। যদি কোনো $x = b$-তে $f(x)$-টা minimum হয় (Fig 2), তাহলেও $f'(b) = 0$ হবে। তাই যেই কেউ একটা $f(x)$ দিয়ে তার maximum বা minimum বার করতে বলত, অমনি আমরা সেটাকে differentiate করে $f'(x)$ বার করতাম, আর দেখতাম কোথায় কোথায় $f'(x) = 0$ হচ্ছে। এরকম বিন্দুকে বোঝানোর জন্য একটা ভাষা ছিল--**stationary point.** এর সংজ্ঞা হল, x-এর যে সব value-তে $f'(x) = 0$ হয়, তাদেরকে বলে f-এর stationary point. অবশ্য stationary point দেখলেই সেখানে maximum বা minimum থাকবে ভেবে বসলে মুশকিল। কারণ এই "$f'(x) = 0$" শর্তটা হল যাকে বলে maximum বা minimum থাকার একটা necessary condition মাত্র, sufficient নয় মোটেই। অর্থাৎ কিনা maximum বা minimum থাকলে এই শর্তটা পালিত হতে বাধ্য বটে, কিন্তু শর্তটা কোথাও পালিত হলেই সেখানে maximum বা minimum থাকবেই এমন মনে করার কোনো কারণ নেই। যেমন--

- যদি ছোটোখাটো কোনো ঢিপি বা গর্ত থাকে, সেখানেও $f'(x) = 0$ হয়ে যাবে (Fig 3)। আমাদের দরকার সবচেয়ে উঁচু ঢিপি বা সবচেয়ে গভীর গর্তটা। কিন্তু differentiation-এর কায়দাটা ঢিপির উচ্চতা বা গর্তের গভীরতার তোয়াক্কা রাখে না। এই প্রসঙ্গে কিছু ভাষা মনে করিয়ে দিই। যেকোনো ঢিপির চূড়াই হল এককেটা **local maximum**, তাদের মধ্যে সবচেয়ে উঁচু যেটা (বা যেগুলো) তাদের বলে **global maximum**. একইভাবে যেকোনো গর্তেরই সবচেয়ে তলার বিন্দুটা হল **local minimum**, তাদের মধ্যে যেটা (বা যেগুলো) সবচেয়ে নীচে, তার নাম **global minimum**. মনে রেখো যে, global-টা local-ও বটে, কিন্তু local মাত্রেই global নাও হতে পারে।

Fig 1

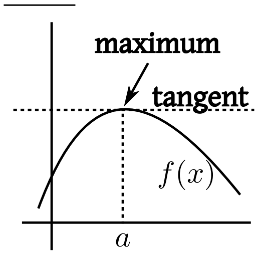


Fig 2

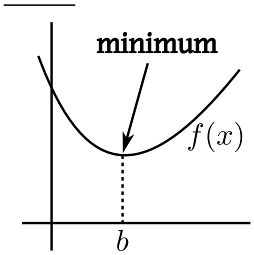
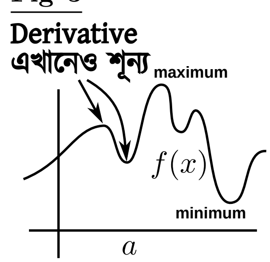


Fig 3



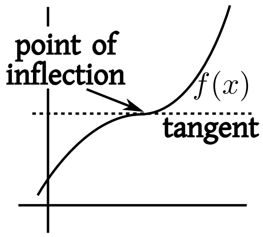


Fig 4

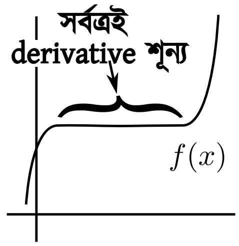


Fig 5

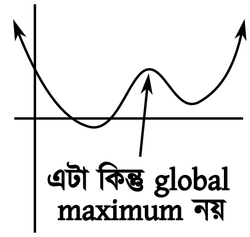


Fig 6

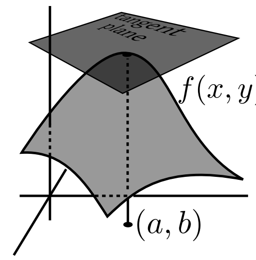


Fig 7

- ঢিপি বা গর্ত কোনোটাই না থাকলেও মাঝে মাঝে খামোখা $f'(x) = 0$ হয়ে যায়। এদের বলে **point of inflection**. একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 4-এ।
- আরেক রকম সম্ভাবনা দেখিয়েছি Fig 5-এ। এখানে গ্রাফের খানিকটা অংশ একেবারে সমতল। এই সমতল অংশের সর্বত্রই derivative হবে শূন্য। এইরকম যে কোনো বিন্দুকেই মনে করতে পারো যেন একই সঙ্গে একটা local maximum এবং local minimum!
- যদি function-টা unbounded above হয়, তবে কোনো maximum-ই থাকে না, অথচ তাও $f'(x) = 0$ হয়ে যেতে পারে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 6-এ। একইরকম ব্যাপার হতে পারে unbounded below আর minimum-এর বেলায়।

এই গেল একরকমের সমস্যা যেখানে maximum বা minimum না থাকলেও $f'(x) = 0$ হয়ে যেতে পারে। আরেক ধরণের সমস্যা হল, maximum আর minimum দুয়ের বেলাতেই $f'(x) = 0$ হয়ে যায়। সুতরাং কেবলমাত্র $f'(x) = 0$ দেখেই জোর দিয়ে বলা যায় না maximum-ই হবে, নাকি minimum হবে। সেটা নির্ধারণের জন্য একটা বাড়তি জিনিস করতে হত, যাকে বলে **second derivative test**. তার জন্য $f(x)$-কে অন্ততঃ দুবার differentiate করতে পারতে হবে। সেইটা করে বেরোবে $f''(x)$. যেখানে $f'(x) = 0$ হয়েছে, সেখানে $f''(x)$ যদি < 0 হয়, তবে বুঝতে হবে সেখানে একটা local maximum আছে। আর যদি $f''(x) > 0$ হয়, তবে হবে local minimum. যদি $f''(x) = 0$ হয়, তবে আবার সব ঘেঁটে যায়, ঢিপিও হতে পারে, গর্তও হতে পারে, আবার point of inflection হলেও আপত্তি নেই। যারা real analysis ভালো করে পড়েছ, তাদের হয়তো মনে আছে যে, তখন $f'''(x)$-কে পরীক্ষা করে দেখা যায়, তাতেও কাজ না হলে $f^{(4)}(x)$ নিয়ে কাজ করা যায়, ইত্যাদি। কিন্তু সে ভারী ঝকমারি।
এতসব যে বললাম, সে হল যখন f-টা পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরেই differentiable. যদি তা না হয়, তবে সমস্যা আরো বাড়বে। কিন্তু আমাদের এই বইতে সে প্রসঙ্গ খুব একটা আসবে না।
যদি আমরা কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করি, তাহলেও ব্যাপারটা ঠিক একই রকম। এবার আমরা সেটা নিয়েই আলোচনা করব।

20.2 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-এর maximum, minimum ইত্যাদি

আমরা ছবি আঁকার সুবিধার জন্য $n = 2$ নেব, যদিও যেকোনো $n = 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদির জন্যও মূল ধারণাগুলো একই থাকবে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 7-এ। এখানেও ঢিপির চূড়াতে tangent plane-টা হবে horizontal. তাই $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. সুতরাং maximum বা minimum বার করার জন্য এখানেও আমরা প্রথমে দেখে নেব কোথায় কোথায় $\nabla f = (0, 0)$ হয়। যেই সব (x, y)-এর জন্য $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ হবে, তাদেরকে বলতে চাই stationary point. কিন্তু এখানে একটা ছোটো সমস্যা আছে। যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয়, তবে $f'(a) = 0$ মানে--

- এক, $f(x)$-টা $x = a$-তে differentiable,
- এবং দুই, derivative-টা ওখানে শূন্য।

কিন্তু যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ হয়, যেখানে $n > 1$, তবে $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, হলেই যে $f(\mathbf{x})$-টা $\mathbf{x} = \mathbf{a}$-তে differentiable হবে এমন কোনো কথা নেই। সেই কারণে এক্ষেত্রে stationary point-এর সংজ্ঞায় differentiability-টাকে আলাদা শর্ত হিসেবে ধরে নিতে হবে।

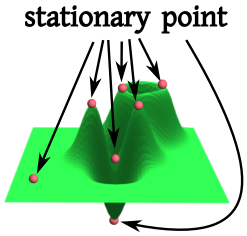


Fig 8



Fig 9

> DEFINITION: **Stationary point**
>
> We say that $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ is a **stationary point** of $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ if f is differentiable there and $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

অবশ্য এখানেও stationary point হওয়াটা local maximum বা minimum হওয়ার জন্য একটা necessary condition মাত্র, sufficient নয় মোটেই। ছোটো বড়ো যেকোনো ঢিপির চূড়াতেই (বা গর্তের সবচেয়ে তলার বিন্দুতেই, বা সমতল কোনো জায়গায়) $\nabla f = (0, 0)$ হবে। কিছু উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 8-এ। এই সব local maximum আর local minimum-দের ভীড়ের মধ্যে কোথায় global maximum আর global minimum আছে, সেটা আমাদের আলাদা করে দেখতে হবে। এমনও হতে পারে যে কোথাও $\nabla f = (0, 0)$ হল, অথচ সেখানে কোনো local maximum বা local minimum-ই নেই! এরকম জায়গাকে বলে **saddle point**. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হত, তবে এদেরই আমরা বলতাম point of inflection. এখানে এদের saddle point বলার কারণ ঘোড়ার জিন বা saddle-এ এরকম বিন্দু থাকে (Fig 9)। এই পুরো আলোচনাটাকে এবার অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখা যাক। বিশেষতঃ যদি $n > 2$ হয়, তবে তো আর এরকম ছবি আঁকা যাবে না, তখন খালি অংকের পথেই এগোতে হবে। প্রথমে বলি maximum-এর সংজ্ঞা।

> DEFINITION: **(Global) maximum**
>
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ for some $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Then we say that f has a **(global) maximum** at $\mathbf{a} \in D$ if
> $$\forall \mathbf{x} \in D \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}).$$

এখানে আমরা global শব্দটাকে ব্র্যাকেটের মধ্যে রেখেছি, কারণ যদি কোথাও খালি maximum লেখা দ্যাখো, তবে জানবে global maximum-এর কথাই হচ্ছে। একইভাবে minimum-এর সংজ্ঞা--

> DEFINITION: **(Global) minimum**
>
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ for some $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Then we say that f has a **(global) minimum** at $\mathbf{a} \in D$ if
> $$\forall \mathbf{x} \in D \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}).$$

এবার এদের local সংস্করণদের সংজ্ঞা শেখা যাক--

DEFINITION: Local maximum

Let $f : D \to \mathbb{R}$ for some $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Then we say that f has a **local maximum** at $\mathbf{a} \in D$ if

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in N(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a}).$$

এখানে কিন্তু local শব্দটাকে ব্র্যাকেটের মধ্যে রাখিনি, কারণ local maximum-এর কথা বললে সাধারণতঃ local শব্দটাকে উহ্য রাখা হয় না। একইরকম সংজ্ঞা বানানো যায় local minimum-এর বেলাতেও--

DEFINITION: Local minimum

Let $f : D \to \mathbb{R}$ for some $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Then we say that f has a **local minimum** at $\mathbf{a} \in D$ if

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in N(\mathbf{a}, \epsilon) \cap D \quad f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a}).$$

Exercise 1: একটা ঠকানো প্রশ্ন দিই। একটা differentiable function আছে $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. এর ঠিক একটাই local maximum. এ থেকে কি জোর দিয়ে বলা যায় যে, ওটাই f-এর global maximum হতে বাধ্য?
HINT: (চিন্তার সুবিধার জন্য $n = 1$ ধরে নিতে পারো, উত্তরটা তাতে বদলাবে না)।
■

এবার আরেকটা ঠকানো প্রশ্ন।

Exercise 2: আগের অংকটাই আবার দিচ্ছি, তার সঙ্গে এবার বাড়তি শর্ত দিচ্ছি যে f-টা bounded-ও বটে। তবে কি একমাত্র local maximum-টা global maximum হতে বাধ্য?
■

লক্ষ করো, এই সংজ্ঞাগুলোয় কোথাও আমরা differentiation-এর কোনো উল্লেখ করি নি। Differentiation-এর ব্যাপারটা আসে নীচের theorem-টা থেকে।

THEOREM

Let $f : D \to \mathbb{R}$ for some $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{a}$ be some interior point of D. If f has a local maximum or local minimum at $\mathbf{a}$, and f is differentiable there, then $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

লক্ষ করো, এখানে কিন্তু f-কে পুরো D-এর উপরে differentiable চাইনি। খালি ওই $\mathbf{a}$ বিন্দুতে differentiable হলেই হল। অবশ্য পুরো D-এর উপরে differentiable হলেও আপত্তি নেই। আরো লক্ষ করো যে, $\mathbf{a}$-কে D-এর একটা interior point নিয়েছি, মানে $\mathbf{a}$ চারপাশে D-এর মধ্যে যেন খানিকটা হাত-পা খেলাবার জায়গা থাকে। আসলে প্রমাণটার মধ্যে একটু limit নেবার ব্যাপার আছে, মানে $\mathbf{a}$-র কাছ থেকে শুরু করে $\mathbf{a}$-এর দিকে এগোতে হবে। সেই কারণেই এই হাত-পা খেলানোর জায়গাটুকু প্রয়োজন।
Proof:

Case 1: f has local maximum at $\mathbf{a}$:

To show $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, ie,

$\forall i \in \{1, ..., n\}\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0.$

$\forall i$ Take any $i \in \{1, ..., n\}$.

Let $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$.

To show $\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} = 0.$

Since $\nabla f(\mathbf{a})$ exists, hence the limit exists finitely. Let's call it L.

আমরা এবার দেখব $L = 0$. কাজটা দুই ধাপে করব--একবার দেখাব $L \le 0$, তারপর দেখাব $L \ge 0$.

Now, since $\mathbf{a}$ is an interior point of D, hence $\exists \delta_1 > 0\quad N(\mathbf{a}, \delta_1) \subseteq D$.

Again, since f has a local maximum at $\mathbf{a}$,

hence $\exists \delta_2 > 0\quad \forall \mathbf{x} \in N(\mathbf{a}, \delta_2) \cap D\quad f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$.

Let $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Then $\forall x_i \in (a_i - \delta, a_i)\quad (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in N_n(\mathbf{a}, \delta)$.

Hence $\frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} \le 0.$

So $\lim_{x_i \to a_i-} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} \le 0$, and hence $L \le 0$.

Again $\forall x_i \in (a_i, a_i + \delta)\quad \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} \ge 0.$

So $\lim_{x_i \to a_i+} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} \ge 0$, and hence $L \ge 0$.

Combining, we must have $L = 0$, as required.

Case 2: f has local minimum at $\mathbf{a}$:

The result follows on applying case 1 to $-f$.

[Q.E.D]

আগেই বলেছি যে এমন হতেই পারে, একটা stationary point-এ কোনো (local বা global) maximum বা minimum নেই, মানে $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ হচ্ছে, কিন্তু সেখানে কোনো ঢিপি বা গর্ত নেই। নীচের অংকটা সেই নিয়েই। এখানে **local extremum** বলে একটা কথা ব্যবহার করেছে, এর মানে local minimum বা local maximum যেকোনো একটা।

Exercise 3: Prove or disprove: A real-valued function defined on an open set G in $\mathbb{R}^2$ with each partial derivative zero at some point in G has a local extremum at that point.[2] **(2009.8b)**

HINT:

কেবলমাত্র দুটো partial derivative-এর উপর শর্ত থেকে সেই বিন্দুতে function-টার আচরণ প্রায় কিছুই বলা যায় না। সেখানে differentiable পর্যন্ত না হতে পারে, discontinuous-ও হতে পারে। সেই মত দুটো counterexample দিচ্ছি।

The statement is false.

<u>Counterexample:</u> Let

$$f(x,y)=\begin{cases}-1 & \text{if } x<0, y\neq 0\\ 1 & \text{if } x>0, y\neq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

Then $f(x,0)\equiv 0$ and $f(0,y)\equiv 0$. So the two partial derivatives at $(0,0)$ are both zero.

But f does not have a local extremum at $(0,0)$.

⟦ <u>Because:</u>

$f(0,0)=0$, and in every neighbourhood of $(0,0)$ the function takes the values $-1<0$ and $1>0$.

⟧

এই counterexample-এ $(0,0)$ কিন্তু f-এর stationary point নয়। এবার আরেকটা counterexample দেখব, যেখানে f-টা সর্বত্র differentiable. এবার $(0,0)$-টা f-এর একটা stationary point হবে।

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

The statement is false.

<u>Counterexample:</u> $f(x,y)=xy$. Then $f_x(x,y)=y$ and $f_y(x,y)=x$.

So $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

Here $f(0,0)=0$. But $f(x,y)$ takes both positive and negative values in every neighbourhood of $(0,0)$.

■

দ্বিতীয় counterexample-এ যে ঘটনাটা ঘটেছে, সেটাকে বলে **saddle point**. অংকের ভাষায়--

DEFINITION: Saddle point

Let $f: D\to\mathbb{R}$ for some $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{a}\in D$ be a stationary point of f. Then $\mathbf{a}$ is called a **saddle point** of f, if

$$\forall\epsilon>0\quad \exists\mathbf{b},\mathbf{c}\in N(\mathbf{a},\epsilon)\cap D\quad f(\mathbf{b})<f(\mathbf{a})<f(\mathbf{c}).$$

এই সংজ্ঞাটা দেখে ভয় লাগতে পারে। কিন্তু এর বক্তব্য খুব জটিল কিছু নয়--যাই neighbourhood নাও না কেন, তার মধ্যে এমন কোনো point পাবে যেখানে f-এর value-টা $f(\mathbf{a})$-এর চেয়ে ছোটো (ফলে $\mathbf{a}$-তে local minimum থাকতে পারছে না), আবার এমন একটা point-ও পাবে যেখানে value-টা $f(\mathbf{a})$-এর চেয়ে বড় (ফলে local maximum হবার পথেও কাঁটা)।

আর একটা কথা--maximum বা minimum দুরকমের হতে পারে--local আর global. কিন্তু saddle point সর্বদাই local জিনিস, ওর কোনো global সংস্করণ নেই।
যেকোনো stationary point-এই হয় local maximum থাকবে, আর নয়তো local minimum থাকবে, আর নয়তো saddle point থাকবে। কোনটা হবে, সেটা বার করার জন্য একটা second derivative test আছে। আলোচনার সুবিধার জন্য ধরে নিচ্ছি যে, f-কে যতবার খুশি differentiate করা যাবে। তাহলে f-এর যাবতীয় second order partial derivative-গুলোকে সাজিয়ে একটা matrix বানাতে পারবে, যার (i, j)-th entry হবে

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

এর পোশাকী নাম হল **Hessian.** যেহেতু আমরা f যথেষ্ট ভদ্রসভ্য function নিয়েছি[1], তাই mixed partial-দের বেলায় কে আগে কে পরে তাতে কিছু এসে যাবে না, মানে

$$\forall i, j \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

তাই Hessian-টা একটা symmetric matrix হবে।
আরো আলোচনা করার আগে নীচের অংক কয়টা করে Hessian-এর ধারণাটার সঙ্গে বন্ধুত্ব করে নাও।

Example 1: যদি $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$ হয়, তবে যেকোনো (x, y) বিন্দুতে ওর Hessian বার করো। যদি $(x, y) = (1, 2)$ নিই, তবে Hessian-টা কী হবে?
SOLUTION: এখানে $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$.
অতএব $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + y^2e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$ এবং $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + (xy + 1)e^{xy}$.
সুতরাং Hessian হচ্ছে

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2y + y^2e^{xy} & 2x + (xy + 1)e^{xy} \\ 2x + (xy + 1)e^{xy} & x^2e^{xy} \end{bmatrix}.$$

যদি এর মধ্যে $(x, y) = (1, 2)$ বসাই তবে পাব--

$$H(1, 2) = \begin{bmatrix} 4 + 4e^2 & 2 + 3e^2 \\ 2 + 3e^2 & e^2 \end{bmatrix}.$$

■

Exercise 4: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে Hessian বার করো (x, y) বিন্দুতে। যদি $(x, y) = (0, 0)$ নিই, তবে Hessian-টা কত হবে, সেটাও বার কোরো।

[1] যতবার খুশি differentiate করা যায়।

Fig 10

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

(1) $f(x, y) = 2x + 4y - 5$, **(2)** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, **(3)** $f(x, y) = \sin(x + y)$, **(4)** $f(x, y) = 2x^3$, **(5)** $f(x, y) = y^{100}$.
■

আমরা Hessian নিয়ে এখানে মাথা ঘামাচ্ছি কেন? কারণ কোনো stationary point-এ local maximum আছে, নাকি local minimum নাকি saddle point, সেটা অনেক সময়ে বোঝা যায় সেই point-এ Hessian-টা কোন ধরণের তার উপর নির্ভর করে। এর জন্য আমাদেরকে symmetric matrix-দের কয়েকটা ধরণের কথা জানতে হবে। সেটাই আমাদের কালকের আলোচ্য বিষয়।

DAY 21
Maximum, minimum এবং saddle point (part 2)

21.1 PD, ND এবং ID

এখানে আমরা তিন ধরণের real, symmetric matrix-এর কথা শিখব, যাদের প্রথমটাকে বলে **positive definite (PD)**, দ্বিতীয়টাকে বলে **negative definite (ND)**, আর শেষেরটাকে বলে **indefinite (ID).** ব্যাপারটা প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক।

21.1.1 ছবি দিয়ে বোঝা: quadratic form

ছবি আঁকার সুবিধার জন্য আমরা প্রথমে খালি 2×2 সাইজের matrix-দের নিয়ে কাজ করব। ধরো এরকম একটা real, symmetric matrix হল

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

এটা থেকে আমরা একটা function বানাব $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, এইভাবে--

$$q(x, y) = 10x^2 + 2xy + 2yx + 3y^2 = 10x^2 + 4xy + 3y^2.$$

এটা কী করে পেলাম, সেটা বোঝার সুবিধার জন্য matrix-টার row আর column-গুলোর গোড়াতে x, y লেবেল লাগিয়ে নাও (Fig 10)। এবার matrix-টার প্রতিটা entry থেকে একটা করে term বানাব। প্রথম 10-টার row আর column দুয়েরই লেবেল হল x, তাই term-টা হবে $10 \times x \times x = 10x^2$. তেমনি তার পাশের 2-টার বেলায় লেবেল দুটো হল x আর y, তাই term-টা হবে $2 \times x \times y = 2xy$. আরেকটা যে 2 আছে, তার বেলাতে term-টা হবে $2 \times y \times x$. সুতরাং এও সেই $2xy$-ই হল। বাকী রইল নীচের 3-টা। সেটার জন্য পাব $3 \times y \times y = 3y^2$. এবার এই term-গুলো সব যোগ করে দিলেই $q(x, y)$ তৈরী হয়ে যাবে। এই $q(x, y)$-কে বলে এই matrix-টা থেকে তৈরী **quadratic form.** আরো আলোচনা শোনার আগে নীচের অংক কয়টা করে quadratic form বার করা রপ্ত করে নাও।

Exercise 5: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে quadratic form বার করো।

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, **(2)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(3)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **(4)** $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

HINT: শেষেরটার বেলায় তিনটে variable লাগবে, x, y আর z.
■

এবার আমরা quadratic form-দের গ্রাফ কীরকম চিন্তা করব। যেহেতু $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ তাই গ্রাফগুলো হবে একেকটা surface-এর মত। প্রতিক্ষেত্রেই $q(0, 0) = 0$ হবে।

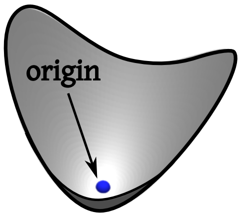


Fig 11

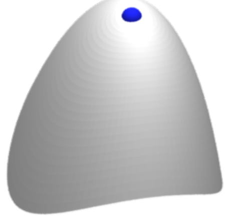


Fig 12



Fig 13

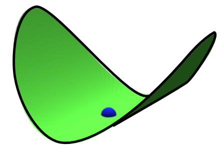


Fig 14

গ্রাফের চেহারাটা চারপাশ থেকে দেখলে মনে থাকবে ভালো, তাই একটু ভিডিও দেখে নিলে সুবিধা হবে। তার জন্য পাশের QR code-টা স্ক্যান করে নাও মোবাইল দিয়ে, বা নীচের address-টা টাইপ করো Google-এ। যদি ভিডিওটা দেখতে না পাও, আমাকে জানিও। আমার সঙ্গে যোগাযোগের হদিশ পাবে এই বইয়ের ভূমিকায়।
`https://arnabc74.github.io/mult/qf.html`

- যদি surface-টা Fig 11-এর মত হয়, তবে সেটাকে বলব positive definite (PD). এই surface-টা অনেকটা একটা বাটির মত, যার সর্বনিম্ন বিন্দুটা হল origin. সুতরাং origin ছাড়া বাকী সর্বত্রই $q(x, y) > 0$ হবে। বস্তুতঃ সেই থেকেই positive definite শব্দটা এসেছে, "definitely positive", অর্থাৎ কিনা "অবশ্যই positive."

- যদি বাটিটা উল্টে দাও, তবে পাবে Fig 12-এর মত অবস্থা। একে বলব negative definite (ND). এক্ষেত্রে origin ছাড়া সর্বত্রই $q(x, y) < 0$.

- আরেকরকমের ছবি রয়েছে Fig 13-এ। এখানে surface-টা ঠিক যেন একটা ঘোড়ার পিঠে বসার জিন। এক দিক থেকে দেখলে origin-টা সর্বনিম্ন বিন্দু, আবার আরেকভাবে দেখলে ওটাই সর্বোচ্চ বিন্দু। লক্ষ করো এখানে surface-টা কোথাও positive, কোথাও negative. যেহেতু এক কথায় কিছুই বলা যাচ্ছে না, সেই কারণেই indefinite (ID).

তাহলে আমরা তিন ধরণের real, symmetric matrix-এর কথা জানলাম। আমি এমন বলছি না যে, এই তিন ধরণের বাইরে আর কিছু সম্ভব নয়। যেমন একটা সম্ভাবনা হল surface-টা বেমালুম সমতল, সর্বত্রই শূন্য। আরেকটা সম্ভাবনা দেখিয়েছি Fig 14-তে, ঠিক যেন একটা ধোসার প্যাঁচ খোলা হচ্ছে। কিন্তু প্রথম যে তিনটে ধরণ দেখালাম, মানে PD, ND আর ID, আমাদের প্রধান মাথাব্যথা তাদের নিয়েই।
এই গেল ছবি দিয়ে বোঝা। এবার অংক দিয়ে বুঝব।

21.1.2 অংক কষে বোঝা

এবার প্রশ্ন হল--একটা কোনো real, symmetric matrix দেওয়া থাকলে বুঝব কী করে যে সেটা এই তিনটের মধ্যে কোনো এক ধরণের কিনা, এবং যদি হয়, তবে ঠিক কোন ধরণের? এর একটা কায়দা হল square complete করা। উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 2: ধরো এই matrix-টা দিলাম, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. এটা কোন ধরণের?

SOLUTION: এর জন্য quadratic form-টা হল $q(x, y) = x^2 + 2y^2$. যেহেতু এটা দুটো square যোগ করে তৈরী, তাই এটা কোনো দিনই negative হতে পারে না। শুধু তাই নয়, x আর y-এর মধ্যে একজনও যদি nonzero হয়, তবে

$q(x, y) > 0$ হতে বাধ্য। অতএব PD. ■

এই উদাহরণটা নেহাত সহজ ছিল, এবার একই জিনিস একটু কঠিন মোড়কে।

Example 3: যদি matrix-টা $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে সেটা কোন ধরণের?

SOLUTION: এবার $q(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$. এখানে ওই $2xy$-টা এসে গিয়ে মুশকিল হয়েছে। কিন্তু আমরা এখানে square complete করে $2xy$-টাকে x^2-এর সঙ্গে মিশিয়ে দেব--

$$x^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - y^2 = (x + y)^2 - y^2.$$

সুতরাং--

$$q(x, y) = (x + y)^2 - y^2 + 3y^2 = (x + y)^2 + 2y^2.$$

এখানেও দেখো, $(x, y) \neq (0, 0)$ হলেই $q(x, y) > 0$ হচ্ছে, তাই এটাও PD. ■

এবার একটা অন্যরকম উদাহরণ দেখা যাক।

Example 4: এবার $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ দিলাম। এটা কোন ধরণের?

SOLUTION: এখানে quadratic form-টা হল $q(x, y) = 2x^2 - 3y^2$. এটা positive আর negative দুইই হতে পারে, যেমন $x = 1, y = 0$ নিলে $q(1, 0) = 2$, যেটা positive, আবার $x = 0, y = 1$ নিলে $q(1, 0) = -3$, যেটা negative. অতএব এই matrix-টা হল ID. ■

Exercise 6: এমন একটা matrix বানাও তো যেটা ND! ■

আগেই বলেছি যে, এই তিনটে ধরণের বাইরেও real, symmetric matrix সম্ভব। যেমন ধরো নীচের উদাহরণটা।

Example 5: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ কোনো ধরণের?

SOLUTION: এখানে quadratic form-টা হল $q(x, y) = y^2$. এটা কখনোই negative হতে পারে না, তাই ND বা ID নয়। এদিকে এটাকে PD-ও বলা যাচ্ছে না, কারণ যদি $x = 1, y = 0$ নিই, তবে এটা শূন্য। যেহেতু $(1, 0) \neq (0, 0)$ অথচ $q(1, 0) = 0$, তাই এটাকে PD বলা গেল না।
এরকম real, symmetric matrix-দেরও একটা নাম আছে, কিন্তু আমাদের আলোচনায় তার প্রয়োজন হবে না বলে সে প্রসঙ্গে যাচ্ছি না। ■

কয়েকটা অংক করে PD, ND, ID শনাক্ত করা শিখে নাও।

Exercise 7: নীচে প্রতিক্ষেত্রে যে real, symmetric matrix দেওয়া রয়েছে, সেটা PD, ND, ID নাকি কোনোটাই নয়, বলো।

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$ **(2)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$ **(3)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 18 \end{bmatrix}$ **(4)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$ **(5)** $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

■

আমরা ছবি দিয়ে বোঝা শিখলাম, quadratic form দিয়ে করাও শিখলাম। এতেই মোটামুটিভাবে আমাদের কাজ চলে যাবে। আমাদের কাজটা হবে প্রথমে একটা function-এর Hessian বার করে সেটা PD নাকি ND নাকি ID নাকি কোনোটাই নয়, সেটা দেখা। এর জন্য প্রথমে $q(x, y)$ বার করে, তারপর square complete করে বা আন্দাজে আন্দাজে x, y বসিয়ে দেখাটা অনেক সময়েই বিরক্তিকর। সেই জন্য দুটো কায়দা শিখে রাখি।

21.1.3 দুটো কায়দা

প্রথম কায়দাটা যেকোনো সাইজের matrix-এর জন্যই কাজ করবে, এবং একটু জটিল। দ্বিতীয়টা হল খালি 2×2 সাইজের জন্য। সেটা খুবই সহজ।
প্রথমটা দিয়ে শুরু করি। এর জন্য একটা নতুন ভাষা লাগবে-- **leading principal minor**. এই ভয়ানক নামটা শুনে ঘাবড়ে যেও না, জিনিসটা তত ভয়ানক কিছু নয়। ধরো একটা square matrix আছে, যার সাইজ $n \times n$. এবার কোনো একটা $k \in \{1, \ldots, n\}$ নাও। Matrix-টার প্রথম k-খানা row আর প্রথম k-খানা column দিয়ে তৈরী submatrix-টার determinant-কেই বলে মূল matrix-টার k-th leading principal minor. যদি যেকোনো[2] k খানা row এবং সেই সেই column-গুলো নিতে, তাহলে যে submatrix-টা পেতে, তার determinant-কে বলে মূল matrix-টার একটা **principal minor**.

- যদি দ্যাখো যে, কোনো real, symmetric matrix-এর সবগুলো leading principal minor-এরই চিহ্ন +, তবে matrix-টা PD হবে। এখানে চিহ্ন '+' মানে সংখ্যাটা > 0 হতে হবে, $= 0$ হয়ে গেলে চলবে না। এই শর্তটা necessary এবং sufficient. বস্তুতঃ, এক্ষেত্রে যেকোনো principal minor-ই > 0 হতে বাধ্য।

- যদি ওরা $-, +, -, +, \ldots$ এইরকম হয় (মানে মাইনাস দিয়ে শুরু, এবং তারপর প্রতিবার চিহ্নটা ওল্টাচ্ছে), তবে জানবে matrix-টা ND. গুছিয়ে লেখার সময়ে এই ব্যাপারটাকে লিখি--

  The k-th leading principal minor has sign $(-1)^k$.

  এই শর্তটাও necessary এবং sufficient. এখানেও ব্যাপারটা সব principal minor-এর বেলাতেই খাটে, মানে সবগুলো principal minor-ও < 0 হবেই।

- দুঃখের ব্যাপার, ID-দের বেলায় এরকম কোনো কায়দা নেই। এক্ষেত্রে square complete করাই সহজ কায়দা, Square complete করার পরে যদি অন্ততঃ একটা square থাকে যার আগে + চিহ্ন, আর অন্ততঃ একটা square থাকে যার আগে মাইনাস চিহ্ন, তবেই ID. এই শর্তটাও necessary এবং sufficient.

  এই গেল প্রথম কায়দা। এবার দ্বিতীয়টার কথা। যদি matrix-টা 2×2 হয়, তবে determinant-টা < 0 হলেই ID, নইলে নয়। যদি determinant-টা > 0 হয়, তবে দেখতে হবে $(1, 1)$-th entry-টা কী (মানে উপরের বাঁদিকের সংখ্যাটা)। যদি সেটা > 0 হয়, তবে *PD*, যদি < 0 হয় তবে ND. সাবধান, এই কায়দাটা কিন্তু খালি 2×2-এর জন্যই!

Example 6: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ কোন ধরণের matrix?

SOLUTION: এর leading principal submatrix-গুলো হল $\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ স্বয়ং। এদের determinant হল -2 এবং $-2 \times (-1) - 1 \times 1 = 1$. লক্ষ করো চিহ্নগুলো প্রথমে মাইনাস, এবং তারপরে প্লাস। অতএব ND. ■

Example 7: বলো তো $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ কোন ধরণের matrix?

[2] প্রথম থেকেই নিতে হবে, বা পরপর নিতে হবে, এমন কথা নেই।

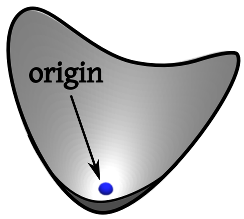


Fig 15

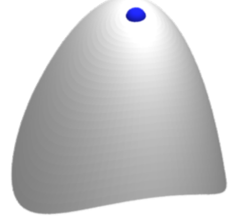


Fig 16



Fig 17

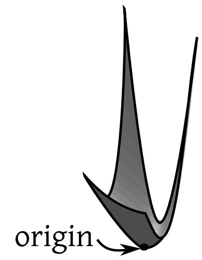


Fig 18

SOLUTION: এর determinant হল $2\times1-3\times3<0$. অতএব ID. এই কায়দাটা কাজ করল, কারণ matrix-টা এখানে 2×2. ■

Exercise 8: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে PD, ND, ID নাকি কোনোটাই নয়, বলো।

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(2)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(3)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **(4)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(5)** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

■

PD, ND আর ID-র গল্প তো বুঝলে। এবার দেখব এদের দিয়ে maximum, minimum আর saddle point চেনার কী সুরাহা হয়। কোনো একটা differentiable function $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ দিয়ে কেউ যদি জানতে চায় কোনো বিশেষ $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$-এ তার কোনো local maximum, local minimum বা saddle point আছে কিনা, তবে প্রথমে পরীক্ষা করে দেখতে হয় $\nabla f(\mathbf{a})=\mathbf{0}$ হচ্ছে কিনা। যদি না হয়, তবে ল্যাঠা চুকেই গেল, ওখানে কোনো maximum, minimum বা saddle point থাকতে পারে না। আর যদি $\nabla f(\mathbf{a})=\mathbf{0}$ হয়, তবে ওই বিন্দুতে maximum, minimum বা saddle point থাকতে বাধ্য। এদের মধ্যে কোনটা আছে, সেটা স্থির করার জন্য Hessian বার করে নিতে হয়। সেটা একটা real, symmetric matrix। এবার দেখতে হয় সেটা PD, ND বা ID কিনা। এই অব্দি আগেই শিখেছি। এবার পরবর্তী কাহিনী।

- যদি Hessian-টা ওই বিন্দুতে PD হয়, তবে local minimum থাকবে। এটা মনে রাখা মোটেই শক্ত কিছু নয়। খালি PD-র বেলায় surface-এর ছবিটা মনে রেখো (Fig 15)। ছবিটা একটু আগেও দেখেছিলে। Surface-টা দেখতে দিব্যি একটা বাটির মত। বাটির মাঝখানটা যে গভীরতম সে তো দেখাই যাচ্ছে। তাই minimum.
- যদি Hessian-টা ND হয়, তবে local maximum থাকবে। এটাও ছবি দিয়ে মনে রাখা যায়, উল্টো বাটির মত (Fig 16)।
- একইভাবে Hessian-টা ID হলে ছবিটা Fig 17-র মত saddle point হবে।
- এই তিন ধরণের কোনোটাই যদি না হয়, তবে এক কথায় কিছু বলা যাবে না।

এইবার একে একে এই ক্ষেত্রগুলোর উদাহরণ দেখা যাক।

Example 8: ধরো $f(x,y)=x^2e^y+y^2$. দ্যাখাও যে $(0,0)$ হল এর একটা stationary point. এবার পরীক্ষা করে দ্যাখো এটা local maximum, নাকি local minimum, নাকি saddle point.

SOLUTION: এই function-টা বিভিন্ন পরিচিত differentiable অংশ জুড়ে তৈরী, তাই $f(x,y)$ নিজেও differentiable. এখানে--

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2e^y+2y\end{aligned}$$

সুতরাং

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xe^y,\, x^2e^y + 2y).$$

অতএব $\nabla f(0,0) = (0,0)$. সুতরাং stationary point হওয়া নিয়ে কোনো সমস্যা নেই। এবার দেখতে হবে কোন ধরণের stationary point. তার জন্য Hessian-এর ডাক পড়বে--

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & 2 \end{bmatrix}.$$

সুতরাং $(0,0)$-তে

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

এটা PD, কারণ leading principal minor দুটো হল 2 এবং 4, যারা দুজনেই > 0. সুতরাং $(0,0)$ বিন্দুতে f-এর একটা local minimum রয়েছে। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 18-এ। লক্ষ করো যদি তুমি $(0,0)$-র খুব কাছের অঞ্চলটুকু দ্যাখো, তবে এই surface-টা দেখতে Fig 15-এর মতই।
Hessian এই জন্যই কাজে লাগে, stationary point-এর ধারেকাছে surface-টার আদলটা হয় Hessian-এর quadratic form-টার মত। ■

এবার অন্য ধরণের একটা উদাহরণ।

Example 9: মনে করো $f(x,y,z) = -2\sin(y^2) - (x-y+z)^2 + \cos^2 z$. দ্যাখো $(0,0,0)$-তে এর কোনো stationary point আছে কিনা। থাকলে তার চরিত্রবিশ্লেষণ করো।
SOLUTION: প্রথমেই লক্ষ করো যে, বিভিন্ন differentiable অংশ জুড়ে জুড়ে তৈরী হবার সুবাদে $f(x,y,z)$ একটা differentiable function. এখানে

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-2(x-y+z), -4y\cos(y^2) + 2(x-y+z), -2(x-y+z) - 2\cos z \sin z).$$

তাই $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$. সুতরাং stationary point.
এবার Hessian-এর পালা--

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -4\cos(y^2) + 8y^2\sin(y^2) - 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 - 2\cos 2z \end{bmatrix}.$$

সুতরাং

$$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

এবার দেখতে হবে এটা PD, নাকি ND, নাকি ID, নাকি কোনোটাই নয়। এর leading principal minor-রা হল

$$-2, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \cdots = -16.$$

দেখতেই পাচ্ছ চিহ্নগুলো প্রথমে মাইনাস দিয়ে শুরু হয়ে পরপর ওল্টাচ্ছে, অর্থাৎ অংকের ভাষায় the k-th leading principal minor has sign $(-1)^k$. অতএব $(0,0,0)$ বিন্দুতে Hessian-টা ND, এবং তাই ওই বিন্দুতে function-টার

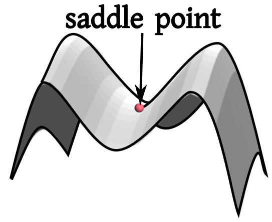


Fig 19

একটা local maximum আছে। এখানে অবশ্য আর ছবি এঁকে দেখাতে পারছি না, কারণ variable-ই আছে তিনটে, তার সঙ্গে আবার $f(x, y, z)$-কে গ্রাফ এঁকে দেখাতে তো চারটে dimension লাগবে। এই বইটা যে যন্ত্রে ছাপা তাতে আবার চার dimension-এর কাগজ ঢোকানোই যায় না! ■

এবার আরেক ধরণের একটা উদাহরণ দেখি।

Example 10: যদি $f(x, y) = \sin(x^2) + \cos^2(y+1)$ নিই, তবে দেখাও যে $(0, -1)$ হল একটা stationary point. এটা কোন ধরণের?

SOLUTION: বিভিন্ন differentiable function মিলিয়ে আমাদের $f(x, y)$ তৈরী, তাই $f(x, y)$ অবশ্যই differentiable. এখানে

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x\cos(x^2), -2\sin(y+1)\cos(y+1)).$$

সুতরাং $\nabla f(0, -1) = (0, 0)$. অতএব $(0, -1)$ অবশ্যই একটা stationary point. এখানে f-এর Hessian হল

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) & 0 \\ 0 & -2\cos(2(y+1)) \end{bmatrix}.$$

সুতরাং

$$H(0, -1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

এটা ID. তাই saddle point. ছবি দেখতে চাইলে Fig 19 দেখে নিতে পারো।
■

Exercise 9: Show that $f(x, y) = xy$ has a saddle point at $(0, 0)$.[2] **(2008.8c,2004.8c)** ■

আমরা আগেই বলেছিলাম যে, কোনো stationary point-এ Hessian-টা PD, ND বা ID হলে সেখানে যথাক্রমে লlocal minimum, local maximum বা saddle point থাকে। কিন্তু যদি Hessian-টা PD, ND বা ID কোনোটাই না হয়, তবে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না। এবার সেরকম কিছু উদাহরণ দেখি।

Example 11: ধরো $f(x, y) = x^2 + y^4$ এবং $g(x, y) = x^2 + y^3$. তাহলে $(0, 0)$-তে দুজনেরই stationary point আছে। ওই বিন্দুতে ওদের Hessian বার করো। ওদের দুজনের ক্ষেত্রে stationary point-টার চরিত্র কী কী?

SOLUTION: Hessian matrix-টা দুই ক্ষেত্রেই হল $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. এর determinant হচ্ছে শূন্য। তাই PD, ND বা ID কোনোটাই নয়। কিন্তু একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে, f-এর বেলায় local minimum হবে। কারণ--

$$f(0,0) = 0 \text{ এবং } (x,y) \neq (0,0) \text{ হলে } f(x,y) > 0.$$

আবার g-এর বেলাতে $(0,0)$-তে একটা saddle point রয়েছে, কারণ--

$$g(x,y) = 0 \text{ এবং } y > 0 \text{ হলেই } g(x,y) > 0 \text{ আর } y < 0 \text{ হলেই } g(x,y) < 0.$$

তবেই বোঝ, Hessian থেকে এতসব কিছুই বোঝা যাচ্ছিল না। ■

Exercise 10: এবার $h(x,y) = x^2 - y^4$ নিলে দেখবে যে $(0,0)$-তে এখনও সেই একই Hessian matrix হচ্ছে। এবার কী হবে, maximum নাকি minimum নাকি saddle point? ■

DAY 22
Maximum, minimum এবং saddle point (part 3)

আজকে আমরা গতকালের মত একইরকমের আরো বেশ কিছু অংক দেখব। প্রথমে নীচের অংকটা করে দেখে নাও গতকালের পড়াটা তোমার মনে আছে কিনা।

Exercise 11: Show that $f(x,y) = (x-y)^3 + (2-x)^2$ has a saddle point at $(2,2)$.[2] **(2003.9c)**
HINT: মনে রেখো $g(t) = t^3$ নিলে $t = 0$-তে $g(0) = 0$, এবং $t = 0$-র খুব কাছে বাঁদিকে $g(t) < 0$ আর খুব কাছে ডানদিকে $g(t) > 0$. ■

Example 12: Answer the following multiple choice question with only one correct option.

Choose the correct option and justify.
The function $f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$ has a saddle point at

(A) $(0,0)$ (B) $(0,2)$ (C) $(1,1)$ (D) $(-2,1)$

[1+1] **(2019.1j)**
SOLUTION: যেহেতু saddle point হবার জন্য প্রথম প্রয়োজন stationary point হওয়া, তাই প্রথমে সেটা পরীক্ষা করা যাক। হয়তো তাতেই কিছু option বাদ হয়ে যেতে পারে।

Here
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6xy - 6x, 3x^2 + 12y^2 - 24y).$$

পরপর option-গুলো বসিয়ে গেলেই দেখবে কোনটা কোনটা stationary point হচ্ছে।

(x,y)	$\nabla f(x,y)$	stationary point
$(0,0)$	0	yes
$(0,2)$	0	yes
$(1,1)$	-9	no
$(-2,1)$	0	yes

So (C) is eliminated.

▪

এইবার বাকিগুলোর জন্য Hessian বার করতে হবে।

> The Hessian matrix is
>
> $$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 24y-24 \end{bmatrix}.$$

এবার (A), (B) আর (D)-এর জন্য Hessian বার করে দেখা যাক--

> | (x,y) | $H(x,y)$ | matrix type | stationary point type |
> |---|---|---|---|
> | $(0,0)$ | $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}$ | ND | loc max |
> | $(0,2)$ | $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$ | PD | loc min |
> | $(-2,1)$ | $\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$ | ID | saddle |
>
> Hence (D) is the correct option.

■

Exercise 12: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify.
Let $f(x,y) = \alpha x^2 + xy + \beta y^2$, where $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ and $4\alpha\beta \neq 1$. Then the sufficient condition for local maxima at $(0,0)$ is

(A) $\alpha < 0,\ \beta > 0,\ \alpha\beta < \frac{1}{4}$

(B) $\alpha < 0,\ \beta < 0,\ \alpha\beta > \frac{1}{4}$

(C) $\alpha > 0,\ \beta < 0,\ \alpha\beta < \frac{1}{4}$

(D) $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha\beta > \frac{1}{4}$

[1+1] **(2019.1d)**

HINT:

এখানে "the sufficient condition" বলেছে, ওটা হওয়া উচিত "a sufficient condition." আর ওই $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ এবং $4\alpha\beta \neq 1$ এই শর্তগুলোর কোনো দরকার নেই।
প্রথমে দেখে নাও $(0,0)$ একটা stationary point হচ্ছে কিনা। যদি হয়, তবে Hessian বার করো।

> Here $\nabla f(0,0) = (0,0)$ and the Hessian matrix is
>
> $$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 2\beta \end{bmatrix}.$$

এবার দেখতে হবে এটা PD, নাকি ND, নাকি ID. যেহেতু এখানে 2×2 সাইজের matrix নিয়ে কাজ হচ্ছে, অতএব সেটা অনায়াসেই বার করতে পারবে। সঠিক option তাহলে কী হবে?
■

এবার একটা অংক দেখব যেখানে খালি Hessian দিয়ে সুবিধা হবে না।

Example 13: Show that if $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$, then

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$$

at $(0, 0)$, but f has neither a maximum nor a minimum at $(0, 0)$.[4] **(2005.8c)**
SOLUTION: প্রথমে দেখে নেওয়া উচিত $(0, 0)$-তে আদৌ কোনো stationary point আছে কিনা--

> Clearly $f(x, y)$ is a differentiable function.
> Here $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (8x^3 - 6xy, -3x^2 + 2y)$.
> So $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

অতএব stationary point হচ্ছে--

> So $(0, 0)$ is a stationary point of f.

এবার ওই শর্তটা পরীক্ষা করে দেখতে হবে।

> $f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 6y$, $f_{xy}(x, y) = -6x$ and $f_{yy}(x, y) = 2$.
> So $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ at $(0, 0)$, as required.

এই শর্তটার তাৎপর্য কী? এটা আসলে Hessian-এর determinant. সেটা শূন্য হয়ে যাওয়া মানে Hessian-টা PD, ND বা ID কোনোটাই নয়। সুতরাং Hessian-এর পথে এগোনো যাবে না। দেখাতে হবে local maximum বা local minimum নয়। সরাসরি সংজ্ঞা প্রয়োগ করে সেটা দেখানোর চেষ্টা করা যাক। তার জন্য লক্ষ করো--

> We have $f(0, 0) = 0$.

এবার আমরা দেখাব যে, $(0, 0)$-র যতই কাছেই যাও না কেন, এমন point পাবে যেখানে $f(x, y) < 0$ হবে, এবং এমন point-ও পাবে যেখানে $f(x, y) > 0$ হবে। এ রকম ক্ষেত্রে সাধারণতঃ $(0, 0)$ থেকে কোনো একটা সহজ দেখতে লাইন বরাবর একটু নড়াচড়া করে দেখতে হয় positive হচ্ছে, নাকি negative হচ্ছে। প্রথম যে লাইনের কথা মনে আসে, সেটা হল x-axis এবং y-axis. যদি x-axis বরাবর নড়ি, মানে $y = 0$ বসিয়ে $f(x, 0) = 2x^4$ নিই, তবে $(0, 0)$ থেকে নড়লেই positive পাচ্ছি। সমস্যা হল y-axis বরাবর নড়লেও, মানে $x = 0$ বসিয়ে $f(0, y) = y^2$ নিলেও positive-ই থাকছে। এর পর মনে আসে $45°$ লাইনদুটোর কথা, মানে $y = x$ বা $y = -x$. কিন্তু $f(x, x)$ বা $f(x, -x)$ বার করে দেখতে পারো, এরাও origin-এর ধারেকাছে negative হচ্ছে না। একবার $y = x^2$ বসিয়েও দেখলাম, তাতে আবার সব শূন্য হয়ে গেল, মানে $f(x, x^2) \equiv 0$. দুচ্ছাই! এভাবে কাঁহাতক হাতড়ানো যায়? এখানে একটা ব্যাপার আমাদের সাহায্য করবে। সেটা এই যে, $f(x, y)$-কে এইভাবে factorize (উৎপাদকে বিশ্লেষণ) করা যায়--

> Here $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 = 2x^4 - 2x^2y - x^2y + y^2 = \cdots = (2x^2 - y)(x^2 - y)$.

তার মনে $f(x, y) < 0$ হবে, যখন y থাকবে x^2 এবং $2x^2$-এর মাঝখানে কোথাও, যেমন ধরো $y = \frac{3}{2}x^2$ নিলে। ছবি দিয়ে ভাবতে চাইলে Fig 20 দেখে নাও। শেড করা জায়গাদুটোতে $f(x, y) < 0$ হচ্ছে।
এইবার সব কিছু অংকের ভাষায় লিখে ফেলতে পারব।

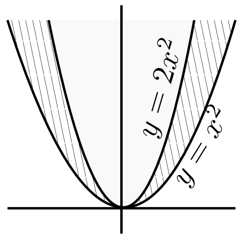


Fig 20

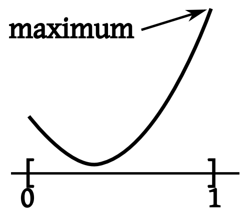


Fig 21

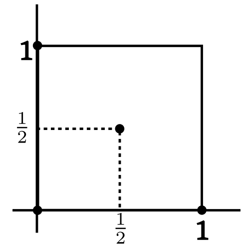


Fig 22

To show that f has neither a local maximum nor a local minimum at $(0,0)$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in N_2((0,0), \epsilon) \quad f(x_1, y_1) > 0 \text{ and } f(x_2, y_2) < 0.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

আমরা জানি যে, $f(x, y) > 0$ করার জন্য y-axis বরাবর খানিকটা নড়লেই হবে--

$\exists(x_1, y_1)$ Choose $x_1 = 0$ and $y_1 = \frac{\epsilon}{2} > 0$.

একইভাবে $f(x, y) < 0$ পাওয়ার জন্য নড়তে হবে $y = \frac{3}{2}x^2$ বরাবর, মানে $\left(x, \frac{3}{2}x^2\right)$ জাতীয় কোনো বিন্দু নিতে হবে। আমাদের কাজ হল x-টাকে যথেষ্ট ছোটো নেওয়া, যাতে বিন্দুটা $N_2((0,0), \epsilon)$-এর মধ্যে পড়ে।

Since $\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) \to (0,0)$ as $x \to 0$, hence $\exists a \neq 0 \quad \left(a, \frac{3}{2}a^2\right) \in N_2((0,0), \epsilon)$.

$\exists(x_2, y_2)$ Choose $(x_2, y_2) = \left(a, \frac{3}{2}a^2\right)$.

Then $f(x_1, y_1) = y_1^2 > 0$ and $f(x_2, y_2) < 0$ (by construction), as required.

■

নীচের অংকটা বেশ অন্যরকম। এখানে domain-টা একটা open set নয়, boundary-টা domain-এর মধ্যে রয়েছে। সুতরাং differentiation-এর কায়দাটা এখানে কাজ করবে না। কেন করবে না, সেটা একটা সহজ উদাহরণ দিয়ে বুঝে নিই। ধরো $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$-এর গ্রাফটা Fig 21-এর মত। এর maximum যে $x = 1$-এ রয়েছে, সে তো দেখাই যাচ্ছে। কিন্তু $f'(1)$ কি এখানে 0? না, কারণ ওখানে tangent-টা মোটেই horizontal মনে হচ্ছে না[3]। হঠাৎ দেখলে থতমত লাগতে পারে, $x = 1$-এর function-টা differentiable, সেখানে local maximum রয়েছে, অথচ তাও $f'(1) \neq 0$ হয় কী করে? তার কারণ ওই যে জিনিসটা আমরা ব্যবহার করি-- "local maximum থাকলেই $f'(x) = 0$ হয়"--তার জন্য function-টা খালি differentiable হলেই হয় না, local maximum-টাকে domain-এর <u>interior</u>-এ থাকতে হয়, boundary-তে থাকলে নাও হতে পারে।
তবেই বুঝছ, boundary-তে কাজ করা একটু ঝকমারি। নীচের অংকে সেই ঝকমারিরই আরেক রূপ দেখবে।

Example 14: Find the saddle points for the function $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ on the square $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. [2] **(2015.9b)**

SOLUTION: Saddle point হবার প্রথম শর্ত হল stationary point হওয়া (তা সে boundary-তেই হোক আর interior-এই হোক)।

[3] অবশ্য এখানে আমরা গ্রাফটাকে খালি $x = 1$-এর বাঁদিকেই পাচ্ছি, তাই tangent বলতে খালি বাঁদিকের অংশটুকুই বুঝব।

> Clearly $f(x, y)$ is a differentiable function.
> Here $\nabla f(x, y) = (y(1-3x^2-y^2), x(1-x^2-3y^2))$.
> So $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ if and only if
> $$\begin{aligned} y(1-3x^2-y^2) &= 0 \\ x(1-x^2-3y^2) &= 0. \end{aligned}$$

এই দুটো equation ঠিক কোনো পরিচিত প্যাটার্নে পড়ে না। তাই একটু কেস ধরে ধরে এগোতে হবে। প্রথমটা থেকে পাচ্ছি, $y = 0$ নয়তো $1 - 3x^2 - y^2 = 0$. দ্বিতীয়টা থেকে $x = 0$ নয়তো $1 - x^2 - 3y^2 = 0$.
মোট তাহলে চারটে কেস হচ্ছে--

> Case I: If $x = 0$ and $y = 0$, we get a stationary point $(0, 0)$.
> Case II: If $x = 0$ and $1 - 3x^2 - y^2 = 0$, we get $y^2 = 1$, or or $y = 1$, since $y \geq 0$. So we have one stationary point $(0, 1)$.
> Case III: If $y = 0$ and $1-x^2-3y^2 = 0$, then we similarly have a stationary point $(1, 0)$.
> Case IV: If $1 - 3x^2 - y^2 = 0$ and $1 - x^2 - 3y^2 = 0$, then $x^2 = y^2$. So $x = y = \frac{1}{2}$, since $x, y \geq 0$.

সুতরাং সব মিলিয়ে কী পেলাম চারটে stationary point, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ এবং $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ছবিতে এই চারটে বিন্দু দেখিয়েছি Fig 22-এ।

> The Hessian is
> $$H(x, y) = \begin{bmatrix} -6xy & 1-3x^2-3y^2 \\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy \end{bmatrix}.$$
> Hence
> $$H\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$
> which is ND. So we have a local maximum, not a saddle point, at $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

এইবার সমস্যা। বাকি stationary point তিনটে সকলেই boundary-র উপর, তাই Hessian-এর কায়দাটা ব্যবহার করা যাবে না, সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে এগোতে হবে। তার জন্য আগে দেখে নিই, ওই তিনটে জায়গায় $f(x, y)$-এর value কী কী হচ্ছে--

> Now $f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = 0$.

এবার দেখে রাখি কোথায় কোথায় $f(x, y) > 0$, $f(x, y) = 0$ আর $f(x, y) < 0$ হচ্ছে--

> Also for $(x, y) \in [0,1]^2$,
>
> $$f(x,y)\begin{cases} >0 & \text{if } (x,y)\in A \\ <0 & \text{if } (x,y)\in B \\ =0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
>
> where
>
> $$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : x^2+y^2<1,\ x,y>0\}, \\ B &= \{(x,y) : x^2+y^2>1\}. \end{aligned}$$

এই অঞ্চলগুলো ছবিতে দেখিয়েছি Fig 23-এ। লক্ষ করো $(0,0)$ বিন্দুটা পুরোই A দিয়ে ঘেরা। তাই সেখানে local minimum হবে।

> We have $(x, y) \in N_2((0,0),1) \cap [0,1]^2$, then $f(x, y) \geq 0$. So local minimum at $(0,0)$.

কিন্তু $(0,1)$ এবং $(1,0)$ আছে A আর B দুজনেরই গায় লেগে। তাই ওই দুই জায়গাতেই saddle point হবে।

> Since $(1,0)$ and $(0,1)$ are on the boundaries of both A and B, so there are saddle points there.

পুরো function-টা কীরকম দেখতে যদি জানতে ইচ্ছা হয়, তবে Fig 24 দেখে নাও। এটা কম্পিউটারে এঁকেছি। এ থেকে বুঝতে পারবে $(1,0)$ বা $(0,1)$-তে কী হচ্ছে। লোকটা দাঁড়িয়ে আছে $(1,0)$-তে। ও যদি ঝুলে পড়া আঁচলটা বরাবর চলে, তবে ও নামতে থাকবে, আর যদি ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা ধরে চূড়ার দিকে যায়, তবে উঠতে থাকবে। সেই জন্যই $(1,0)$-তে local maximum বা minimum নেই। ■

এই অংকটা যদি ঠিকঠাক বুঝে থাকো, তবে নীচের তিনটে ঠকানো প্রশ্নের উত্তর দিতে পারা উচিত।

Exercise 13: একটা differentiable function আছে, f, যার domain হল $[0,1]^2$. বলে দেওয়া আছে যে $\nabla f(0,0) = (0,0)$ তবে নীচের তিনটে বাক্যের মধ্যে কোনটা কোনটা ঠিক, কোনটা কোনটা ভুল?

(A) যদি $(0,0)$-তে Hessian-টা PD হয়, তবে সেখানে local minimum থাকতে বাধ্য।

(B) যদি $(0,0)$-তে Hessian-টা ND হয়, তবে সেখানে local maximum থাকতে বাধ্য।

(C) যদি $(0,0)$-তে Hessian-টা ID হয়, তবে সেখানে saddle point থাকতে বাধ্য।

Fig 23

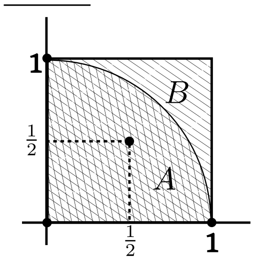
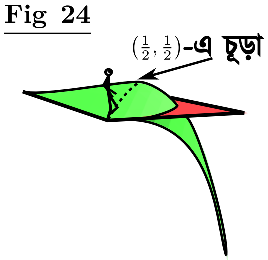


Fig 24



(D) যদি $(0,0)$-তে Hessian-টা ND হয়, তবে সেখানে global maximum থাকতে বাধ্য।

■

আরো কয়েকটা অংক দিচ্ছি তোমার করার জন্য।

Exercise 14: Find all critical points of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 40$ for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Also examine whether the function f attains a local maximum or a local minimum at each of these critical points. [5] **(2020.15)** ■

Exercise 15: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. Consider the function $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x^4 + 3y^4$. Then

(A) f has no extrema at $(0, 0)$

(B) f has maximum value at $(0, 0)$ which is 0

(C) f has maximum value at $(0, 0)$ which is 1

(D) f has minimum value at $(0, 0)$ which is 0.

[1+1] **(2020.1i)**
HINT: মাঝে মাঝে সহজ বুদ্ধি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হয় বেশী। ■

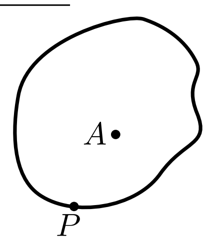
DAY 23
Lagrange multiplier method (part 1)

এবার একটা নতুন জিনিস শিখতে চলেছি, যেটা ছবি দিয়ে বুঝতে বেশী সহজ।

23.1 ছবি দিয়ে বোঝা

ধরো একটা curve আছে Fig 25-এর মত। সর্বত্রই smooth, কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই। ছবিটায় দুটো বিন্দু দেখানো আছে, P আর A. এর মধ্যে A এক জায়গায় স্থির আছে। P-টা curve বরাবর নড়াচড়া করতে পারে। প্রশ্ন হল-- P-টা curve-এর কোথায় থাকলে A-র সবচেয়ে কাছে আসবে? ছবিতে P-কে যেখানে দেখিয়েছি, সেখানে কি AP-র দৈর্ঘ্য

Fig 25



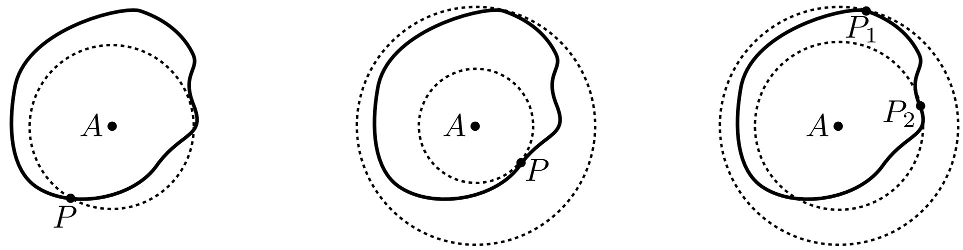


Fig 26 **Fig 27** **Fig 28**

minimum হয়েছে? চোখের আন্দাজেই বোঝা যাচ্ছে যে, হয়নি। ব্যাপারটা তলিয়ে দেখা যাক। মনে মনে A-কে কেন্দ্র করে P বিন্দু দিয়ে একটা circle কল্পনা করো (Fig 26)। লক্ষ করো P বিন্দুতে আমাদের curve-টা এই circle-টাকে কেটে গেছে, মানে circle-টার বাইরে থেকে এসে ভিতরে ঢুকে গেছে। এ থেকেই বলা যায় যে, AP-র দৈর্ঘ্য এখনও minimum হয়নি, কারণ curve-এর উপরে এমন বিন্দু পাচ্ছি, যেটা circle-টার ভিতরে (অর্থাৎ A থেকে যার দূরত্ব AP-র চেয়ে কম)। P-এর যে অবস্থানে সেটা A-র সবচেয়ে কাছে থাকবে, সেখানে curve-টা কোথাও এই circle-টার ভিতরে ঢুকবে না। এরকম একটা ছবি রয়েছে Fig 27-এ। এখানে curve-টা বাইরে থেকে এসে circle-টাকে আলতো করে P বিন্দুতে ছুঁয়ে ফের আবার বাইরে বেরিয়ে গেছে। "আলতো করে ছুঁয়ে থাকা" মানে হল circle-টার tangent এবং curve-টার tangent একই লাইন বরাবর থাকবে। অবশ্য আলতো করে ছুঁয়ে থাকলেই সেখানে A থেকে দূরত্ব minimum হবে, এমন কোনো কথা নেই। যেমন Fig 28-এর P_1 বা P_2-র বেলায়। তবে এটুকু অন্ততঃ বলা যায় যে, যদি P-র কোনো অবস্থানে AP-র দৈর্ঘ্য minimum হয়, তবে সেখানে এই আলতো করে ছোঁয়ার ব্যাপারটা হতে বাধ্য। এই ধারণাটা কাজে লাগিয়ে একটা গুরুত্বপূর্ণ কায়দা বার করা যায়, যার নাম **Lagrange multiplier method**. এইবার পুরো জিনিসটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করব।

23.2 অংকের ভাষায়

এখানে P বিন্দুটা নড়াচড়া করতে পারে, তাই P-কে (x, y) বললে x আর y হল variable. যদি A বিন্দুটাকে (a, b) বলি, তবে a আর b হল constant, কারণ A স্থির আছে। আমরা এখানে যে দূরত্বটাকে minimum করার চেষ্টা করছি, সেটা হল $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, যেটা (x, y)-এর একটা function. একে বলব **target function**. যে শর্ত সাপেক্ষে minimum বার করছি, মানে ওই curve-টার equation-টাকে বলে **constraint**. এইরকম শর্তসাপেক্ষে maximum বা minimum বার করাকে বলে constrained maximisation/minimisation বা এক কথায় **constrained optimisation.** যেসব (x, y) আমাদের constraint-টা মেনে চলে, তাদের set-টাকে বলে **feasible region**.

আমরা ছবি থেকে যে শর্তটা পেয়েছিলাম, সেটা হল দুটো curve পরস্পরকে আলতো করে স্পর্শ করবে। একটু ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক, কোন দুটো curve-এর কথা হচ্ছে এখানে। একটা curve তো অবশ্যই constraint-টা। অন্য curve-টা আমাদের উদাহরণে ছিল একটা circle, যার কেন্দ্র A-তে। অংকটাতে তো কোনো circle-এর কথা ছিল না, তবে circle-টা কোথা থেকে এল? ওটা এসেছিল target function-টা থেকে। এই উদাহরণে target function-টা ছিল A থেকে দূরত্ব। A থেকে সমান দূরবর্তী বিন্দুদের নিয়েই তৈরী হয়েছিল circle-টা। যেই কোনো একটা P নিচ্ছি, অমনি দেখছি আর কোন কোন বিন্দু আছে, যারাও A-র থেকে P-এর সমান দূরে। এই বিন্দুরা মিলে একটা curve তৈরী হয়েছিল (circle-টা)। সেই circle-এর ভিতরে দূরত্বটা P-এর চেয়ে কম, বাইরে বেশী। অতএব constraint curve-টা তার ভিতরে ঢুকে গেলেই ওই P-টা আর target function-কে minimum করবে না।

সুতরাং এই আলোচনা থেকে বুঝতে পারছ, circle হওয়াটা গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়, গুরুত্বপূর্ণ হল খালি এইটা যে, ওই curve-টা তৈরী হয়েছে সেই সব বিন্দুদের নিয়ে, যাদের জন্য target function-এর value-টা একই থাকে। যদি target function-টা অন্য কিছু নিতাম, তবে curve-টাও হয়তো circle না হয়ে অন্য কিছু হত। এই যে কথাটা বললাম--

> "সেই সব বিন্দু যাদের জন্য target function-এর value-টা একই থাকে"

এইরকম সব বিন্দুর set-এর একটা নাম আছে অংকের ভাষায়--

DEFINITION: Level set

Let $f : D \to \mathbb{R}$ be some function, where $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Let $c \in \mathbb{R}$. Then the set

$$\{\mathbf{x} \in D \ : \ f(\mathbf{x}) = c\}$$

is called a **level set** of f. If this set is a curve, then it is also called a **level curve**. If the set is a surface, then it is also called a **level surface**.

Level curve-দের সঙ্গে আমাদের আগেও দেখা হয়েছে। দ্বিতীয় অধ্যায়ে যখন আমরা contour আলোচনা করেছিলাম, সেই contour-গুলো আসলে একেকটা level curve ছিল।
কয়েকটা উদাহরণ দেখে সংজ্ঞাটা হজম করা যাক।

Example 15: যদি $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{if } x, y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ হয়, তবে নীচের level set-গুলো দেখতে কীরকম হবে?

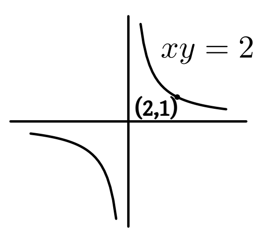
1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = 0\}$

এদের মধ্যে কোনটা কোনটা level curve-ও বটে?
SOLUTION: প্রথমটা হল একটা rectangular hyperbola, যেটা অবশ্যই একটা curve. দ্বিতীয়টা হল first quadrant-টা বাদে $\mathbb{R}^2$-এর বাকি সবকিছু। এটা মোটেই একটা curve নয়। ■

কখন একটা level set একটা curve হবে, তা নিয়ে বিস্তর আলোচনা করা যায়। কিন্তু আমরা এখানে তা করব না। খালি এটুকু বলে রাখি, যে আমরা যেসব target function-এর level set নিয়ে কাজ করব, তারা সবাই curve হবে, ব্যস্!
Lagrange multiplier কায়দাটার মূল কথাই হল যেখানে target function-টা minimum বা maximum হয়, সেখানে level curve আর constraint curve পরস্পরকে আলতো করে ছুঁয়ে থাকে। মানে দুজনের tangent-ই একই লাইন বরাবর থাকে। এই শর্তটাকে আমরা সামান্য অন্যভাবে লিখে নেব--দুজনের normal-ই যেন এক লাইন বরাবর থাকে। হঠাৎ খামোখা tangent-এর বদলে normal নিয়ে পড়লাম কেন? কারণ level curve-দের বেলায় tangent-এর চেয়ে normal বার করাটা একটু বেশী সহজ। ব্যাপারটা আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়েই একবার আলোচনা করেছিলাম। যদি ভুলে গিয়ে থাকো, তবে নীচের অংকটা করলেই আশা করি মনে পড়ে যাবে।

Example 16: Fig 29-এ $xy = 2$-র গ্রাফ আছে। এর উপরে একটা বিন্দু হল $(2,1)$. এই বিন্দুতে এর normal বার করো।
SOLUTION: এখানে $f(x,y) = xy$ নিলে equation-টাকে $f(x,y) = 2$ আকারে লেখা যায়, মানে f-এর একটা level curve.

Fig 29



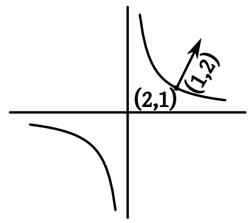


Fig 30

এর normal বার করার জন্য তোমাকে খালি ∇f বার করতে হবে, ব্যস।! এখানে $\nabla f(x,y) = (y,x)$. সুতরাং $(2,1)$ বিন্দুতে normal-টা হবে $(1,2)$ বরাবর (Fig 30)। ছবি থেকেই বুঝতে পারছ যে এটা সত্যিই normal-এর মতই দেখাচ্ছে। ■

একইভাবে constraint curve-টাকেও একটা level curve-এর আকারে লিখে নিলে সুবিধা হবে। যেমন ধরো $y = sinx$ হলে সেটাকে লিখতে পারি $g(x,y) = 0$, যেখানে $g(x,y) = y - \sin x$. তবে একই যুক্তিতে তার normal হবে $\nabla g(x,y) = (-\cos x, 1)$ বরাবর। আমরা চাইছি যেন ∇f এবং ∇g একই লাইন বরাবর থাকে (একই দিকে মুখ না করে থাকলেও আপত্তি নেই)। দুটো vector একই লাইন বরাবর থাকবে যদি ওদের একটাকে কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে অন্যটা পাওয়া যায়, অর্থাৎ এমন কোনো $\lambda \in \mathbb{R}$ থাকে যাতে $\nabla f = \lambda \nabla g$ হয়, মানে--

$$\nabla f - \lambda \nabla g = \mathbf{0}$$

হয়। এখানে λ-র value নিয়ে আমাদের মাথাব্যথা নেই। এরকম যেকোনো একটা λ থাকলেই হল, আমাদের খালি দরকার যেন ∇f এবং ∇g একই লাইন বরাবর থাকে।
এখানে আমরা একটাই constraint নিয়ে কাজ করছিলাম। যদি একাধিক constraint থাকে, তাহলেও একই পথে এগোনোর চেষ্টা করা যায়। ধরো আমাদের target function হল $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ এবং k-খানা constraint আছে, $g_1(\mathbf{x}) = 0, ..., g_k(\mathbf{x}) = 0$, যেখানে $g_1, ..., g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. সেক্ষেত্রে আমাদের শর্তটা হবে

$$\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \cdots - \lambda_k \nabla g_k = 0.$$

এই λ_i-দের বলে Lagrange's multiplier. ওদের value নিয়ে আমাদের মাথাব্যথা নেই। এই কারণে ওদের অনেক সময়ে বলে Lagrange's *undetermined* multiplier-ও বলে। এখানে "undetermined" শব্দটা বোঝাচ্ছে যে ওদের value-গুলো গুরুত্বপূর্ণ নয়।
পাছে এই সব জিনিস গুলিয়ে যায়, তাই মনে রাখার সুবিধার জন্য Lagrange একটা গল্প ফেঁদেছিলেন, এইরকম--
তোমাকে একটা target function দেওয়া আছে $f(\mathbf{x})$, আর কতগুলো constraint দেওয়া আছে, $g_1(\mathbf{x}) = 0, ..., g_k(\mathbf{x}) = 0$. তোমাকে বলেছে এই constraint-গুলো পালন করে f-এর maximum বা minimum বার করতে। ধরে ধরে সব $\mathbf{x}$ নিয়ে তো আর পরীক্ষা করে দেখা যায় না (এরকম $\mathbf{x}$-এর সংখ্যা infinite হতেই পারে)। তার বদলে প্রথমে এই জিনিসটা নাও--

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) - \cdots - \lambda_k g_k(x_1, ..., x_n).$$

এটা মনে রাখা শক্ত নয়, $f(x_1, ..., x_n)$ হল যেটাকে maximum বা minimum করতে চাও, আর প্রতিটা λ_i-এর পরে একটা করে constraint. এবার এটাকে x_i-দের সাপেক্ষে partially differentiate করে শূন্যের সাথে সমান করতে হবে। এইভাবে n-খানা equation পাবে। আর সেই সঙ্গে k-খানা constraint তো ছিলই। এই $n+k$-খানা equation-কে একসঙ্গে solve করতে হবে। এর ফলে যেসব $(x_1, ..., x_n)$ পাবে, তারাই হবে এই constrained optimisation-এর একেকটা stationary point. বহু ক্ষেত্রেই দেখা যায় যে stationary point-এর সংখ্যাটা finite হয়। আমাদের আশা হল f-এর maximum বা minimum বার করার জন্য অসংখ্য $\mathbf{x}$ নিয়ে পরীক্ষা না করে, কেবলমাত্র এই finite-সংখ্যক stationary point-দের মধ্যে খুঁজলেই চলবে। এইটা হল সহজ ভাষায় বলা। এতে অংকের কিছু খুঁটিনাটি বাদ পড়ে গেল। সবকিছু অংকের ভাষায় লিখলে পাবে এই theorem-টা, যেটা প্রথম দর্শনে খুব একটা স্নিগ্ধ নয়। ধীরে ধীরে বোঝাচ্ছি।

Lagrange multipliers theorem

Let $f, g_1, ..., g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable functions. Let

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Also let

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k) = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) - \cdots - \lambda_k g_k(x_1, ..., x_n).$$

If f has a constrained extremum in D at some $\mathbf{a} \in D$, and the Jacobian matrix of $g_1, ..., g_k$ has rank k there, then we must have

$$\nabla L = \mathbf{0}$$

at $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ for some values of $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

প্রথমেই কয়েকটা function নিয়ে শুরু করেছি, একটা target function আর কয়েকটা constraint function. এদেরকে আমরা continuously differentiable নিয়েছি। আমাদের constraint-গুলো হল $g_1 = 0, ..., g_k = 0$. সবগুলো constraint চাপালে যে set-টা হয়, তাকে বলেছি D. আমাদের কাজ হল এই D-এর মধ্যে f-টা কোথায় maximum বা minimum (মানে এক কথায় extremum) হয়, সেটা বার করা। এরকম extremum যে থাকবেই এমন কোনো গ্যারান্টি এই theorem-টা দিচ্ছে না, উল্টে বরং ধরে নিচ্ছে যে এরকম extremum আছে। তারপর আছে Jacobian আর rank-ওয়ালা একটা বিচ্ছিরি শর্ত। এখানে Jacobian বলতে এই $k \times n$ সাইজের matrix-টার কথা বলা হচ্ছে--

$$\begin{bmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \cdots & \partial_n g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_k & \partial_2 g_k & \cdots & \partial_n g_k \end{bmatrix}.$$

যদি extremum থাকে, এবং সেখানে এই matrix-টার rank-টা k হয়, তবে সেখানে Lagrange multiplier-এর শর্তটা খাটবে।

ব্যাপারটাকে এইভাবে ভাবলে হয়তো সুবিধা হবে। D যেন একটা মস্ত পুকুর, তার মধ্যে অসংখ্য মাছ ঘুরছে। এদের মধ্যে বোধহয়[4] কয়েকটা রুই মাছ আছে, তারাই হল extremum, যাদের আমরা ধরতে চাই। Lagrange multiplier-এর কায়দাটা হল একটা জাল, সেটা দিয়ে ফস্ করে অল্প কয়েকটা বিশেষ মাছ টেনে তোলা যায়। এটা আমাদের কাজে লাগবে তখনই যখন এই ব্যাপারগুলো ঘটবে--

- এক, পুকুরে অন্ততঃ একটা রুই মাছ থাকতে হবে, মানে আদৌ কোনো extremum থাকতে হবে। যদি সেটাই না থাকে, তবে Lagrange multiplier method কী বলছে তার কোনো মূল্য নেই। Extremum যে আদৌ আছে, সেই গ্যারান্টিটা আমাদের অন্য কোনো পথে পেতে হবে, Lagrange multiplier method খালি একটা জালমাত্র, পুকুরে রুইমাছ থাকার গ্যারান্টি দেবার ক্ষমতা ওর নেই।

- দুই, জালে রুই ছাড়া অন্য মাছও পড়তে পারে, তাদের মধ্যে আমাদের একটা একটা করে রুই খুঁজতে হবে। সুতরাং জালে যেন খালি finite-সংখ্যক (এবং বেশ ভদ্ররকমের কমসংখ্যক) মাছই ওঠে। পুকুরের সব মাছই যদি জালে উঠে আসে, তবে আর জাল ফেলে লাভ কী হল? সেটা তো সরাসরি পুকুরে নেমে খোঁজার মতই অসম্ভব!

- তিন, কোনো রুই যেন জালের বাইরে না থেকে যায়। কোনো কোনো রুইমাছ আবার সেয়ানা, যারা সেই Jacobian আর rank-ওয়ালা বিচ্ছিরি শর্তটা পালন করে না। এরকম সেয়ানা রুইমাছ (মানে extremum) থাকলে, সে কিন্তু

[4]"বোধহয়" বলেছি, কারণ নাও থাকতে পারে।

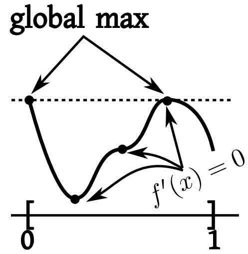


Fig 31

জালের ফাঁক গলে বেরিয়ে যেতে পারে। সুতরাং হয় আমাদের দেখতে হবে যাতে D-এর কোনো বিন্দুতেই ওই শর্তটা ক্ষুণ্ণ না হয়, আর নয়তো সেই সেয়ানা মাছগুলোকে আলাদা করে পরীক্ষা করতে হবে। সেরকম সেয়ানা মাছের সংখ্যা যদি infinite হয়ে যায়, তবে আবার আমাদের মাথায় হাত পড়বে!

এত সব শর্ত দেখে যেন ঘাবড়ে যেও না। আমরা যখন প্রথম ক্যালকুলাস ব্যবহার করে maximum বা minimum বার করা শিখেছিলাম, তখনও এই সমস্যাগুলো ছিল। সেগুলো এখানে একটু মনে করিয়ে দিই, তবে Lagrange multiplier-এর কায়দাটা আর তত বিজাতীয় মনে হবে না।

Example 17: এমন একটা $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ গ্রাফ আঁকো, যেটা differentiable, এবং যার জন্য $f'(x) = 0$ হয় ঠিক তিন জায়গায়। এই তিন জায়গার মধ্যে ঠিক একটা global maximum এবং ঠিক একটাই global minimum. তাছাড়া যেন এমন একটা $a \in [0, 1]$ থাকে, যেখানে $f'(a) \neq 0$ অথচ সেখানে global maximum আছে।
SOLUTION: যদি "$f'(x) = 0$" শর্তটাকে মাছ ধরার জাল বলে ভাবি, তবে এখানে জালে ধরা পড়েছে তিনটে মাছ, তার মধ্যে একটা রুই নয়, এবং অন্ততঃ একটা রুই রয়ে গেছে জালের বাইরে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 31-এ। ■

আমরা এক্ষুণি বললাম যে, Lagrange multiplier-এর কায়দাটা এটা গ্যারান্টি দিতে পারে না যে, feasible region-এর মধ্যে target function-এর আদৌ কোনো extremum আছে কিনা। যারা খালি পরীক্ষা পাশের জন্যই পড়াশোনা করে, তারা অনেক সময়েই এই গ্যারান্টিটা কল্পনা করে নেয়, এবং পরীক্ষকরাও ব্যাপারটাকে সম্ভবতঃ ক্ষমার যোগ্য অপরাধ বলেই মনে করে থাকেন। কিন্তু অংকের নিয়ম ঠিকঠাক মেনে এগোতে হলে সেই গ্যারান্টিটা অন্য পথে জোগাড় করতে হয়। নীচের theorem-টা অনেক সময়েই সেই অন্য পথের হদিশ দেয়।

THEOREM

Let $D \subseteq \mathbb{R}^n$ be closed and bounded. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f has a global maximum and a global minimum in D.

এই ধর্মটা আমরা real analysis শেখার সময়েই দেখেছি, অবশ্য তখন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ছিল। সেখানে যেভাবে প্রমাণ হত, এখানেও তাই হবে। তবে আমরা এখানে প্রমাণের মধ্যে যাব না, খালি এটা ব্যবহার করব মাত্র। অবশ্য আমরা যেসব অংক করব, সেখানে feasible region-টা প্রায়শঃই closed and bounded হবে না। কিন্তু তাও এই theorem-টা একটা কৌশল দিয়ে কাজে লাগানো যায়। সেই কৌশলটা একটা গল্প দিয়ে বোঝাচ্ছি নীচের অংকে।

Example 18: ধরো আমরা বার করতে চাই ভারতের সবচেয়ে বড় পালোয়ান কে। তার জন্য একটা বড় প্রতিযোগিতার আয়োজন করবার দরকার। কিন্তু তাতে অনেক খরচ। এদিকে আমরা জানি যে, বাঁটুল দি গ্রেট হল পশ্চিমবঙ্গের সবচেয়ে পালোয়ান। বাঁটুল বাংলার বাইরের সব পালোয়ানকেও হারাতে পারবে কি না ভাবছি, এমন সময়ে শোনা গেল পশ্চিমবঙ্গের আরেক পালোয়ান ষষ্ঠীচরণ বাইরের সব পালোয়ানকে আগেই হারিয়ে এসেছে। অমনি আমরা জোর দিয়ে বলতে পারি যে, বাঁটুলই ভারতের সেরা পালোয়ান। কী করে?

SOLUTION: কারণ বাঁটুল তো পশ্চিমবঙ্গের সেরা ছিলই, তার মানে ষষ্ঠীচরণ বাঁটুলের চেয়ে দুর্বল। আর সেই ষষ্ঠীচরণের কাছেই বাইরের পালোয়ানরা হারে, তবে বাঁটুলের কাছে তো ওরা দাঁড়াতেই পারবে না।
■

এই কৌশলটা কী করে অংকের মধ্যে ব্যবহার করতে হবে সেটা এক্ষুণি বলছি।
এখানে বলে রাখি যে Lagrange multiplier-এর জন্য এক ধরণের second derivative test আছে, যেটা দিয়ে local maximum বা local minimum সনাক্ত করা যায়। কিন্তু সেটা বেশ জটিল, আর তা দিয়ে global maximum বা global minimum-দের সন্ধান পাওয়া যায় না। তাই সেটা এ বইতে আলোচনা করছি না।
নিশ্চয়ই মাথার মধ্যে সব কিছু চমৎকার ঘেঁটে গেছে? ঘেঁটে যাওয়ার মহৌষধ হল উদাহরণ দেখা।

Example 19: একজন একটা rectangular বাগান করতে চায়, তার জন্য 200 মিটার লম্বা বেড়া কেনা হয়ে গেছে, যদিও জমি কেনা হয় নি! খুবই অদ্ভুত ব্যাপার সন্দেহ নেই। তা যাই হোক, লোকটা বেড়ার ব্যাপারে পাগল বললেই হয়। ঠিক 200 মিটার বেড়াই তাকে ব্যবহার করতে হবে, এই তার মরণ পণ, একটুও কম বেশী হলে চলবে না, মানে rectangle-টার perimeter (পরিসীমা) ঠিক 200 মিটারই হতে হবে। এই শর্তসাপেক্ষে সে সবচেয়ে কত বড় (মানে কত বেশী area-র) বাগান করতে পারে?
SOLUTION: এই বেড়া-পাগল ভদ্রলোকের সঙ্গে আমাদের পরিচয় সাধারণতঃ ক্যালকুলাস শেখার সময়েই হয়ে থাকে। তখন আমরা অংকটা করি এইভাবে। যদি rectangle-এর একটা বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার নিই, তবে অন্য বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $100-x$ মিটার। অতএব, area হবে $x(100-x)$ বর্গ মিটার। সুতরাং অংকটা হল x-এর সাপেক্ষে $x(100-x)$-এর maximum বার করার, যেটা differentiate করে করা যায়, এবং উত্তর আসে $x = 50$, অর্থাৎ যখন বাগানটা একটা square[5] হবে।
এবার আমরা একই অংক Lagrange multiplier দিয়ে করব। তার জন্য rectangle-টার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নেব x আর y মিটার। তবে বেড়া-ঘটিত constraint-টা হল $2(x+y) = 200$, বা $x+y-100 = 0$. আমাদের target function হল area-টা, মানে xy. তার মানে আমাদের করতে হবে--

$$\max\ xy \text{ subject to } x+y-100 = 0.$$

লক্ষ করো আমরা constraint-এর মধ্যে কোনো inequality ঢোকাই নি, যদিও এখানে $x, y \geq 0$ বা $x, y \leq 100$ লেখাই যেত। আসলে এই inequality ঢোকালে প্রান্তগুলোকে আলাদা করে হিসেবে নিতে হত, এবং তাতে জটিলতা বৃদ্ধি পেত।
এবার Lagrange multiplier method শুরু হবে এই function-টা থেকে--

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x+y-100).$$

এ থেকে আসছে--

$$\begin{aligned} \partial_1 L &= y - \lambda \\ \partial_2 L &= x - \lambda. \end{aligned}$$

সুতরাং $\partial_1 L = \partial_2 L = 0$ থেকে পাই, $x = y$. যেহেতু $x+y = 100$ চাই, অতএব $x = y = 50$ হতে হবে। অবশ্য গল্পটা এখানেই শেষ নয়, যদিও পরীক্ষায় সময়ের চাপে অনেকেই এর বেশী আর এগোতে পারে না। কিন্তু ঠিক করে অংক করতে হলে এরপর সেই rank-এর শর্তটা পরীক্ষা করতে হবে। এখানে constraint-টা হল $g(x, y) = 0$, যেখানে $g(x, y) = x+y-100$. তাই Jacobian-টা হচ্ছে

$$\begin{bmatrix} \partial_1 g & \partial_2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

যার rank অবশ্যই 1.
এবার Lagrange-এর theorem-টা বলছে যে, global maximum আছে দেখাতে হবে। যদি feasible region-টা closed and bounded হত, তবে সমস্যা ছিল না, কিন্তু এখানে feasible region-টা closed হলেও bounded নয় (যেহেতু পুরো

[5] মনে রেখো square-ও এক ধরণের rectangle.

$x + y = 100$ লাইনটাই হিসেবে নিচ্ছি)। তবে কী করে দেখাব যে global maximum আছে? এখানেই সেই বাঁটুল-ষষ্ঠীচরণের কৌশলটা কাজে আসবে। ধরো D হল পুরো feasible region-টা, মানে আমাদের গল্পে যেটাকে ভারত ধরেছিলাম--

$$D = \{(x, y) \;:\; x + y = 100\}.$$

এর মধ্যে আমাদের পশ্চিমবঙ্গ নেব এইভাবে--

$$E = \{(x, y) \;:\; x + y = 100,\;\; \underbrace{0 \le x, y \le 100}_{\text{বাড়তি শর্ত}}\}.$$

তবে E হল closed and bounded. যেহেতু target function-টা continuous, তাই সুতরাং E-এর উপরে তার global maximum আছে। এটা হচ্ছে আমাদের বাঁটুল। এবার ষষ্ঠীচরণ খোঁজার পালা। সেটা এখানে বড়ই সোজা। লক্ষ করো E-এর উপরে target function-টা সর্বদা ≥ 0, কিন্তু $D \cap E^c$-এর উপরে < 0. কারণ--

> যদি x বা y হয় < 0, তবে অন্যজন হবে > 0, ফলে $xy < 0$. আবার যদি ওদের কেউ > 100 হয়ে যায়, তবে অন্যজন < 0 হয়ে যাবে, ফলে ফের $xy < 0$ হয়ে যাবে।

সুতরাং E-এর যে কেউই এখানে ষষ্ঠীচরণের ভূমিকা নিতে পারে, কারণ যেকোনো negative সংখ্যাই যেকোনো positive সংখ্যার চেয়ে ছোটো। সুতরাং পুরো D-এর উপরেই global maximum থাকতে বাধ্য। ব্যস্, এবার Lagrange-এর সেই theorem-টা বলছে যে, $x = 50, y = 50$-তেই সেই global maximum-টা হবে। ■

এইখানে পুরোটা গল্প দিয়ে বললাম। কী করে অংকের ভাষায় লিখতে হবে, সেটা কালকে বলব।
হয়তো তোমার কাছে এই যুক্তিটা ঘুরিয়ে নাক দেখানো মনে হতে পারে। সোজাভাবে নাক দেখাতে গেলে কেমন নাকাল হতে হবে সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

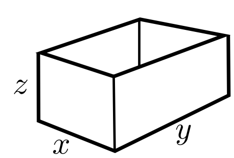
Exercise 16: আগের অংকটা কেউ এভাবে করেছে। অংকটাকে লিখেইছে এইভাবে--

> max xy subject to $x + y - 100 = 0$ and $0 \le x, y \le 100$.

তারপর Lagrange multiplier ইত্যাদি করে $x = 50,\ y = 50$ পেয়েছে। সবশেষে বলেছে যে, এখানে feasible region-টা তো closed and bounded আছেই, আর target function-টাও continuous, তাই global maximum থাকতে বাধ্য। সুতরাং $x = 50,\ y = 50$-তেই global maximum-টা হবে।
এই যুক্তিতে ভুলটা কোথায়? ■

Exercise 17: কার্ডবোর্ড দিয়ে একটা বাক্স বানাতে হবে Fig 32-এর মত, মেঝে আছে, চারটে দেওয়াল আছে, কিন্তু উপরটা খোলা। মোট কার্ডবোর্ডের area দেওয়া আছে 300 sq cm. তাহলে x, y আর z কী কী নিলে বাক্সটার volume সবচেয়ে বেশী হবে? ■

Fig 32



DAY 24
Lagrange multiplier method (part 2)

আজকে আমরা Lagrange multiplier-এর আরো কিছু প্রয়োগ দেখব, এবং অংকের ভাষায় কী করে লিখতে হয়, সেটাও শিখব।

24.1 বিভিন্ন উদাহরণ

Example 20: Find the shortest distance from the origin to the hyperbola $x^2+8xy+7y^2=225$,

$z=0$ by the method of Lagrange multipliers. [5] **(2019, 2011)**

SOLUTION: এখানে ওই $z = 0$ লেখাটা দেখে অবাক লাগতে পারে। খালি $x^2+8xy+7y^2 = 225$ লিখলেই তো hyperbola হয়, তবে আবার $z = 0$ লেখা কেন বাপু? আসলে, এখানে পুরো জিনিসটা $\mathbb{R}^3$-র মত করে দিয়েছে। Hyperbola-টা যেন রয়েছে xy-plane-এ। সেই জন্যই $z = 0$ লেখা। তবে কিনা, hyperbola-টাও xy-plane-এ, আবার origin-ও xy-plane-এ, তাই পুরো অংকটাই xy-plane-এই সীমাবদ্ধ, খামোখা z-কে না জড়ালেই হত। আমরাও তাই সমাধানে খালি x আর y নিয়েই কাজ করব।

> Since we are working in the xy-plane, we shall keep $z=0$ fixed.

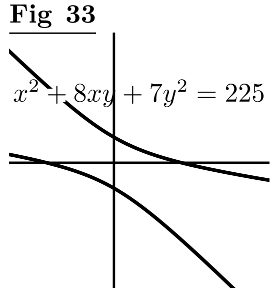
প্রথমেই ছবিটা দেখিয়ে রাখি (Fig 33), যদিও equation-টুকু দেখেই ছবিটা কল্পনা করা সহজ নয়, সেটার প্রয়োজনও নেই খুব একটা। আমরা hyperbola-টার উপরে যেকোনো একটা বিন্দু নেব (x,y). তবে origin থেকে তার দূরত্ব হল $\sqrt{x^2+y^2}$, যেটা আমাদের minimum করতে বলেছে। এখন square root নিয়ে কাজ করা ঝামেলা, তাই আমরা বরং তার square-টাকে, মানে x^2+y^2-এর minimum বার করি। তাতেও একই বিন্দু পাওয়া যাবে।

> We need
>
> $$\min\ x^2+y^2 \text{ subject to } x^2+8xy+7y^2-225=0.$$

এবার Lagrange multiplier-এর শুরু--

> Let $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^2+8xy+7y^2-225)$. So
>
> $$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x-\lambda(2x+8y)$$
> $$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y-\lambda(8x+14y).$$

Fig 33



এবার আমরা দেখব কোন কোন x, y-এর জন্য এরা দুজনেই শূন্য হয়। এখানে λ নিয়ে আমাদের মাথাব্যথা নেই, তাই ওটাকে সরিয়ে দেব। প্রথমে $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ থেকে λ-কে x, y দিয়ে প্রকাশ করব, তারপর $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ থেকেও একই কাজ করব। এবং λ-র জন্য এভাবে যে দুটো ফর্মুলা পাওয়া গেল, তাদেরকে সমান করে দেব।

> Solving $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ and $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, we have
> $$\lambda = \frac{2x}{2x+8y} = \frac{2y}{8x+14y},$$
> or
> $$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0,$$
> or
> $$(2x-y)(x+2y) = 0.$$
> So either $y = 2x$ or $y = -\frac{x}{2}$.

দুটো কেসে ভেঙে এগোতে হবে। প্রতিক্ষেত্রেই আমরা hyperbola-র equation-এ y-কে x দিয়ে প্রকাশ করব।

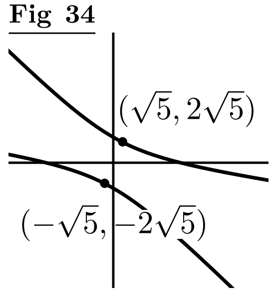
> Case 1: $y = 2x$: Here $x^2 + 16x^2 + 28x^2 = 225$, or $x = \pm\sqrt{5}$, $y = \pm 2\sqrt{5}$.
>
> Case 2: $y = -\frac{x}{2}$: Here $x^2 - 4x^2 + \frac{7}{4}x^2 = 225$, which is impossible.

কারণ বাঁদিকটা < 0 হচ্ছে।
অতএব Lagrange multiplier-এর জালে দুটো মাছ ধরা পড়েছে, $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ এবং $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 34-এ। এরা দুজনেই origin থেকে $\sqrt{(\pm\sqrt{5})^2 + (\pm 2\sqrt{5})^2} = 5$ দূরত্বে আছে। অতএব উত্তর যে 5 হবে, সেটা আন্দাজ করতে পারছি। কিন্তু সেটা যুক্তি দিয়ে প্রতিষ্ঠিত করা উচিত। অনেক বইতেই দেখেছি সেটা করে না। তোমরা যারা নিতান্ত পরীক্ষা পাশের জন্য এ বইটা পড়ছ, এবং "আগে তো পাশ করি, পরে না হয় অংক শিখব" ভাবছ, তারা হয়তো সমাধানের বাকি অংশটুকুতে বিরক্ত হতে পারো। কিন্তু আমি নাচার!
আমাদের মূল উদ্দেশ্য খালি মাছ ধরা নয়, রুইমাছ ধরা। সুতরাং প্রথমে দেখতে হবে রুই মাছ আদৌ আছে কিনা, মানে global minimum আছে কিনা। আমাদের target function-টা চমৎকার continuous বটে, কিন্তু feasible region-টা হল একটা hyperbola-টা--

> Our feasible region is $D = \{(x, y) \; : \; x^2 + 8xy + 7y^2 = 225\}$, which is closed, but not bounded.

এখানেই আমরা সেই বাঁটুল-ষষ্ঠীচরণের কৌশলটা খাটাব। আমরা এর মধ্যেই অন্ততঃ একটা point পেয়েছি feasible region-এ, যেটা origin থেকে 5 দূরত্বে রয়েছে। সুতরাং 5-এর চেয়ে বেশী দূরত্বের বিন্দুরা যে global minimum হতে পারে না সে

Fig 34



তো বোঝাই যাচ্ছে। অর্থাৎ আমরা এই একই বিন্দু দিয়ে এবং বাঁটুল এবং ষষ্ঠীচরণের কাজ সারছি। অতএব origin-কে ঘিরে 5 দৈর্ঘ্যের radius নিয়ে একটা গণ্ডী টেনে বলতেই পারি যে ওই গণ্ডীর বাইরে feasible region-এর অংশটাকে হিসেব থেকে বাদ দেওয়া যায়। তবে feasible region-এর যেটুকু পড়ে থাকবে, সেটা অবশ্যই closed and bounded হবে।

> Let
> $$E = \{(x,y) \ : \ x^2 + 8xy + 7y^2 = 225 \ \& \ x^2 + y^2 \leq 25\},$$
> which is closed and bounded.

এখানে 25 নিয়েছি, কারণ আমরা তো দূরত্বের square-টাকে target function ধরেছি।

> Then the continuous target function must attain a global minimum in E, which is ≤ 25. Also, everywhere else in the feasible region the target function must be > 25. So the target function attains global minimum over the entire feasible region.

এবার দেখতে হবে সেই রুই মাছ আমাদের জাল গলে পালিয়ে গিয়ে থাকতে পারে কিনা। তার জন্য চাই constraint-এর Jacobian-এর rank বার করা। এখানে variable দুটো, আর constraint একটা, তাই Jacobian-টা হল 1×2 সাইজের--

> The constraint Jacobian is
> $$\begin{bmatrix} 2x + 8y & 8x + 14y \end{bmatrix}$$
> which is nonzero (and hence has rank 1) everywhere in the feasible region.

সুতরাং রুইমাছ যা আছে, সব আমাদের জালে পড়তে বাধ্য--

> So this global minimum must satisfy the Lagrange multiplier condition, and hence must be either $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ or $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

এবার জালের মাছদুটোকে একে একে টিপেটুপে দেখলেই হবে।

> Since both these points have a distance $\sqrt{(\pm\sqrt{5})^2 + (\pm 2\sqrt{5})^2} = 5$ from the origin, the required minimum is 5.

আবারও বলছি, এই শেষের অংশটুকু না করলে অংকটা অসম্পূর্ণ থাকত, যদিও অধিকাংশ বইতেই এটা করা থাকে না। ■

এবার তোমার করার জন্য একটা অংক।

Exercise 18: Use Lagrange's method to find the shortest distance from the point $(0, b)$ to the parabola $x^2 - 4y = 0$.[5] **(2016, 2017)**

HINT:

এখানে ছবি আঁকাটা সহজ এবং দরকার। নিজে নিজে একবার আঁকতে চেষ্টা কর, তারপর Fig 35-এর সঙ্গে মিলিয়ে নিও। আর একটা কথা। এখানে কিন্তু b-এর কোনো value বলে দেয় নি। সুতরাং $b < 0$, $b = 0$ এবং $b > 0$, এই সবগুলো

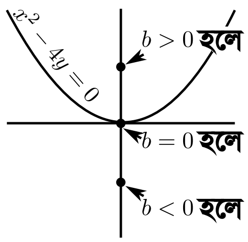


Fig 35

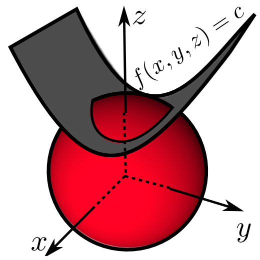


Fig 36

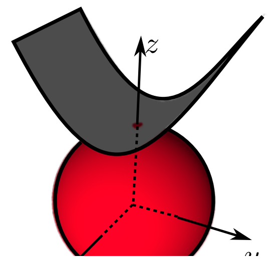


Fig 37

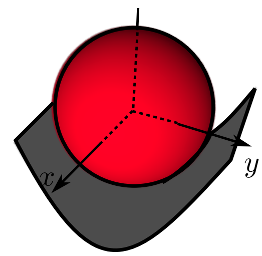


Fig 38

ক্ষেত্রের কথাই মনে রাখতে হবে। এদের মধ্যে প্রথম দুটো ক্ষেত্রে উত্তরটা কী হবে সেটা ছবি থেকেই বোঝা যাচ্ছে। ■

Example 21: Find all the extreme values of the optimization problem, if any exists,

$$f(x,y,z)=y^2-10z$$

over the sphere $x^2+y^2+z^2=36$. [5] **(2019.16)**

SOLUTION: Fig 36 দ্যাখো। এখানে ছবিটা কল্পনা করা কঠিন নয়। কারণ $y^2=10z$ হল yz-plane-এ একটা parabola. যেহেতু x-এর কোনো ভূমিকা নেই, তাই সেই parabola-টাকে x-axis-এর সমান্তরালে টেনে গেলেই $f(x,y,z)=0$-এর surface পাবে। এটাকে উপর নীচে ওঠালে নামালেই $f(x,y,z)=c$ জাতীয় surface-গুলো পাবে। Surface-টাকে যতই নামাবে ততই $f(x,y,z)$ বাড়বে[6]। সুতরাং minimum হবে যখন surface-টা sphere-টার উপরে আলতো করে বসানো থাকবে (Fig 37)। এই minimum-টা হবে sphere-এর সর্বোচ্চ বিন্দুতে। একই যুক্তিতে maximum হবে যখন উল্টোটা হবে, মানে sphere-টা surface-এর উপরে আলতো করে বসানো থাকবে (Fig 38)। এ ক্ষেত্রে surface-টা দুই জায়গায় sphere-এর গায় স্পর্শ করবে। ওই দুই জায়গাতেই maximum হবে। এ হল ছবি দিয়ে ভাবা। এবার অংক কষে দেখা যাক।

Let

$$L(x,y,z,\lambda)=y^2-10z-\lambda(x^2+y^2+z^2-36).$$

So

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=-2\lambda x,\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=2y-2\lambda y=2y(1-\lambda),\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=-10-2\lambda z.\end{aligned}$$

এবার $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$ এবং $\frac{\partial L}{\partial z}=0$-কে একসঙ্গে solve করব। আর সেই সঙ্গে constraint-টা তো আছেই। সমাধানের এই অংশটা বোধহয় তোমার নিজে নিজে করলেই সুবিধা হবে।

Shall solve $\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=0$.

- Case 1: If $\lambda=0$, then $\frac{\partial L}{\partial z}\neq 0$, so not allowed.

[6] কারণ y^2-10z-এ z-এর coefficient হল <0.

> - <u>Case 2: If $\lambda = 1$</u>, then $x = 0$, $z = -5$ and from the constraint $y = \pm\sqrt{11}$.
> - <u>Case 3: If $\lambda \neq 0, 1$</u>, then $x = 0$, $y = 0$ and from the constraint $z = \pm 6$.
>
> Thus, we get the following stationary points: $(0, 0, 6)$, $(0, 0, -6)$, $(0, \sqrt{11}, -5)$ and $(0, -\sqrt{11}, -5)$.

আমরা ছবি দিয়ে যেটা বুঝেছিলাম তার সাথে এদেরকে মিলিয়ে নিতে পারো। $(0, 0, 6)$ হল sphere-এর সর্বোচ্চ বিন্দুটা। $(0, \sqrt{11}, \pm 5)$ হল নীচের পাশের দিকে বিন্দু দুটো যেখানে surface-টা সর্বনিম্ন অবস্থানে sphere-টাকে ছুঁয়ে থাকবে। আর $(0, 0, -6)$ হল sphere-এর সর্বনিম্ন বিন্দু, যেখানে আসলে minimum বা maximum কিছুই হয় নি।
মাছ ধরা শেষ হল। এবার দেখতে হবে রুই মাছ আদৌ আছে কিনা। এখানে অবশ্য feasible region-টা closed and bounded আছেই।

> The target function is continuous and the feasible region is closed and bounded. So global maximum and minimum both must exist.

এবার দেখি কোনো সেয়ানা রুই মাছ আছে কিনা, যেটা জালকে ফাঁকি দিতে পারে। তার জন্য Jacobian-এর rank দেখতে হবে--

> The Jacobian of the constraint is
>
> $$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix},$$
>
> which is always nonzero on the surface of the sphere, and hence has rank 1 everywhere in the feasible region.
>
> So every constrained extremum must satisfy the Lagrange multiplier condition.

এবার খালি জালের মাছ চারটেকে একটা একটা করে পরীক্ষা করলেই হবে।

Stationary point	Value	Type
$(0, 0, 6)$	-60	minimum
$(0, 0, -6)$	60	none
$(0, \sqrt{11}, -5)$	65	maximum
$(0, -\sqrt{11}, -5)$	65	maximum

এদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটোটাকে minimum এবং সবচেয়ে বড়টাকে (যেটা দুবার এসেছে) maximum বলেছি। অবশিষ্ট বিন্দুটার ভাগ্যে maximum বা minimum কোনো শিরোপাই জোটেনি। ■

Exercise 19: Use Lagrange's method of undetermined multipliers to find the points on the ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

which are at the greatest and least distances from the line $3x + y - 9 = 0$.[5] **(2012.11)**
HINT:
প্রথমে Fig 39 দেখে নাও। এই অংকটা নানাভাবে করা যায়--

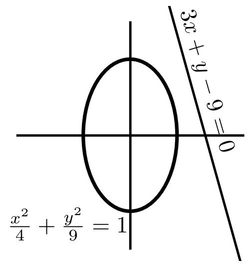


Fig 39

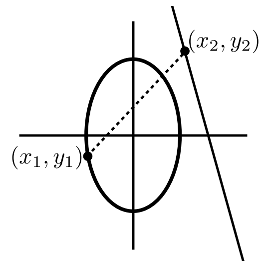


Fig 40

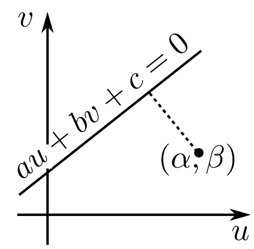


Fig 41

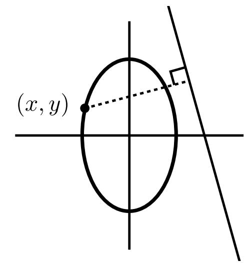


Fig 42

- এক, দুটো বিন্দু নেওয়া যায়, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2), যাদের মধ্যে প্রথম জন আছে ellipse-টার উপরে, দ্বিতীয়জন লাইনটার উপরে (Fig 40)। এই বিন্দু দুটোর মধ্যে দূরত্ব হল

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

এটার minimum আর maximum বার করতে হবে, যেখানে দুটো constraint আছে--প্রথমতঃ, (x_1, y_1)-কে থাকতে হবে ellipse-টার উপরে, আর দ্বিতীয়তঃ, (x_2, y_2)-কে থাকতে হবে লাইনটার উপরে।

- দুই, আমরা ellipse-টার উপরে একটা বিন্দু নেব (x, y). সেটা থেকে লাইনটার দূরত্ব বার করতে হবে। এর জন্য একটা ফর্মুলা আছে, সেটা মনে করিয়ে দিই। যদি $au+bv+c=0$ হয় একটা লাইনের equation, আর (α, β) হয় কোনো একটা বিন্দু, তবে ওই বিন্দু থেকে ওই লাইনের দূরত্ব (Fig 41) হবে

$$\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

এই ফর্মুলা লাগালে এখানে দূরত্বটা পাবে--

$$\frac{|3x+y-9|}{\sqrt{3^2+1^2}}.$$

ছবিতে দেখিয়েছি Fig 42-এ। এটার maximum আর minimum বার করতে হবে, যেখানে একটাই constraint এই যে, (x, y) রয়েছে ellipse-টার উপর।

প্রথম পদ্ধতিতে চারটে variable আর দুটো constraint. বেশ ঝামেলার ব্যাপার। কিন্তু দ্বিতীয় পদ্ধতিতে মোটে দুটো variable আর একটা constraint. অতএব সেই পথেই যাওয়া ভালো।

> Let (x, y) be a point on the ellipse. The squared distance of this point from the line is
>
> $$\frac{(3x+y-9)^2}{3^2+1^2}.$$
>
> So the problem is
>
> max/min $(3x+y-9)^2$ subject to $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0.$
>
> Let
>
> $$L(x, y, \lambda)=(3x+y-9)^2-\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right).$$

বাকিটুকু নিশ্চয়ই তুমি নিজে করে নিতে পারবে?

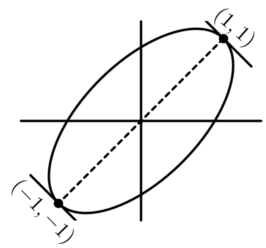


Fig 43

■

এবার একটা অংক দেখব যেখানে target function-এর ফর্মুলাটা বার করতে একটু কসরত করতে হবে।

Exercise 20: Show that the points on the ellipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ for which the tangent is at the greatest distance from the origin are $(1, 1)$ and $(-1, -1)$.[6] **(2012.10bor)**

HINT:

সত্যি বলতে কি, এই অংকটা খালি coordinate geometry দিয়েই করে দেওয়া যায়। Ellipse-টার কেন্দ্র রয়েছে origin-এ। সুতরাং tangent-টা origin থেকে সবচেয়ে দূরে থাকবে, যখন তুমি বিন্দুটা নেবে ওর major axis-এর কোনো প্রান্তে (Fig 43)। সুতরাং major axis-টা কোথায় আছে সেটা বার করলেই হয়ে গেল।

যাই হোক আমরা এখানে অংকটা Lagrange multiplier দিয়েই করার কায়দা বলব। যদি ellipse-এর উপরে যেকোনো বিন্দু নাও (x, y), তবে সেখানে tangent-এর slope-টা হবে $\frac{dy}{dx}$, যেটা পাওয়া যাবে ellipse-এর equation-টাকে differentiate করে দিলেই--

> Differentiating the equation of the ellipse wrt x,
>
> $$10x - 6y - 6x\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = 0.$$
>
> So the slope of the tangent at any point (x, y) on the ellipse is
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 3y}{3x - 5y},$$
>
> where $3x - 5y \neq 0$.

এখানে নীচের তলায় একটা $3x - 5y$ এসে গেছে, তাই $3x - 5y \neq 0$ ধরেছি। যদি $3x - 5y = 0$ হয়, তবেও tangent আছে, খালি তখন সেটা vertical হয়ে যাবে, তাই slope হবে undefined.

> At such a point (x, y), the equation of the tangent is
>
> $$v - y = \frac{5x - 3y}{3x - 5y}(u - x).$$

এখানে (x, y) হল ellipse-এর গায় একটা স্থির বিন্দু। Tangent-এর equation-এর জন্য তাই আমরা নতুন দুটো variable আমদানি করেছি, u আর v. এখানে আমরা এই তথ্যটা ব্যবহার করেছি--

যে সরলরেখা কোনো (a,b) বিন্দু দিয়ে যায়, এবং যার slope হয় m, তাকে $v-b=m\cdot(u-a)$ আকারে লেখা যায়। এখানে u,v হল variable, আর a,b,m হল constant.

এই সঙ্গে vertical ক্ষেত্রটাও জুড়ে দিই--

> If $3x-5y=0$, then the tangent is vertical with equation $u=x$.

এভাবে $3x-5y\neq 0$ আর $3x-5y=0$-র জন্য tangent-এর দুটো আলাদা ফর্মুলা নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক নয়, তাই দুটো ফর্মুলাকেই একটু সাজিয়ে একই রূপে প্রকাশ করা যাক--

> Thus, for any (x,y) on the ellipse, the tangent has the form
>
> $$(3x-5y)(v-y)=(5x-3y)(u-x),$$
>
> or $\cdots$
>
> $$(3x-5y)v+(3y-5x)u+4=0.$$

এখানে $\cdots$ দিয়ে কয়েকটা মামূলী ধাপ বাদ দিয়ে গেছি। দু দিকের ব্র্যাকেট তুলে গুণ করে u,v ছাড়া term-গুলো এক করলেই দেখবে $5x^2-6xy+5y^2$ আসছে। যেহেতু (x,y) রয়েছে ellipse-টার উপরে, তাই $5x^2-6xy+5y^2=4$ হবে। যাক, তাহলে tangent-টা পাওয়া গেল। এবার দেখতে হবে origin থেকে এই লাইনটার দূরত্ব কত। কোনো বিন্দু থেকে একটা মাইলের দূরত্বের ফর্মুলা তো আগের অংকেই দেখেছি। সেখান থেকে পাবে--

> The distance of this line from the origin is
>
> $$\frac{4}{\sqrt{(3x-5y)^2+(3y-5x)^2}}=\frac{4}{\sqrt{34x^2+34y^2-60xy}}.$$
>
> We need to maximise this wrt (x,y) subject to $5x^2-6xy+5y^2=4$.

জিনিসটা দেখতে খুব একটা উপাদেয় লাগছে না। তাই একটু দলাইমলাই করে ওটাকে খানিকটা ভদ্রসভ্য করে নেওয়া যাক।

> Equivalently, we have to minimise $34x^2+34y^2-60xy$.
>
> Now, from the equation of the ellipse, $6xy=5x^2+5y^2-4$. So we need to minimise $34x^2+34y^2-50x^2-50y^2+40=40-16(x^2+y^2)$, or, equivalently, maximise x^2+y^2.

তার মানে আসলে আমরা এমন (x,y) খুঁজছি origin থেকে যার দূরত্ব সবচেয়ে বেশী। বুঝতেই পারছ যে major axis-এর দুই প্রান্তেই এই দূরত্বটা সবচেয়ে বেশী হবে।

> Max x^2+y^2 subject to $5x^2-6xy+5y^2=4$.

এইবার Lagrange multiplier লাগালেই হবে। সেটুকু তোমার জন্য রেখে দিলাম। ■

Exercise 21: Use Lagrange's method to determine the point (or points) on the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

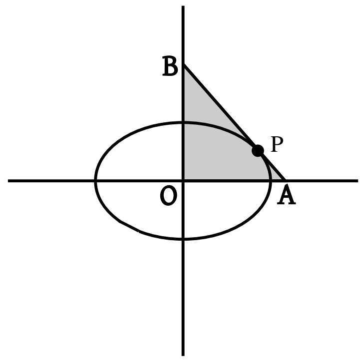


Fig 44

so that the tangent line to the point (or points) form with the coordinate axes a triangle of the smallest area.[4] **(2004.8b)**

HINT:

ছবিটা দেখিয়েছি Fig 44-এ। একটা ellipse দেওয়া আছে, তার গায় একটা point দেখিয়েছি, P. সেইখান দিয়ে যে tangent-টা হয়, সেটাও দেখিয়েছি (AB)। এই tangent-টা axis-দুটোর সঙ্গে একটা ত্রিভুজ সৃষ্টি করেছে (ΔOAB)। আমাদের কাজ হল point-টাকে এমনভাবে নেওয়া যাতে এই ত্রিভুজটার area যথাসম্ভব ছোটো হয়। এই হল উদ্দেশ্য। এবার সমাধানটা আলোচনা করি। প্রথম কথা, ellipse-এর symmetry কাজে লাগিয়ে বলতে পারি যে, (x, y)-তে প্রথম quadrant-এ সীমাবদ্ধ রাখাই যথেষ্ট।

> By symmetry, we first consider only points in the first quadrant.

যদি বিন্দুটাকে (x, y) বলি, তবে ওই বিন্দুতে tangent-এর equation-টা বার করে নাও। তার জন্য প্রথম কাজ হল ellipse-এর equation-টাকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করা--

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

এ থেকে পাবে $\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}$. যেহেতু tangent-টা (x, y) বিন্দু দিয়ে যায়, তাই তার equation হবে

$$v - y = \frac{dy}{dx}(u - x).$$

এখানে x, y এবং $\frac{dy}{dx}$ স্থির আছে, তাই equation-টার জন্য নতুন দুটো variable আমদানী করেছি, u আর v.

Tangent-টা x-axis-কে ছেদ করবে যখন $v = 0$ মানে $u = x - \frac{y}{dy/dx} = \frac{a^2y^2+b^2x^2}{b^2x}$. মানে Fig 44-এ এটা হল OA-র দৈর্ঘ্য। একইভাবে y-axis-কে ছেদ করবে যখন $u = 0$ মানে $v = y - \frac{dy}{dx}x = \frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y}$. এটা হল Fig 44-এ OB-র দৈর্ঘ্য। সুতরাং ΔOAB ত্রিভুজটার area হবে

$$\frac{(a^2y^2 + b^2x^2)^2}{2a^2b^2xy}.$$

আর constraint-টা হল ellipse-এর equation-টা, মানে

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

যদি এর উপরে Lagrange লাগাতে যাই, তবে বেজায় কষ্ট। কিন্তু একটু দলাইমলাই করে নিলে সেই কষ্ট অনেকটাই লাঘব করা যায়। এখানে area-টা হল

$$\frac{(a^2y^2+b^2x^2)^2}{2a^2b^2xy} = \frac{a^2b^2}{2xy}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{2xy},$$

কারণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বলাই আছে। তার মানে আমাদের কাজ হল $\frac{a^2b^2}{2xy}$-এর minimum বার করা। যেহেতু $a^2b^2>0$, তাই $\frac{1}{xy}$-এর minimum বার করলেই হবে। যেহেতু $x,y>0$, তাই xy-এর maximum বার করতে পারলেই চলবে। এবার Lagrange লাগাও। সব শেষে বাকি quadrant-দের ফিরিয়ে আনতে ভুলো না। যেমন, যদি first quadrant-এ minimum পাও (x,y) বিন্দুতে, তবে একই area পাবে $(-x,y)$, $(x,-y)$ এবং $(-x,-y)$ বিন্দুগুলোতেও। সুতরাং উত্তরে ওদেরও উল্লেখ থাকতে হবে।

■

DAY 25
Lagrange multiplier method (part 3)

আমরা Lagrange multiplier-এর কিছু প্রয়োগ দেখেছি। এবার আরো কিছু দেখব।

25.1 আরো উদাহরণ

Example 22: Using Lagrangian multiplier find the volume of the largest rectangular parallelopiped with sides parallel to the coordinate planes, that can be inscribed in the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(2009.8c)

SOLUTION:

প্রথমে ব্যাপারটা কী হচ্ছে সেটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। একটা ellipsoid দিয়েছে। সেটাকে মনে করো একটা ডিম (Fig 45)। সেই ডিমের মধ্যে রয়েছে একটা rectangular parallelopiped, মানে একটা বাক্স।

আরে, আরে এ্কি?
ডিমের মধ্যে দেখি
রাজার দুটো ছেলে!
কোথা থেকে এলে?

--ঠাকুরমার ঝুলি

Fig 45

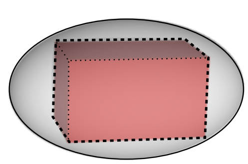
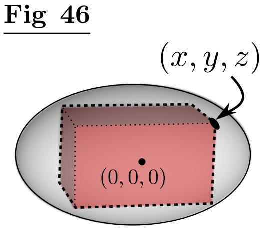


Fig 46



শুধু যে ভিতরে আছে তাই নয়, inscribed হয়ে আছে, মানে বাক্সের কোণাগুলো ডিমের খোলার গায় একেবারে লেগে রয়েছে। অর্থাৎ বাক্সটা যদি আর একটুও বড় হয়, অমনি ডিমটা ফেটে যাবে। আরো শর্ত আছে। বাক্সটার side-গুলো সব coordinate axis-গুলোর সঙ্গে parallel, মানে বাক্সটা সোজাভাবে বসানো আছে, হেলে নেই। এরকম বাক্স নানাভাবে ঢোকানো যেতে পারে। তাদের মধ্যে কোনটার volume সবচেয়ে বেশী সেটাই জানতে চেয়েছে।
এবার তবে সমাধান করা শুরু করি।

> Let a vertex of the rectangular parallelopiped be (x, y, z), where $x, y, z > 0$.

বোঝার জন্য Fig 46 দেখে নাও। বাক্সটার একটা কোণার অবস্থানটাকে (x, y, z) নাম দিয়েছি। কিন্তু বাক্সটার তো আটটা কোণা আছে। কোন কোণাটা নিয়েছি বোঝাব কী করে? আমরা সেই কোণাটাকে নেব, যেখানে x, y, z তিনজনেই > 0. এই শর্তটা চাপানোর জন্য ছবিটা মাথায় রাখা দরকার।
মনে রেখো ডিম এবং বাক্স দুজনেরই centre হল $(0, 0, 0)$-তে। সুতরাং বাক্সের একটা কোণা যদি (x, y, z)-এ থাকে, তবে বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ উচ্চতা হবে $2x$, $2y$ এবং $2z$. তাই volume হবে--

> Then the volume of the rectangular parallelopiped is $8xyz$.

যেহেতু (x, y, z)-টা ellipsoid-এর উপরে আছে, তাই ellipsoid-এর equation-টা ওরা মেনে চলতে বাধ্য।
ব্যস্, একটা constrained optimisation পেয়ে গেলাম--

> So we need $x, y, z > 0$ to get
>
> $$\max 8xyz \text{ subject to } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

এবার তাহলে Lagrange multiplier লাগানো শুরু করা যাক--

> Let
>
> $$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$
>
> Then
>
> $$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 8yz - \frac{2\lambda x}{a^2} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \cdots, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \cdots. \end{aligned}$$

ওই ডট্ ডট্ জায়গা দুটো তোমার করার জন্য।

> Solving $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ we get $2\lambda = \frac{8a^2yz}{x}$.
>
> Similarly, we get $2\lambda = \frac{8b^2xz}{y}$ and $2\lambda = \frac{8c^2xy}{z}$. So
>
> $$\frac{a^2yz}{x} = \frac{b^2xz}{y} = \frac{c^2xy}{z}.$$

> Thus $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = p(>0)$, say.

এই যে আমরা পট পট করে x, y, z দিয়ে ভাগ করে ফেলতে পারছি, তার কারণ $x, y, z > 0$ ধরে নিয়েছি, তাই শূন্য দিয়ে ভাগ হয়ে যাওয়ার ভয় নেই।

> Since (x, y, z) lies on the ellipsoid, we must have $3p^2 = 1$, or $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$. So $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ and $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.
>
> The corresponding volume is $8xyz = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

তার মানে আমাদের জালে পড়েছে খালি একটাই মাছ। এইবার রুইমাছের গল্প। দেখাতে হবে রুইমাছ আছে, এবং সেটা সেয়ানা নয়। তাহলেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে, জালে পড়া মাছটাই সেই রুইমাছ। এখানে (x, y, z) রয়েছে ellipsoid-এর উপরে, তাই bounded নিয়ে সমস্যা নেই। কিন্তু ওই $x, y, z > 0$ থাকায় closed হচ্ছে না। সেখানে একটা কৌশল করব, প্রথমে $x, y, z \geq 0$ নিয়ে কাজ করব।

> Our target function is continuous. The ellipsoid is closed and bounded, and so the part for which $x, y, z \geq 0$ is also closed and bounded. So the target function must attain maximum for some $x, y, z \geq 0$.

এবার $x, y, z > 0$-তে ফিরব।

> Now, if $x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$, then the volume is 0, which cannot be the maximum, because the volume is positive if $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ and $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.
>
> So the maximum must occur for $x, y, z > 0$.

ব্যস্, রুইমাছের অস্তিত্ব প্রমাণ হয়ে গেল। এবার দেখাতে হবে যে রুইমাছটা সেয়ানা নয়। তার জন্য constraint-এর Jacobian-এর rank বার করতে হবে।

> Now the Jacobian of the constraint is
>
> $$\begin{bmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{bmatrix},$$
>
> which is non-zero everywhere on the ellipsoid, and so has rank 1.
>
> So the maximum must satisfy the Lagrange condition.
>
> Since only one point satisfies the Lagrange condition, hence that must give the maximum.

ব্যস্, এবার একটা উপসংহার--

> So the required maximum volume is $8xyz = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

■

Exercise 22: Find the volume of the greatest rectangular parallelopiped that can be inscribed in the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

by the method of Lagrange's multipliers.[5] **(2020.16)**

HINT:
এটা আগের অংকটাই, যদিও বাক্সটা যে হেলতে পারে না, সেই শর্তটা বলেনি। কিন্তু আমরা সেই শর্তটা তাও ধরেই নেব, কারণ নইলে অংকটা বড়ই জটিল হয়ে যাবে। ■

Example 23: Find the triangle of maximum area having the fixed perimeter $2p$. [5] **(2015.11)**

SOLUTION: এই অংকটা আমরা দুভাবে করব। এক, জ্যামিতি দিয়ে, আর দুই coordinate geometry দিয়ে। জ্যামিতির বেলায় আমরা ত্রিভুজের area-র এই সূত্রটা ব্যবহার করব--

> যদি একটা ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য x, y, z হয়, তবে তার area হবে
>
> $$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$
>
> যেখানে p হল semi-perimeter, অর্থাৎ $p=\frac{x+y+z}{2}$.

ত্রিভুজের area-র সবচেয়ে পরিচিত সূত্র এটা নয়। সবচেয়ে পরিচিত সূত্রটা হল $\frac{1}{2}\times\text{base}\times\text{height}$. দ্বিতীয় পদ্ধতিতে আমরা সেই সূত্রটা ব্যবহার করব।
প্রথম সমাধানটা শুরু করা যাক।

> The area of a triangle with sides x, y, z is $A(x,y,z)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$.
> We shall solve
>
> $$\max A(x,y,z) \text{ subject to } x+y+z=2p, \quad x,y,z>0.$$

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান। যেটুকু লিখেছি তার বাইরেও কিন্তু constraint আছে। যেকোনো তিনটে $x, y, z > 0$ খালি $x+y+z=2p$ শর্ত মেনে নিলেই তাদের দিয়ে একটা ত্রিভুজ হয়ে যাবে না। যেমন যদি $p=5$ হয়, আর আমরা $x=8,\ y=z=1$ নিই, তবে ওরা triangle inequality পালন করে না, তাই ত্রিভুজ হবে না। আমরা প্রথমে triangle inequality শর্তটাকে বাদ দিয়ে maximum বার করব, এবং পরে দেখাব যে সেখানে triangle inequality পালিত হয়ে যাবে (ভাগ্যিস!)। পাছে কেউ মনে করে যে আমরা triangle inequality-র কথাটা ভুলে গেছি, তাই সেটার সামান্য উল্লেখ করে দিই--

> We shall check the triangle inequality later.

এবার Lagrange multiplier-এর শুরু--

> We define
>
> $$L(x,y,z,\lambda)=A(x,y,z)-\lambda(x+y+z-2p).$$

এরপরের ধাপগুলো তো জানোই, সেগুলো আর দেখাচ্ছি না এখানে। সবকিছু করে পাবে $x=y=z$. যেহেতু $x+y+z=2p$, তাই $x=y=z=\frac{2p}{3}$.
এবার রুইমাছের রোমাঞ্চ! প্রথম কাজ হল রুইমাছের অস্তিত্ব দেখানো, মানে global maximum আছে দেখানো। এখানেও আগের অংকের সমস্যাটা আছে। আমরা কাজ করছি $x, y, z > 0$ নিয়ে, যেখানে $x+y+z=2p$. অবশ্যই এরকম (x, y, z)-এর set-টা bounded (কারণ কেউই $2p$-র চেয়ে বড় হতে পারে না)। কিন্তু নীচের দিকে >0 থাকায় set-টা closed হচ্ছে না। তাই আমরা প্রথমে $x, y, z \geq 0$ নিয়ে কাজ করব, এবং পরে $x=0,\ y=0$ আর $z=0$ হওয়াটা বন্ধ করব।

> The set of (x, y, z) with $x, y, z \geq 0$ and $x + y + z = 2p$ is closed and bounded, and the target function is continuous. So it has a global maximum. Now if $x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$, then the target function is zero. But since it can take positive values, zero cannot be its maximum. So the global maximum must occur for $x, y, z > 0$.

রুইমাছের অস্তিত্ব প্রমাণ হল। এবার দেখাব কোনো সেয়ানা মাছ নেই, মানে constraint-এর Jacobian-এর rank হবে 1.

> The Jacobian of the constraint is $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, which has rank 1.
> So the global maximum must satisfy Lagrange condition. Since there is only point satisfying this condition, it must give the global maximum.

এইবার triangle inequality-র প্রসঙ্গ আনব।

> Here $x = y = z = \frac{2p}{3}$ corresponds to an equilateral triangle (and hence satisfies the triangle inequality). This has the required maximum area $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

বিকল্প পদ্ধতি

এক্ষুণি যে সমাধানটা দিলাম, সেটাকে দুভাগে ভাগ করা যায়-- এক, এটা দেখানো যে maximum হতে হলে বাহুগুলোকে সমান হতে হবে। আর দুই, রুইমাছের চচ্চড়ি। এর মধ্যে Lagrange multiplier লাগে খালি প্রথম অংশটাতেই। এবং সেখানে আমরা area-র একটা অল্প-পরিচিত ফর্মুলা ব্যবহার করেছিলাম। এবার একটা সমাধান দেব, যেখানে প্রথম অংশটা করব area-র সবচেয়ে সুপরিচিত ফর্মুলাটা লাগিয়ে (মানে $\frac{1}{2}$×base×height)। দ্বিতীয় অংশটা আগের মতই থাকবে।

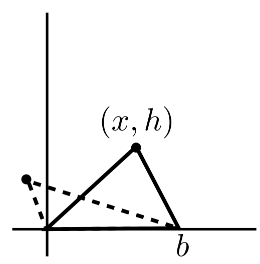
> Let us choose the coordinates as in Fig 47.

অর্থাৎ ত্রিভুজের একটা প্রান্তে origin নিয়েছি, আর x-axis-টা নিয়েছি একটা বাহু বরাবর।

> Then the area of the triangle is $\frac{1}{2}bh$ and the perimeter is
>
> $$b + \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(b - x)^2 + h^2}.$$

প্রথম পদ্ধতিতে আমরা ত্রিভুজটাকে প্রকাশ করছিলাম x, y আর z দিয়ে। এবার করেছি x, b আর h দিয়ে।

Fig 47



To solve

$$\max \tfrac{1}{2}bh \text{ subject to } b+\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(b-x)^2+h^2}=2p.$$

Let $L(x,h,b,\lambda)=\frac{1}{2}bh-\lambda(\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(b-x)^2+h^2}-2p)$.

এবার আমাদের কাজ হবে L-কে x, h এবং b-এর সাপেক্ষে partially differentiate করা। কিন্তু এই অংকে একটা কৌশল করে আমরা খাটনি বাঁচাতে পারি। খালি এই দুটো derivative বার করাই যথেষ্ট--

Then

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= -\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+h^2}}\right)\\ \frac{\partial L}{\partial h} &= \frac{b}{2}-\lambda\left(\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{h}{\sqrt{(b-x)^2+h^2}}\right)\end{aligned}$$

এবার কৌশলটা--

We consider $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ and $\frac{\partial L}{\partial h}=0$.
Here $\lambda\neq 0$.

⟦ Because:

Otherwise, from $\frac{\partial L}{\partial h}=0$ we have $b=0$, which cannot give maximum area.

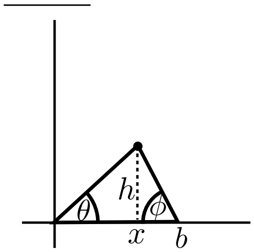
⟧

$\therefore$Solving $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ we get

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+h^2}}.$$

Considering Fig 48, we see that this means $\cos\theta=\cos\phi$. Since $\theta,\phi\in[0,\pi]$, hence $\theta=\phi$. So the triangle must be isosceles.

Fig 48



Isosceles মানে হল সমদ্বিবাহু। এই জায়গাটা কিন্তু বেশ কৌশলের ছিল। ভালো করে বুঝে নাও। কৌশলটার আরো একটু বাকি আছে। আমরা যে বাহুটা বরাবর x-axis নিয়েছিলাম, সেটা বাদে বাকি দুটো বাহু সমান দেখানো গেল। এখন ভেবে দ্যাখো, কোন্ বাহু বরাবর x-axis নেব, সেটা তো আমাদের হাতে। যদি অন্য কোনো একটা বাহু বরাবর নিতাম, তবে সেটা বাদে বাকি দুটো সমান হত। তার মানে আসলে সবগুলো বাহুই সমান। এই ধরণের symmetry-র যুক্তি অংকের জগতে খুবই প্রচলিত, যদিও সিলেবাসের সংকীর্ণ পরিসরে এদের তেমন দেখা পাওয়া যায় না।

> By considering a different side as the base, the triangle must be equilateral.

বাকি অংশ আগের মতই। ■

25.2 যেখানে max/min নিয়ে মাথা ঘামাতে হয় না

আমরা Lagrange multiplier করার কায়দাটাকে তিনভাগে ভাগ করেছিলাম, মাছ ধরা, রুইমাছ আছে দেখানো, সেয়ানা মাছ নেই দেখানো। এদের মধ্যে শেষ দুটো ধাপই বেশী বিরক্তিকর। এবারে কিছু অংক দেখব, যেখানে শেষের ধাপদুটো করতে বলে নি।

Exercise 23: Let $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$, where

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Use Lagrange's method of undetermined multipliers to find the stationary value of u.[3] **(2007.8c)**
HINT:
এখানে শুরু করব এইটা নিয়ে--

$$F(x, y, z, \lambda) = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2 - \lambda \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right).$$

তারপর তোমার হাতে ছেড়ে দিলাম। ■

Exercise 24: If $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, show that a stationary value of

$$f(x, y, z) = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$$

is given by $ax = by = cz$. Find also the stationary point.[5] **(2006.8b)**
HINT:
আগের অংকটাই একটু অন্য ভাষায়।
■

Exercise 25: If two variables x and y are connected by the relation $ax^2 + by^2 = ab$, show that the maximum and the minimum values of the function $x^2 + xy + y^2$ will be the values of u given by the equation

$$4(u - a)(u - b) = ab.$$

[4] **(2008.8b)**
HINT:

এখানে প্রথমে যথারীতি $L(x, y, \lambda) = x^2+xy+y^2-\lambda(ax^2+by^2-ab)$ নিয়ে শুরু করতে হবে। সেখানে থেকে stationary point-গুলো বার করতে গিয়ে দেখবে $ax^2 - by^2$ দিয়ে একটা equation আসছে। এদিকে constraint-এ $ax^2 + by^2$ আছে। সুতরাং যোগ-বিয়োগ করে ax^2 আর by^2 নিয়ে কিছু সম্পর্ক পাবে। তোমার কাজ হল এইসব সম্পর্ক ব্যবহার করে $4(u-a)(u-b) = ab$ দেখানো, যেখানে $u = x^2 + xy + y^2$. নানারকম দলাইমলাই করতে করতে এক সময়ে হয়ে যাওয়া উচিত।

■

DAY 26
Lagrange multiplier method (part 4)

26.1 যেখানে কোনো constrained optimisation নেই

Lagrange multiplier-এর কায়দাটা হল constrained optimisation করার একটা হাতিয়ার। এবার কিছু অংক দেখব, যেখানে Lagrange multiplier লাগানো যাবে, অথচ প্রথম দর্শনে কোনো constrained optimisation-ই চোখে পড়ে না!

Example 24: Using Lagrange's method prove that

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

where $x, y, z > 0$.[4] **(2003.9b)**

SOLUTION: এটা হল আমাদের পরিচিত am-gm inequality. কিছু positive সংখ্যার arithmetic mean (am) কখনোই তাদের geometric mean (gm)-এর থেকে ছোটো হতে পারে না। এটাকে Lagrange multiplier দিয়ে প্রমাণ করতে হলে আগে ব্যাপারটাকে একটা constrained optimisation-এর আকারে লিখতে হবে। তার জন্য আমরা প্রথমে gm-টাকে কোনো একটা value-তে বেঁধে দেব, ধরো c-তে বেঁধে দিলাম। এইটা হল আমাদের constraint. এই অবস্থায় দেখব am-টা কত ছোটো হতে পারে। যদি দেখাতে পারি যে minimum-টা c, ব্যস্, তবেই কেল্লা ফতে!

> For any fixed $c > 0$, we consider the problem
>
> min $\frac{x+y+z}{3}$ subject to $\sqrt[3]{xyz} = c$ and $x, y, z > 0$.

এখানে আমরা $x, y, z > 0$ শর্তটা ঢোকানোতে কোনো সমস্যা হবে না, কারণ যেহেতু $>$ আছে ($\geq$ নয়), তাই ওর ফলে feasible region-এর নতুন কোনো প্রান্ত এসে জটিলতা বেড়ে যাবে না।

> Let
> $$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x+y+z}{3} - \lambda(xyz - c^3).$$

আমরা এখানে "$\sqrt[3]{xyz} = c$"-কে "$xyz - c^3 = 0$" আকারে সাজিয়ে নিয়েছি।

Then

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3} - \lambda yz,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{3} - \lambda xz,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{3} - \lambda xy.$$

Solving $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ we get $\lambda = \frac{1}{3yz}$, since $y, z > 0$.

Similarly, $\lambda = \frac{1}{3xz}$ and $\lambda = \frac{1}{3xy}$.

$\therefore x = y = z$. Since $xyz = c^3$, we must have $x = y = z = c$.

তার মানে Lagrange multiplier-এর জালে একটাই মাছ পড়েছে। যদি দেখাতে পারি এটা global minimum, তাহলেই অংকটা শেষ। আবার রুইমাছের গল্প। প্রথমে দেখাব রুইমাছ (মানে global minimum) আদৌ আছে।

The feasible region is $D = \{(x, y, z) \ : \ xyz = c^3, \ x, y, z > 0\}$.

এই feasible region-টা কি closed? হ্যাঁ। সাবধান, এখানে ওই $x, y, z > 0$ শর্তটা দেখে ভেবো না যেন যে, D-টা closed নয়[7]। কিন্তু দুঃখের কথা, D মোটেই bounded নয়। অতএব বাঁটুল-ষষ্ঠীচরণের ডাক পড়বে। আমরা এমন x, y, z পেয়ে গেছি যাতে $\frac{x+y+z}{3} = c$ হয়। সুতরাং যেসব x, y, z-এর জন্য $\frac{x+y+z}{3} > c$ হয়, তদের নিয়ে মাথা ঘামানোর কোনো দরকার নেই। তাই ওদেরকে feasible region থেকে বার করে দেব।

Let $E \subseteq D$ be given by

$$E = \left\{(x, y, z) \ : \ xyz = c^3, \ x, y, z > 0 \ \& \ \tfrac{x+y+z}{3} \le c\right\}.$$

This set is closed and bounded, and so target function has a global minimum over E. This global minimum must be $\le c$.

Since the target function already attains the value c over the feasible region, so the global minimum over E must also be global minimum over the entire feasible region.

রুইমাছ পাওয়া গেল। এই ধাপটাই সবচেয়ে গোলমেলে হয়, কারণ একেকটা অংকে একেকভাবে করতে হয়। এবার দেখাব কোনো সেয়ানা মাছ নেই। তার জন্য constraint-এর Jacobian-এর rank বার করতে হবে--

The Jacobian of the constraint is $\begin{bmatrix} yz & xz & xy \end{bmatrix}$, which is non-zero (since $x, y, z > 0$), and so has rank 1.

Hence the global minimum must satisfy the Lagrange condition.

Since we have found only one point $(x, y, z) = (c, c, c)$ satisfying the condition,

[7]আসলে $xyz = c^3$ শর্তটা থাকায় x, y, z কেউই 0-র কাছে যেতে গেলে বাকিদের একজনকে অন্ততঃ ∞-র দিকে চলে যেতে হবে। ফলে কোনো limit point তৈরী হবে না।

> hence that must be the global minimum.

এবার একটা ছোট্টো উপসংহার--

> Since $c > 0$ was arbitrary, the result follows.

■

Exercise 26: Use the method of Lagrange's multipliers to show that the lengths of the semiaxes of the ellipse $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ are the square roots of the roots of the equation

$$\begin{vmatrix} a\lambda - 1 & b\lambda \\ b\lambda & c\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[5] **(2018, 2010)**
HINT:
আগের অংকটার মত এখানেও কোনো constrained optimisation-এর গল্পই নেই! তবে Lagrange multiplier-এর প্রশ্ন আসছে কী করে? ব্যাপারটা বোঝা যাক। একটা যা খুশি ellipse কল্পনা করো (Fig 49)। লক্ষ করো যে ওর major axis-এর প্রান্তগুলো হল centre থেকে পরিধির উপরে সবচেয়ে দূরের বিন্দু, এবং minor axis-এর প্রান্তগুলো সবচেয়ে কাছের বিন্দু। এ থেকেই constrained optimisation-এর গল্পটা বানানো যায়। Target function নেব centre থেকে (x, y)-এর দূরত্ব, আর constraint-টা নেব এই যে, (x, y)-কে ellipse-এর পরিধির উপর থাকতে হবে। এইভাবে যে maximum-টা পাওয়া যাবে সেটাই হল semi-major axis-এর দৈর্ঘ্য, আর minimum-টা হবে semi-minor axis-এর দৈর্ঘ্য।
এই অংকে অবশ্য খালি semi-axes বলেছে, আলাদা করে major বা minor নিয়ে মাথা ঘামাতে বলে নি। তাই maximum হচ্ছে নাকি minimum হচ্ছে, তা নিয়ে দুশ্চিন্তা করতে হবে না।
অংকটা শুরু কীভাবে করবে, সেটা একটু ধরিয়ে দিই। অংকটা যেভাবে দিয়েছে, তাতে variable-গুলো হল x আর y. কিন্তু শেষ পর্যন্ত কাজ করতে বলেছে origin থেকে (x, y)-এর দূরত্বের square নিয়ে, মানে $x^2 + y^2$ নিয়ে। প্রথমে (x, y) বার করে তা থেকে $x^2 + y^2$ বার করতে গেলে অংকটা খামোখা জটিল হয়ে উঠবে। তার চেয়ে বরং আমরা variable-দুটোকে বদলে নিই, x, y-এর বদলে r, θ. মানে polar coordinate. তবে অংকটা অনেক সহজ হয়ে যাবে।

Fig 49



> Putting $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$, the ellipse becomes
>
> $$\begin{aligned} & r^2(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta) = 1 \\ \text{or}\quad & r^2(\tfrac{a}{2}(1+\cos 2\theta) + b\sin 2\theta + \tfrac{c}{2}(1-\cos 2\theta)) = 1 \\ \text{or}\quad & r^2(\tfrac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta + \tfrac{a+c}{2}) = 1 \end{aligned}$$
>
> এই বার একটা ছোট্টো কৌশল করে এটাকে সাজিয়ে নেব--
>
> $$\text{or}\quad r^2(A\sin(2\theta+\phi)+B) = 1,$$
>
> where $A = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$, $\phi = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{a-c}{2b} & \text{if } b \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$ and $B = \frac{a+c}{2}$.

কৌশলটা বুঝলে তো? যদি তোমাকে $P\cos x + Q\sin x$ দেওয়া থাকে, তবে তুমি সেটাকে $\sqrt{P^2+Q^2}\sin(x+\phi)$ আকারে লিখতে পারো, যেখানে $\phi = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{P}{Q} & \text{if } Q \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$.

এবার আমরা Lagrange multiplier লাগাতে তৈরী--

> Let
>
> $$L(r,\theta,\mu) = r - \mu\left(r^2(A\sin(2\theta+\phi)+B) - 1\right).$$

এখানে Lagrange multiplier-টাকে μ নাম দিয়েছি, কারণ λ অক্ষরটা প্রশ্নে অন্য কাজে ব্যবহার করেছে। এবার $\frac{\partial L}{\partial r} = 0$ এবং $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ নিয়ে লড়াই করতে হবে। যদি দুটো কেসে ভেঙে এগোও তবে সুবিধা হতে পারে, $A = 0$ আর $A \neq 0$. ■

26.2 Lagrange multiplier না লাগানো

অনেক constrained optimisation-এর অংক আছে, যেগুলো Lagrange multiplier দিয়ে করা গেলেও, সরাসরি করে ফেলাই বেশী সহজ। অনেক সময়ে ছাত্রছাত্রীরা Lagrange multiplier-এর অন্ধ মোহে পড়ে গিয়ে সহজ পথের কথাটা ভুলেই যায়। এরকম তিনটে সহজ পথের কথা আমরা এবার আলোচনা করব।

26.2.1 প্রথম পথ--দূরত্ব হিসেবে চিন্তা করা

> সব লিখেছে কিন্তু কেবল পাচ্ছি নেকো লেখা কোথায়
> পাগলা ষাঁড়ে করলে তাড়া কেমন করে ঠেকাব তায়?
>
> --সুকুমার রায়

ধরো তোমাকে একটা পাগলা ষাঁড়ে তাড়া করেছে। তুমি আছো Fig 50-এর P বিন্দুতে। ওই নদীটার জলে ঝাঁপিয়ে পড়তে পারলেই তুমি নিরাপদ।

ছবিটাতে কয়েকটা ড্যাশ্‌ড্যাশ্ পথ দেখিয়েছি তোমার দৌড়নোর জন্য। এর মধ্যে কোন পথে তুমি দৌড়বে? তুমি কি ষাঁড়টাকে বলবে-- দাঁড়া ভাই, দেখছিস না এটা একটা constrained optimisation-এর সমস্যা, যেখানে এমন (x, y) বার করতে হবে

Fig 50

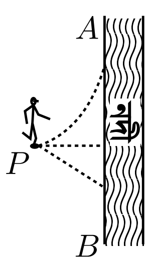


Fig 51

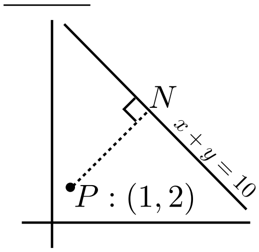


Fig 52

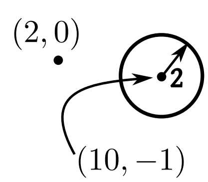
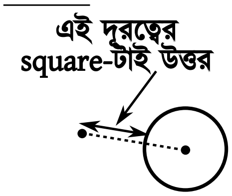


Fig 53



যেটা নদীর AB পাড়ের উপরে আছে, এবং যেটা থেকে P-এর দূরত্ব সবচেয়ে কম! হ্যাঁ, constrained optimisation-এর সমস্যা তাতে কোনো সন্দেহ নেই, কিন্তু পিছনে ষাঁড়বাবাজী থাকায় আপাততঃ এটা জীবন-মরণ সমস্যাও বটে। অতএব তুমি পড়ি-কি-মরি করে সোজা perpendicular-ভাবে (লম্বভাবে) ওই লাইনটার দিকে ছুটবে, কারণ নিতান্ত অশিক্ষিত মানুষও সহজাত বুদ্ধিতেই কেমন করে যেন শৈশব থেকেই শিখে ফেলে যে perpendicular দূরত্বই সবচেয়ে কম দূরত্ব। ঠিক এই ব্যাপারটাই আমরা এখানে আলোচনা করছি, ছবি দিয়ে ভেবে সহজাত বুদ্ধি দিয়েই constrained optimisation করা। এরকম একটা উদাহরণ দেখাই। আজকালকার MCQ-এর যুগে এই সহজ পথটার যে বাড়তি সুবিধা আছে, সে তো বলাই বাহুল্য।

Example 25: Minimise $(x-1)^2+(y-2)^2$ subject to $x+y=10$.

SOLUTION: অংকটা দেখে প্রথমেই যেখানে চোখ আটকে যাওয়া উচিত, সেটা হল target function-টা। ওটা হল $(1,2)$ বিন্দু থেকে (x,y)-এর দূরত্বের square. এখন দূরত্বের square-কে minimise করা আর দূরত্বকে minimise করা বলতে গেলে একই কথা। তার মানে প্রশ্ন হল $x+y=10$ লাইনটার উপরে কোন্ বিন্দু $(1,2)$-এর সবচেয়ে কাছে। Fig 51 দেখলেই বুঝবে উত্তরটা হল PN-এর দৈর্ঘ্য। যেহেতু $x+y=10$ লাইনটার slope হল -1, তাই ওই perpendicular লাইনটার slope হবে 1, মানে equation হবে $y=x+c$ জাতীয়। যেহেতু $(1,2)$ বিন্দুটা এই লাইনের উপরে আছে, তাই $2=1+c$, মানে $c=1$. সুতরাং এই লাইনটা যেখানে $x+y=10$-কে ছেদ করবে সেখানে একইসঙ্গে $x+y=10$ এবং $y=x+1$ হবে। ব্যস্, নিশ্চয়ই $x=4.5,\ y=5.5$. অতএব target function-এর minimum হচ্ছে $(4.5-1)^2+(5.5-2)^2=24.5$. ■

এই অংকে মূল যেটা লক্ষ করার সেটা হল "$(x-1)^2+(y-2)^2$-কে minimise করা" মানে আসলে "(x,y)-কে $(1,2)$-এর যথাসম্ভব কাছে নেওয়া"। সুতরাং minimise $(x-1)^2+(y-2)^2$ না বলে যদি maximise $\frac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ বলা থাকত, তাহলেও একই কায়দায় এগোনো যেত।

Exercise 27:

1. Min $\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ subject to $2x-3y=4$.
2. Max $\frac{1}{1+(x-1)^2+(y+1)^2}$ subject to $x+2y-6=0$..

■

চোখে দেখে দূরত্ব minimise করার ব্যাপারটা খালি সরলরেখার বেলাতেই খাটে এমন নয়, circle-এর বেলাতেও খাটে।

Exercise 28: Minimise $(x-2)^2+y^2$ subject to $(x-10)^2+(y+1)^2=4$.
HINT: এখানে পুরো জিনিসটা ছবি দিয়ে ভাবা যাক। Constraint-টা হল একটা circle, যার centre রয়েছে $(10,-1)$-এ, এবং radius হল 2. যে target function নিয়ে কাজ করতে বলেছে সেটা হল $(2,0)$ থেকে (x,y)-এর দূরত্বের square. অর্থাৎ অংকটার মোদ্দা কথাটা হল একটা circle-এর থেকে একটা বিশেষ বিন্দু কত দূরে সেটা বার করা (Fig 52)। তার জন্য Lagrange multiplier-এর হুজ্জোতে না গিয়ে স্রেফ Fig 53-এর মত লাইন টেনে করলেই হবে। ■

Exercise 29: Find minimum and maximum of $(x+1)^2+y^2$ subject to $(x-3)^2+y^2=4$. ■

এবার আরেকটু কঠিন অংক, এখানে দুটো circle নিয়ে কাজ হবে।

Exercise 30: Find maximum and minimum of $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ subject to $x_1^2+y_1^2=1$ and $(x_2-2)^2+(y_2-2)^2=1$.
HINT: এখানে ছবিটা হবে Fig 54-এর মত। Maximum-টা হল AB-র দৈর্ঘ্য, আর minimum-টা হল CD-র দৈর্ঘ্য।
■

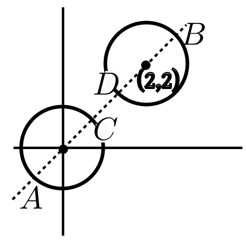


Fig 54

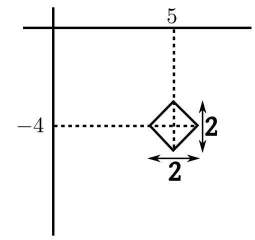


Fig 55

Exercise 31: Minimise $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ subject to $x_1^2 + y_1^2 = 4$ and $(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 1$. ■

Exercise 32: Maximise $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ subject to $x_1^2 + y_1^2 = 4$ and $x_2^2 + y_2^2 = 4$. ■

ছবি দিয়ে ভাবার একটা সুবিধা হল এমন কিছু constrained optimisation করে ফেলা যায় যেগুলো Lagrange multiplier দিয়েও করা যায় না, যেমন যদি differentiability-র সমস্যা থাকে। নীচের অংকটা সেরকম একটা উদাহরণ।

Exercise 33: Find maximum and minimum of $x^2 + y^2$ subject to $|x - 5| + |y + 4| = 1$.
HINT: এখানে $|x - 5| + |y + 4| = 1$-এর চেহারাটা হল Fig 55-এর মত। এই চেহারাটা কী করে পেলাম সেটা যদি না বুঝে থাকো তবে কয়েকটা কেসে ভেঙে চিন্তা করো--

$$|x-5| + |y+4| = \begin{cases} x - 5 + y + 4 & \text{if } x \geq 5,\ y \geq -4 \\ -(x-5) + y + 4 & \text{if } x < 5,\ y \geq -4 \\ x - 5 - (y+4) & \text{if } x \geq 5,\ y < -4 \\ -(x-5) - (y+4) & \text{if } x < 5,\ y < -4 \end{cases}.$$

■

এতক্ষণ যে অংকগুলো করছিলাম, সেখানে target function-টা থাকছিল কোনো দূরত্ব বা তার square. সেটা না হলেও অনেক সময়ে একই কায়দা খাটানো যায়। নীচের অংকে এরকম একটা উদাহরণ দিলাম।

Example 26: Minimise $2x^2 + 3y^2$ subject to $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUTION:এখানে $u = \sqrt{2}x$ এবং $v = \sqrt{3}y$ নিলেই অংকটা হয়ে যাবে এইরকম--

min $u^2 + v^2$ subject to $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} = 1$.

Fig 56

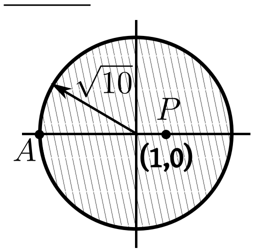
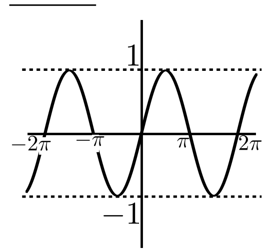


Fig 57



এবার constraint-টা হল একটা ellipse-এর পরিধি। তোমাকে দেখতে হবে এই পরিধির উপরে কোন্ বিন্দু centre-এর সবচেয়ে কাছে, এবং centre থেকে তার দূরত্বের square কত, অর্থাৎ কিনা ellipse-টার semi-minor axis-এর দৈর্ঘ্যের square বার করতে হবে। এখানে ellipse-এর equation-টাকে $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ আকারে লিখলে $a=\sqrt{2}$ এবং $b=\sqrt{3}$ হয়। যেহেতু $a<b$, তাই semi-minor axis-এর দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{2}$. সুতরাং উত্তর হবে এর square, মানে 2. ■

Exercise 34: Maximise $3(x-1)^2+y^2$ subject to $x^2+2y^2=1$. ■

Lagrange multiplier নিয়ে কাজ করার সময়ে constraint-গুলোতে "=" দরকার হয়। কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে "≤" বা "≥" জাতীয় constraint নিয়েও অনেক সময়ে কাজ করা যায়। একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 27: Find maximum value of $(x-1)^2+y^2$ subject to $x^2+y^2\leq 10$.

SOLUTION: ছবিটা দেখতে Fig 56-এর মত। সুতরাং উত্তর হল AP-র দৈর্ঘ্যের square. ■

26.2.2 দ্বিতীয় পথ--Variable-এর সংখ্যা কমানো

অনেক সময়ে একটা constrained optimisation-এর অংককে variable-এর সংখ্যা কমিয়ে একটা unconstrained optimisation-এর অংকে পরিণত করা যায়। "Unconstrained optimisation" মানে এমনি optimisation, যেমন হায়ার সেকণ্ডারীতে করতে, কোনো constraint ছাড়াই। কী করে একটা constrained optimisation-এর অংককে একটা unconstrained optimisation-এর অংকে পরিণত করা যায়, তার একটা উদাহরণ দেখলে সুবিধা হবে।

Example 28: Maximise xy subject to the constraint $x+y=10$.

SOLUTION: এখানে আমরা $x+y=10$ ব্যবহার করে প্রথমে $y=10-x$ লিখে নিতে পারি। তবে target function-টা হয়ে যাবে $x(10-x)$. এই যে y-এর জায়গায় $10-x$ বসিয়ে নিলাম, এতেই constraint-টা হিসেবে ঢুকে গেল, এখন $x(10-x)$-এর এমনি maximum (মানে unconstrained maximum) বার করলেই চলবে, যেটা সাধারণ differentiation করেই করা যায়। ■

এই অংকে constraint-টা সহজ ছিল, তাই চট্ করে সেটা ব্যবহার করে একটা variable-কে অন্যটার function হিসেবে লিখে ফেলা গেল। সবসময়েই যে এমনটা করা যাবে সে গ্যারান্টি নেই। কিন্তু তাও অনেক সময়ে constraint ব্যবহার করে variable-এর সংখ্যা কমানো যায়, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 29: Maximise xy subject to $x^2+y^2=1$.

SOLUTION: এখানে $x^2+y^2=1$ থেকে x বা y-কে অন্যজনের function হিসেবে লেখা যায় না। যেমন, y-কে x দিয়ে লিখতে চাইলে $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ লিখতে হবে। কিন্তু ওই $\pm$-টা থাকায় সেটা একটা function হবে না। কিন্তু এখানে আমরা অন্য কৌশল করতে পারি। এখানে feasible region-টা হল একটা circle, যার উপর যেকোনো বিন্দুকেই আমরা $(\cos\theta,\sin\theta)$ আকারে লিখতে পারি। সুতরাং যদি $x=\cos\theta$ আর $y=\sin\theta$ নিই, তবে দুটো variable-এর বদলে একটাতেই কাজ হয়ে যাচ্ছে, এবং $x^2+y^2=1$ শর্তটাও হিসেবে ঢুকে যাচ্ছে। Target function-টা তাহলে হয়ে যাচ্ছে $xy=\cos\theta\sin\theta$, এবং অংকটা হয়ে যাচ্ছে θ-র সাপেক্ষে এটার maximum বার করা। এখানে আমরা $f(\theta)=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ নেব। এখন $\sin x$-এর ঢেউ-খেলানো আচরণ তো জানোই (Fig 57)। সুতরাং maximum হবে 1. যদি জানতে চাও এই maximum-টা কোথায় হবে, তবে উত্তর হল যখন $2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ হবে, মানে $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ হবে। অবশ্য মূল অংকে কোনো θ ছিল না, ছিল x আর y. তাই উত্তরটাও x,y দিয়েই বলা উচিত। বুঝতেই পারছ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ হলে $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ বা $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ হবে। ■

এই কায়দাটা বিশেষ করে কাজ করে যদি feasible region-টা এমন কোনো curve হয়, যার parametric form জানা আছে, যেমন circle, ellipse, parabola এইসব।

Exercise 35: Let (x, y) be a point on the parabola $y = x^2$ which is closest to the point $(1, 2)$. Prove that $2x^3 - 3x = 1$.
HINT: এই parabola-টার একটা সহজ parametrisation হল (x, x^2). ■

26.2.3 তৃতীয় পথ--চোখে দেখে Lagrange multiplier করা

এবার যে কায়দাটা বলব, সেটা ঠিক Lagrange multiplier-এর বিকল্প নয়। এখানে আমরা Lagrange multiplier-ই করব, কিন্তু লিখে লিখে নয়, স্রেফ চোখে দেখে। এমনটা সবসময়েই করা যাবে এমন কথা নেই। কিন্তু অনেকক্ষেত্রেই করা যায়, এর ফলে নিখুঁত উত্তর বেরোয় না, কিন্তু মোটামুটি একটা আন্দাজ পাওয়া যায়। ফলে জটিল পথে পাওয়া কোনো উত্তর চোখে দেখে মিলিয়ে নেবার একটা সুবিধা হয়। নীচের অংকটা আমরা আগেই দেখেছি, এবং Lagrange multiplier দিয়ে করেওছি। এখানে স্রেফ চোখে দেখে করার চেষ্টা করি।

Exercise 36: Use Lagrange's method of undetermined multipliers to find the points on the ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

which are at the greatest and least distances from the line $3x + y - 9 = 0$.[5] **(2012.11)**
HINT:
এই অংকটা আমরা Lagrange multiplier দিয়ে খানিক আগেই করেছি। এবার বলি Lagrange multiplier ছাড়া কী করে উত্তরটা মোটামুটি আন্দাজ করা যায়। প্রথমে ছবিটা কল্পনা করে নাও (Fig 58)। এবার লক্ষ করো যে লাইনটা থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুরা লাইনটার সঙ্গে সমান্তরালভাবে আছে। এই সমান্তরাল লাইনটাকে সরাতে সরাতে একেবারে ellipse-টার গায় এনে ফেলো, ঠিক প্রথম যখন স্পর্শ করবে সেটাই হবে ellipse-এর উপরে লাইনটা থেকে নিকটতম বিন্দু (Fig 59)। লাইনটা আরো সরাতে থাকো, একসময়ে ওটা ellipse-টা পার করে বেরিয়ে যাবে। ঠিক যে মুহূর্তে বেরিয়ে যাচ্ছে, তখন আবার ellipse-টাকে স্পর্শ করে থাকবে। সেই বিন্দুটাই হবে দূরতম বিন্দু।
এবার এই কল্পনাটাকে কী করে অংকের ভাষায় পরিণত করা যায় দেখি। যে সরলরেখাটা দিয়েছে, তার সঙ্গে সমান্তরাল কোনো সরলরেখার চেহারা হবে $3x + y = c$-এর মত, মানে $y = c - 3x$. এইটা যদি ellipse-এর equation-এ বসাই তবে পাব--

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(c-3x)^2}{9} = 1,$$

বা

$$\tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{2c}{3}x + \left(\tfrac{c^2}{9} - 1\right) = 0.$$

এটা একটা quadratic equation (দ্বিঘাত সমীকরণ), সুতরাং--

- হয় এর কোনো real root নেই, মানে সরলরেখা আর ellipse-এর মধ্যে দেখাই হয় না,

Fig 58

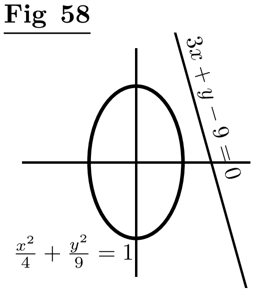
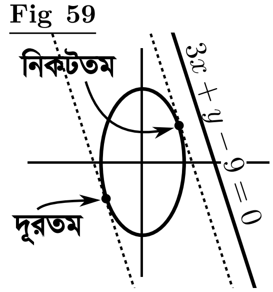


Fig 59



- অথবা, দুটো আলাদা আলাদা real root আছে, মানে সরলরেখাটা ellipse-টাকে দুবার ছেদ করে,
- আর নয় তো, ঠিক একটাই real root, মানে সরলরেখাটা ellipse-টাকে কেবল স্পর্শ করে আছে।

আমাদের দরকার এই তৃতীয় ক্ষেত্রটা। তার জন্য discriminant-টাকে শূন্য করলেই চলবে। এখানে discriminant-টা হল

$$5 - \frac{c^2}{9}.$$

এটা শূন্য হবে যখন $c = \pm 3\sqrt{5}$ হবে। তখন quadratic equation-টা থেকে x পেয়ে যাব--

$$x = \frac{8c}{15} = \frac{\pm 24\sqrt{5}}{15}.$$

এ থেকে y-ও পেয়ে যাবে, কারণ $y = c - 3x$.
দেখলে, এই কায়দায় কোনো ক্যালকুলাসই লাগল না!
■

DAY 27
Mean value theorem এবং Taylor theorem (part 1)

আজকে আমরা দুটো গুরুত্বপূর্ণ theorem শিখব--**mean value theorem** এবং **Taylor theorem**. এই দুটোই আমরা real analysis শেখার সময়ে শিখেছিলাম। এখানে ওদের multivariable সংস্করণ শিখব।

27.1 Mean value theorem

ধরো একটা গাড়ি যাচ্ছে সরলরেখা বরাবর একদিকে। দুই ঘন্টায় গাড়িটা দশ কিমি দূরে গেছে। তবে তার velocity (বেগ) কত? একটা স্কুলের বাচ্চাকে জিজ্ঞাসা করো, অমনি পট্ করে উত্তর দিয়ে দেবে-- ঘন্টায় পাঁচ কিমি, কারণ স্কুলে সে শিখেছে যে

> velocity হল কতটা গেছে তাকে সময় দিয়ে ভাগ করা।

কিন্তু হায়ার সেকণ্ডারীতে ওঠার পর velocity-র এই সংজ্ঞাটার বদলে আমরা ক্যালকুলাস ব্যবহার করে একটা নতুন সংজ্ঞা দেখি--

> যদি t সময়ে s দূরত্ব যাওয়া হয় (যেখানে s হল t-এর function), তবে velocity হল $\frac{ds}{dt}$.

একই velocity-র এরকম দুটো সম্পূর্ণ আলাদা দেখতে সংজ্ঞা হয় কী করে, সে ব্যাপারটা অনেকের কাছেই প্রথমটায় স্পষ্ট হয় না। হ্যাঁ, দুটো সংজ্ঞা সত্যিই আলাদা, ওরা মোটেই একই জিনিসের দুটো সংজ্ঞা নয়। প্রথম সংজ্ঞাটা হল average velocity-র (গড় বেগের) সংজ্ঞা, আর দ্বিতীয়টা হল instantaneous velocity-র (তাৎক্ষণিক বেগের) সংজ্ঞা। যদি তুমি কোনো গাড়ির স্পীডোমিটারের কাঁটায় চোখ রাখো, তবে লক্ষ করবে যে সেটা সদা চঞ্চল, প্রতি মুহূর্তেই সেটা দেখাচ্ছে ঠিক সেই মুহূর্তে গাড়িটা কত জোরে ছুটছে। এইটাই হল instantaneous velocity.
যতই আলাদা জিনিস হোক, দুজনেই তো আসলে velocity. তাই ওদের মধ্যে কিছু সম্পর্ক থাকবে এটাই স্বাভাবিক। এরকম একটা সম্পর্কই হল mean value theorem. গাড়ির গল্প দিয়ে বললে ব্যাপারটা এইরকম--

> ধরো আমাদের সেই গাড়িটা তিন ঘন্টা ধরে সেই সোজা রাস্তাটা দিয়ে চলেছে, এবং মোট গেছে 120 km. তার মানে এই সময়ে ওর average velocity হল 40 km/h. কিন্তু তার মানে কি এই যে, এই তিন ঘন্টায় গাড়িটার স্পীডোমিটারের কাঁটা সর্বদাই 40 km/h-এ স্থির ছিল? মোটেও তা নয়, হয়তো কখনো instantaneous velocity বেড়েছে, কখনো কমেছে, কিন্তু তাও এটুকু জোর দিয়ে বলা যাবে যে, এই তিন ঘন্টার মধ্যে অন্ততঃ কোনো এক মুহূর্তে গাড়িটার instantaneous velocity ঠিক 40 km/h হতে বাধ্য।

কেন এমন হবে, সেটা সহজ বুদ্ধিতে বোঝা কঠিন নয়। যদি স্পীডোমিটারের কাঁটা সর্বদাই 40 km/h-এর নীচে থাকত, তবে গাড়িটা $40 \times 3 = 120$ km-র কম যেত। আবার যদি সর্বদাই 40 km/h-এর বেশী থাকত, তবে গাড়িটা 120 km-র বেশী যেত। কিন্তু এদের কোনোটাই হয়নি, তার মানে স্পীডোমিটারের কাঁটা অবশ্যই অন্ততঃ কোনো এক সময়ে 40 km/h-কে ছুঁয়েছে।
এটা আমরা real analysis শেখার সময়েই শিখেছি। অংকের ভাষায় লিখে একবার মনে করিয়ে দিই--

Mean value theorem (for $\mathbb{R}$)

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a,b]$ and differentiable on (a,b). Then there is some $\theta \in (a,b)$ such that

$$f'(\theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

এর প্রমাণের মধ্যে এখানে যাচ্ছি না, কারণ সেটা real analysis শেখার সময়েই শিখেছ (দরকার হলে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Real Analysis-এর দ্বিতীয় খণ্ড দেখে নিতে পারো)। এখানে যেটা মনে রাখার বিষয় সেটা হল theorem-টার মূল বক্তব্যটা। যখন কোনো কিছু বদলায়, তখন পরিবর্তনের average rate অন্ততঃ কোনো একটা মুহূর্তের instantaneous rate-এর সমান হবে। এই ধারণাটা অংকের দুনিয়ায় বিভিন্ন জায়গাতেই উঁকি দেয়, এবং ফলে mean value theorem-এর বিভিন্ন সংস্করণ পাওয়া যায়। আমরা এখানে multivariate analysis-এর ক্ষেত্রে mean value theorem-এর একটা সংস্করণ আলোচনা করব। ব্যাপারটা প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। ধরো একটা function আছে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. এর গ্রাফটাকে xy-plane-এর উপরে ভাসমান একটা surface হিসেবে কল্পনা করো (Fig 60)। এবার xy-plane-এর উপরে যে কোনো দুটো বিন্দু নাও, ধরো (a,b) আর (x,y). এদের যদি একটা সোজা লাইন টেনে যোগ করো, তবে সেই লাইনের উপর বরাবর surface-টার গায় একটা curve পাবে। নিজেকে ওই লাইন বরাবর সীমাবদ্ধ রাখলে ব্যাপারটা কিন্তু একটা single variable-এর function-এ পরিণত হচ্ছে। এই জায়গাটা ভালো করে বুঝে বুঝে পড়ো। আমরা ওই লাইনটাকেই axis নেব, ধরো ওটাকে t-axis বললাম। কোনো axis নিতে হলেই, তার একটা origin এবং স্কেল লাগে। তা ধরো, আমরা (a,b) বিন্দুটাকেই origin নিলাম, আর (x,y) বিন্দুটাকে সেই স্কেল বরাবর 1 নিলাম (Fig 61)। তাহলে t-এর যেকোনো value-তেই ওই t-axis বরাবর একটা বিন্দু বার করতে পারবে, এইভাবে--

$$(a,b) + t(x-a, y-b).$$

যেমন $t = 0$ বসালে পাবে (a,b), আবার $t = 1$ বসালে (x,y), অথবা $t = \frac{1}{2}$ বসালে ওদের মধ্যবিন্দু, এইরকম। এই জিনিসটা দেখতে বিচ্ছিরি লাগলে একটু সংক্ষেপেও লিখতে পারো। তার জন্য $h = x - a$ এবং $k = y - b$ লেখো। তবে এটা হয়ে যাবে--

$$(a + th, b + tk).$$

Fig 60

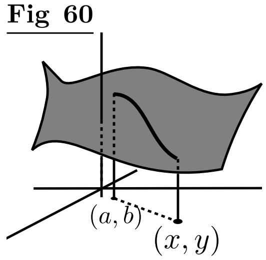
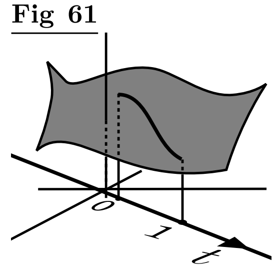


Fig 61



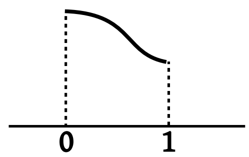


Fig 62

এবার লাইনের উপর curve-টাকে ভাবতে পারো t-এর একটা function-এর গ্রাফ। Function-টার ফর্মুলাও দিব্যি লিখে ফেলা যায়--

$$f(a+th, b+tk).$$

এখানে a, b, h আর k কিন্তু স্থির, এটা হল t-এর function. এর একটা নাম দিয়ে রাখা যাক, ধরো $g(t)$, অর্থাৎ--

$$g(t) = f(a+th, b+tk).$$

গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 62-এ। একটা ছোট্টো উদাহরণ দেখে নিলে সুবিধা হতে পারে।

Example 30: ধরো $f(x,y) = xe^y$. যদি $(a,b) = (0,0)$ এবং $(x,y) = (1,2)$ হয়, তবে $g(t)$ বার করো।

SOLUTION: এখানে $h = x - a = 1 - 0 = 1$ এবং $k = y - b = 2 - 0 = 2$. তাই

$$g(t) = f(a+th, b+tk) = f(t, 2t) = te^{2t}.$$

■

Exercise 37: ধরো $f(x,y) = \sin(xy)$. যদি $(a,b) = (1,2)$ এবং $(x,y) = (3,1)$ হয়, তবে $g(t)$ বার করো। ■

আমরা একটা $f(x,y)$ থেকে $g(t)$ বানানো শিখলাম। যেহেতু f-টা differentiable ধরে নিয়েছি, তাই এই g-ও differentiable হবে। এবার যদি $t = 0$ থেকে $t = 1$ পর্যন্ত $g(t)$-র উপর আমাদের পরিচিত mean value theorem-টা লাগাই, তবে যা পাব সেটাই হল $\mathbb{R}^2$-এর জন্য mean value theorem. একই জিনিস যেকোনো $\mathbb{R}^n$-এর জন্যই করা যায়। নীচের অংকে অবশ্য পুরো আলোচনাটা $\mathbb{R}^2$-র জন্যই অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখতে বলেছে। এতক্ষণ ছবি দিয়ে যা বুঝেছি, সেটাই সমাধানে লিখতে হবে। খালি সেই সঙ্গে f-এর উপরে শর্ত এমনভাবে নিতে হবে, যাতে $t = 0$ থেকে $t = 1$ পর্যন্ত $g(t)$-এর উপর আমাদের পরিচিত mean value theorem-টা লাগানো যায়।

Example 31: State and prove mean value theorem for a function of two real variables.[1+3]

(2007.8ai)
SOLUTION:

|

Mean value theorem (for $\mathbb{R}^2$)

Let $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ and $r>0$. Let $f: N_2((a,b),r)\to\mathbb{R}$ be a differentiable function. Let $(x,y)\in N_2((a,b),r)$. We shall write $h=x-a$ and $k=y-b$. Then

$$f(x,y)=f(a,b)+h\partial_2 f(a+\theta h,b+\theta k)+k\partial_2 f(a+\theta h,b+\theta k)$$

for some $\theta\in(0,1)$.

এবার প্রমাণটা করব। এতক্ষণ যা আলোচনা করেছি, সেটা অংকের ভাষায় লিখে দিলেই প্রমাণটা হয়ে যাবে--

Proof: Consider the function $g(t)=f(a+th,b+tk)$ for $t\in[0,1]$.

এইবার দেখাতে হবে যে $g(t)$-র উপরে আমাদের পরিচিত mean value theorem খাটানো যায়, মানে g হল $[0,1]$-এর উপর continuous এবং $(0,1)$-এর উপরে differentiable. অবশ্য এখানে g-টা পুরো $[0,1]$-এর উপরেই differentiable, সুতরাং আলাদা করে দুই প্রান্তে continuity দেখাতে হবে না।

Since f is differentiable over $N_2((a,b),r)$,
hence g is differentiable over $[0,1]$.
So univariate mean value theorem may be applied to g over $[0,1]$. This gives

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(\theta) \qquad (*)$$

for some $\theta\in(0,1)$.

এবার আমরা g-এর জিনিসগুলোকে f দিয়ে প্রকাশ করব।

Here $g(0)=f(a,b)$, $g(1)=f(x,y)$, and by chain rule,

$$g'(t)=h\partial_1 f(a+th,b+tk)+k\partial_2 f(a+th,b+tk).$$

এবার ওই $(*)$-কে f দিয়ে লিখে দিলেই হবে--

So, from $(*)$, we have

$$f(x,y)=f(a,b)+h\partial_1 f(a+\theta h,b+\theta k)+k\partial_2 f(a+\theta h,b+\theta k)$$

for some $\theta\in(0,1)$, as required.

■

Example 32: State mean value theorem for a function of two variables. Using the theorem to

the function

$$f(x,y) = \sin px + \cos py,$$

give an expression $f\left(\frac{1}{2},0\right) - f\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ in terms of first order partial derivatives of f.[1+3] **(2005.8a)**

SOLUTION: প্রথম অংশের উত্তর আগের অংকেই রয়েছে। দ্বিতীয় অংশের জন্য আমরা $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$-কে নেব (a,b), আর $\left(\frac{1}{2},0\right)$-কে নেব (x,y).

> Second part:
>
> Let $(a,b) = \left(0,-\frac{1}{2}\right)$ and $(x,y) = \left(\frac{1}{2},0\right)$. So $(h,k) = (x,y)-(a,b) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
>
> Here f is differentiable over entire $\mathbb{R}^2$.
>
> So, by the mean value theorem,
>
> $$f(x,y) = f(a,b) + h\partial_1 f(a+\theta h, b+\theta k) + k\partial_2 f(a+\theta h, b+\theta k)$$
>
> for some $\theta \in (0,1)$.
>
> Now $\partial_1 f(x,y) = p\cos px$ and $\partial_2 f(x,y) = -p\sin py$.
>
> Hence
>
> $$f(x,y) - f(a,b) = hp\cos(p(a+\theta h)) - kp\sin(p(b+\theta k)),$$
>
> for some $\theta \in (0,1)$, ie,
>
> $$f\left(\tfrac{1}{2},0\right) - f\left(0,-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{p}{2}\left[\cos\left(\frac{p\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{p(\theta-1)}{2}\right)\right]$$
>
> for some $\theta \in (0,1)$.

■

27.2 Taylor theorem

Taylor theorem আমরা real analysis শেখার সময়ে শিখে থাকি। ব্যাপারটা চট্ করে মনে করে নিই। কাজটা আমরা তিন ধাপে করব। ধরো একটা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ দিয়েছে, যেটাকে অন্ততঃ 4 বার differentiate করা যায়। আর কোনো একটা $a\in\mathbb{R}$-ও দিয়েছে। আমাদের কাজ হল এমন একটা polynomial তৈরী করা, যার degree হবে ≤ 4, এবং ওই a বিন্দুতে যার value এবং প্রথম চারটে derivative একেবারে f-এর সাথে মিলে যাবে। এইরকম polynomial খালি একটাই সম্ভব, এবং সেটা হল

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 = p_4(x), \text{ ধরো।}$$

এটা হল একটা **Taylor polynomial**-এর উদাহরণ। আরো গুছিয়ে বললে, **4-th order Taylor polynomial of $f(x)$ around $x=a$.** এখানে **order** শব্দটা লক্ষ করো। আমরা degree বলি নি, কারণ degree-টা <4 হতে পারে (যদি $f^{(4)}(a)=0$ হয়)। ফর্মুলাটা গুছিয়ে লিখে রাখি।

Definition: Taylor polynomial (for $\mathbb{R}$))

Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a function which is differentiable at least k times. Let $a\in\mathbb{R}$. Then the k-th order Taylor polynomial of f around $x=a$ is defined as

$$p_k(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

এখানে $f^{(0)}(a)$ বলতে $f(a)$ বোঝানো হচ্ছে। এই গেল প্রথম ধাপ।
এরকম একটা polynomial নিয়ে আমরা কেন মাথা ঘামাই? কারণ এটা দিয়ে $f(x)$-কে approximate করা যায়। ব্যাপারটা প্রথমে একটা উদাহরণ দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক।

Example 33: ধরো $f(x)=e^x$. তবে $x=0$-তে f-এর k-th order Taylor polynomial বার করো।

Solution: যেহেতু e^x-এর সব derivative-ই e^x, তাই সব i-এর জন্যই $f^{(i)}(0)=1$ হবে। অতএব k-th order Taylor polynomial-এর চেহারাটা হবে এইরকম--

$$p_k(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}x^i,$$

অর্থাৎ কিনা e^x-এর জন্য যে infinite series-টা আমরা জানি, তার প্রথম $k+1$-খানা term দিয়ে তৈরী। ■

লক্ষ করো, k যতই বাড়বে, $p_k(x)$ ততই $x=a$ বিন্দুর কাছাকাছি জায়গায় $f(x)$-এর মত হয়ে উঠবে। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 63-এ। অংকের ভাষায় ব্যাপারটা এইরকম--

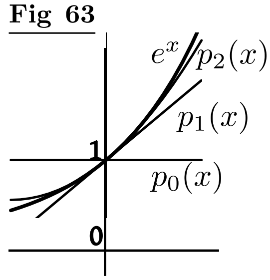
- ধরো $k=0$ নিলাম। তবে $p_0(x)\equiv f(a)$. যদি f-টা a-তে continuous হয়, তবে $\lim_{x\to a}[f(x)-p_0(x)]=0$ হবে।
- যদি $k=1$ নিই, তবে $p_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ হবে। যেহেতু $f(x)$ হল $x=a$-তে differentiable, তাই $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$. এটাকেই একটু সাজিয়ে লিখলে পাবে--

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-p_1(x)}{x-a}\right]=0.$$

- একইভাবে $k=2$ নিলে হবে--

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-p_2(x)}{(x-a)^2}\right]=0.$$

Fig 63



- In general, যেকোনো k-র জন্যই যেই $f(x)$-কে $x = a$-তে k-বার differentiable ধরব, অমনি পাব--

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-p_k(x)}{(x-a)^k}\right]=0.$$

অতএব যদি $R_k(x) = f(x) - p_k(x)$ নাও, তবে $x \to a$ হলে $R_k(x)/(x-a)^k \to 0$ হবে। এর জন্য শর্ত খালি $f(x)$-কে $x = a$-তে k-বার differentiable হতে হবে (নইলে তো $p_k(x)$-কে define-ই করা যেত না)। এইটা হল দ্বিতীয় ধাপ। তৃতীয় ধাপে আমরা $R_k(x)$-এর জন্য একটা সুন্দর চেহারা বার করি, অবশ্য তার জন্য একটু বাড়তি শর্ত লাগে। শর্তটা হল $f(x)$-কে $x = a$-কে ঘিরে খানিকটা জায়গায় $(k+1)$-বার differentiable হতে হবে। সেক্ষেত্রে সেই জায়গাটুকুর মধ্যে $R_k(x)$-এর চেহারা হবে--

$$R_k(x)=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!},$$

যেখানে ξ হল a আর x-এর মাঝামাঝি কোনো সংখ্যা। অনেক সময়ে ξ-কে লোকে $a + \theta(x - a)$ আকারে লেখে, যেখানে $\theta \in (0,1)$ কোনো সংখ্যা। এই জিনিসটা আমরা একটু পরে ব্যবহার করব। তাই এই বেলা গুছিয়ে লিখে রাখি--

Taylor's theorem (for $\mathbb{R}$)

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. Let $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ and $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ Let $x \in (a - r, a + r)$. We assume $f^{(k)}$ is differentiable over $(a - r, a + r)$ and continuous over $[a - r, a + r]$. Then, writing $h = x - a$, we have

$$f(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}f^{(i)}(\mathbf{a})h^i+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a+\theta h)h^{k+1}$$

for some $\theta \in (0, 1)$.

এই পর্যন্ত আমরা real analysis শেখার সময়েই শিখি (এবং তারপরে কেমন করে যেন গুলিয়ে ফেলি)।
ঠিক একইরকম ব্যাপার করা যায় যদি $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ হয়, তাহলেও। $\mathbb{R}$-এর বেলায় যেমন p_k বার করার জন্য শর্তটা ছিল k বার differentiable হতে হবে, তেমনি এখানে k-বার partially differentiable হতে হবে। একটা উদাহরণ নিয়ে বোঝা যাক। যদি $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ হয়, তবে--

- প্রথম derivative-এর জায়গায় আসবে $\partial_1 f$ আর $\partial_2 f$.
- তেমনি, দ্বিতীয় derivative-র জায়গায় আসবে এরা চারজন--

$$\partial_{11}f,\quad \begin{matrix}\partial_{12}f\\ \partial_{21}f\end{matrix}\quad \text{আর}\quad \partial_{22}f.$$

- একইভাবে তৃতীয় derivative-এর জায়গা নেবে এই আটটা partial derivative--

$$\partial_{111}f,\quad \begin{matrix}\partial_{112}f\\ \partial_{121}f\\ \partial_{211}f\end{matrix},\quad \begin{matrix}\partial_{122}f\\ \partial_{212}f\\ \partial_{221}f\end{matrix}\quad \text{আর}\quad \partial_{222}f.$$

- আশা করি বুঝতে পারছ, চতুর্থ derivative-এর জায়গা নেবে $2^4 = 16$-টা partial derivative.

সুতরাং উদাহরণস্বরূপ যদি $k = 4$ আর $n = 2$ নিই, তবে আমরা ধরে নেব যে $f(x, y)$ এমন একটা function যাতে এই $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$-টা partial derivative-এরই অস্তিত্ব আছে, এবং কাজের সুবিধার জন্য আরো ধরে নেব যে, partial differentiation-এর ক্রমটা গুরুত্বপূর্ণ নয়, মানে $\partial_{21} f = \partial_{12} f$ হবে, আবার $\partial_{211} f = \partial_{112} f$ হবে, এইরকম। তাহলে 4-th order Taylor polynomial of $f(x, y)$ around (a, b) হবে এমন একটা polynomial (ধরো $p_4(x, y)$), যার এই ধর্মটা আছে--

> (a, b) বিন্দুতে যার value এবং এই 30-টা partial derivative একদম মিলে যাবে $f(x, y)$-এর সঙ্গে।

এরকম polynomial সত্যিই আছে, এবং ঠিক একটাই আছে। এটাকে লিখে প্রকাশ করার নানা কায়দা আছে। আমরা তার মধ্যে দুটো শিখব। তার জন্য ধরো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ এবং আমাদের variable হল $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. আমরা কাজ করছি $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ বিন্দুতে।

27.2.1 প্রথম কায়দা

এর জন্য আমরা $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = (h_1, \ldots, h_n)$ নেব, তাতে লেখার পরিশ্রম কিছুটা বাঁচবে। উদাহরণস্বরূপ $k = 4$-এর জন্য সব কিছু লিখে দেখাচ্ছি--

$$\begin{aligned} p_4(\mathbf{x}) &= f + \sum_i \partial_i f(\mathbf{a}) h_i + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j \partial_{ij} f(\mathbf{a}) h_i h_j \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_i \sum_j \sum_k \partial_{ijk} f(\mathbf{a}) h_i h_j h_k \\ &\quad + \frac{1}{4!} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\ell \partial_{ijk\ell} f(\mathbf{a}) h_i h_j h_k h_\ell. \end{aligned}$$

এখানে প্রতিটা sum-ই 1 থেকে n পর্যন্ত।
একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 34: $f(x_1, x_2) = \sin(3x_1 + 5x_2)$-এর 2nd order Taylor polynomial around $(1, 1)$ বার করো।

SOLUTION: প্রথমে ফর্মুলাটা লিখে নিই--

$$p_2(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \sum_i h_i \partial_i f(a_1, a_2) + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j h_i h_j \partial_{ij} f(a_1, a_2)$$

এখানে $(a_1, a_2) = (1, 1)$ এবং--

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, x_2) &= 3\cos(3x_1 + 5x_2) \\ \partial_2 f(x_1, x_2) &= 5\cos(3x_1 + 5x_2) \\ \partial_{11} f(x_1, x_2) &= -9\sin(3x_1 + 5x_2) \\ \partial_{12} f(x_1, x_2) = \partial_{21} f(x_1, x_2) &= -15\sin(3x_1 + 5x_2) \\ \partial_{22} f(x_1, x_2) &= -25\sin(3x_1 + 5x_2). \end{aligned}$$

সুতরাং

$$p_2(x_1, x_2) = \sin 8 + (3h_1 + 5h_2)\cos 8 - \frac{1}{2}(9h_1^2 + 30h_1h_2 + 25h_2^2)\sin 8,$$

যেখানে $h_1 = x_1 - 1$ এবং $h_2 = x_2 - 1$. এখানে ওই 30-টা কী করে এল, বুঝলে তো? আসলে ∂_{12} আর ∂_{21} দুজনেই 15 এনেছে, মিলে মোট 30 হয়েছে। ■

লক্ষ করো এখানে ওই $(9h_1^2+30h_1h_2+25h_2^2)$-কে $(3h_1+5h_2)^2$ হিসেবে লেখা যায়। এটা মোটেই কাকতালীয় নয়। বস্তুতঃ এক্ষুণি যে দ্বিতীয় কায়দাটা শিখব, তার জন্ম এটা থেকেই। কিন্তু তার আগে নীচের অংকটা করে নাও।

Exercise 38: হাতেকলমে পরীক্ষা করে দ্যাখো $\partial_{12}p_2(a_1,a_2)$ সত্যিই $\partial_{12}f(a_1,a_2)$-এর সমান হচ্ছে কিনা। ■

27.2.2 দ্বিতীয় কায়দা

এখানে আমরা একটা নতুন চিহ্ন ব্যবহার করব, $D=\sum_i h_i\partial_i$. প্রথম দর্শনে এটা গোলমেলে লাগতে পারে। একটু সময় নিয়ে হজম করা যাক। D হল যাকে বলে একটা operator. আমরা এই operator-টা গত অধ্যায়ের শেষেই দেখেছিলাম। নীচের অংকটা করে মনে করে নাও।

Example 35: যদি $\sin(3x_1+5x_2)$-এর উপরে D লাগাও, তবে কী পাবে?

SOLUTION: $D\sin(3x_1+5x_2)=(h_1\partial_1+h_2\partial_2)\sin(3x_1+5x_2)=3h_1\cos(3x_1+5x_2)+5h_2\cos(3x_1+5x_2)$.
■

এই D-এর ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভাবতে চাইলে প্রথমে $n=1$ নাও (মানে একটাই variable, সেই হায়ার সেকণ্ডারীর মত)। তবে $D=h\frac{d}{dx}$. ধরো একটা function আছে $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. কোনো একটা $h\in\mathbb{R}$ নিলাম, আর কোনো একটা বিন্দু $a\in\mathbb{R}$. এই a বিন্দুতে tangent-টা কল্পনা করো (Fig 64)। এই a বিন্দুতে tangent-এর উচ্চতা $f(a)$. এবার যদি আমি x-axis বরাবর a থেকে $a+h$-এর যাই, তবে tangent-টা $f(a)$-এর চেয়ে আরো কতটা উঠবে, সেটাই হল $(Df)(a)$. কেন এমন হচ্ছে সেটা বোঝার জন্য প্রথমে tangent-এর equation-টা নাও--

$$y=f(a)+f'(a)(x-a).$$

এর মধ্যে $x=a+h$ বসালেই পাবে $y=f(a)+f'(a)h$. এটা $f(a)$-এর চেয়ে $f'(a)h$ পরিমাণ বেশি, সেটাই $(Df)(a)$. যদি $n=2$ নাও (মানে দুটো variable), তবেও একই ব্যাপার (Fig 65)।
আমরা গত অধ্যায়ে শিখেছিলাম যে, operator-দেরকে সাধারণ সংখ্যার মতই যোগ, বিয়োগ, গুণ করা যায়, খালি গুণটা commutative হয় না। সুতরাং $\mathbb{R}^2$-র বেলায় যদি $D=h_1\partial_1+h_2\partial_2$-এর উপরে $(a+b)^2$-এর ফর্মুলা অন্ধের মত লাগিয়ে দাও, তবে পাবে

$$D^2=h_1^2\partial_1^2+2h_1h_2\partial_1\partial_2+h_2^2\partial_2^2.$$

এখানে $\partial_1\partial_2=\partial_2\partial_1$ ধরে নিয়েছি, তাই commutative না হওয়াতেও সমস্যা হল না। একইভাবে $\mathbb{R}^n$-এর বেলায় লিখতে পারি--

$$D^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_ih_j\partial_i\partial_j.$$

একইরকম ব্যাপার হবে D^3 বা D^4 ইত্যাদিদের ক্ষেত্রেও। বুঝতেই পারছ D^3-কে বড় করে লিখলে কীরকম বীভৎস একটা জিনিস হবে। সেই তুলনায় D^3 কেমন ছোট্টো আর মিষ্টি! সেই ছোট্টো আর মিষ্টি কায়দায় লিখলে $p_4(\mathbf{x})$-কে বেশ গুছিয়ে

Fig 64

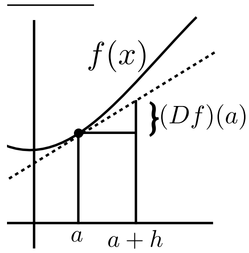
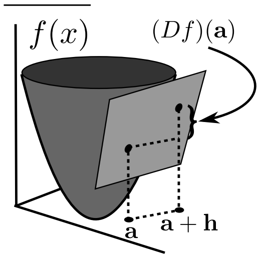


Fig 65



লেখা যায়, এইভাবে--

$$p_4(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (Df)(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(D^2 f)(\mathbf{a}) + \frac{1}{3!}(D^3 f)(\mathbf{a}) + \frac{1}{4!}(D^4 f)(\mathbf{a}).$$

এখানে ওই প্রথম $f(\mathbf{a})$-টাকে চাইলে $D^0 f(\mathbf{a})$ লিখতে পারো, মানে শূন্যবার D লাগানো হয়েছে, অর্থাৎ কিছুই করা হয় নি। এভাবে লিখলে সবগুলো term-ই বেশ একই ছন্দে আসে।
In general, যেকোনো n আর k-র জন্যই লিখতে পারো--

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(D^k f)(\mathbf{a}),$$

যেখানে $h_i = x_i - a_i$ এবং $D = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i$. আমরা যে দুটো কায়দায় লেখা শিখলাম, তার মধ্যে এই দ্বিতীয় কায়দাটাই সবচেয়ে কাজের। এটা প্রয়োগ করে কিছু অংক আমরা শীঘ্রই দেখব। তার আগে কালকে আমরা Taylor's theorem-টা গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করব।

DAY 28
Mean value theorem এবং Taylor theorem (part 2)

28.1 গুছিয়ে লিখে প্রমাণ

Example 36: State and prove Taylor's theorem for a real valued function of two real variables.[5]

(2012.10a,2010.9a)
SOLUTION:

> **Taylor's theorem (for $\mathbb{R}^2$)**
>
> Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function. Let $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ and $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ Let $\mathbf{x} \in N_2(\mathbf{a}, r)$. We assume $f^{(k)}$ is differentiable over $N_2(\mathbf{a}, r)$. Then
>
> $$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}(D^i f)(\mathbf{a}) + \frac{1}{(k+1)!}(D^{k+1} f)(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h})$$
>
> for some $\theta \in (0, 1)$, where $\mathbf{h} \equiv (h_1, h_2) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Here $D = h_1\partial_1 + h_2\partial_2$.

বেশ দাঁত বের করা জিনিস, তাই না? কয়েকটা ব্যাপার লক্ষ করো। প্রথমতঃ যদিও এখানে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নিয়েছি (কারণ প্রশ্নটায় সেটাই চেয়েছিল), theorem-টা কিন্তু যেকোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-এর জন্যই খাটে।
Proof:

> If $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, and the result is immediate.

কারণ $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ এখানে $\mathbf{0}$. তাই $D = h_1\partial_1 + h_2\partial_2 = 0$. অর্থাৎ, কারো উপরে D লাগালেই সেটা শূন্য হয়ে যাবে। Sum-টার মধ্যে খালি একটা term-এই কোনো D লাগানো হয় নি, সেটা হল প্রথম term-টা। তাই এক্ষেত্রে সেটাই খালি পড়ে থাকবে।
এবার দেখি $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ হলে কী হয়--

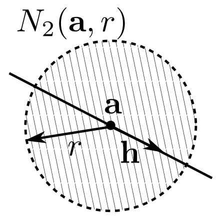


Fig 66

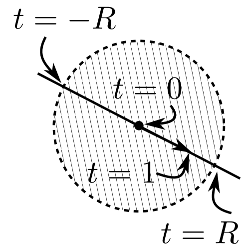


Fig 67

> Next, we consider $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.
> Let $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$.

এই function-টা আমাদের পূর্বপরিচিত। Mean value theorem-এর আলোচনাতেও ওর দেখা পেয়েছিলাম। আমাদের পরিকল্পনা হল g-এর উপরে univariate Taylor theorem লাগানো।

> Then $g^{(k)}$ is differentiable over $(-R, R)$, where $R = \frac{r}{\|\mathbf{h}\|} > 1$.

এটা কী করে এল? আসলে g তো তৈরী হয়েছে f থেকেই। তাই $f^{(k)}$ differentiable হওয়ায় $g^{(k)}$-ও তাই হয়েছে। এবার প্রশ্ন হল ওই R-টা এল কোথেথকে? মনে রেখো $N_2(\mathbf{a}, r)$ হল Fig 66-এর মত একটা চাকতি, এবং $\mathbf{a} + t\mathbf{h}$ লাইনটা আছে তার একটা diameter বরাবর। এই লাইনের প্রতিটা বিন্দুই t-এর কোনো না কোনো value-র জন্য পাওয়া যায়। লাইনটার যে অংশটা চাকতির মধ্যে পড়ে সেই অংশে $t \in (-R, R)$ হবে, কারণ $t = \pm R$ হলে $\|t\mathbf{h}\| = r$ হয়, অর্থাৎ $\mathbf{a} - R\mathbf{h}$ আর $\mathbf{a} + R\mathbf{h}$ হল diameter-টার দু প্রান্ত। যেহেতু R তৈরী করার জন্য $\|\mathbf{h}\|$ দিয়ে ভাগ করতে হল, তাই $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ দরকার। সেই কারণেই $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ কেসটা আগে আলাদাভাবে করে নিয়েছিলাম। এখানে $t = 0$ নিলে $\mathbf{a}$ পাওয়া যায়, এবং $t = 1$ নিলে $\mathbf{x}$. বোঝার জন্য Fig 67 দেখে নাও। যেহেতু $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{x}$ দুজনেই $N_2(\mathbf{a}, r)$-এর মধ্যে আছে, তাই $[0, 1] \subseteq (-R, R)$.

> Hence g satisfies the conditions of univariate Taylor theorem of order k over $[0, 1] \subseteq (-R, R)$.

এবার $g(t)$-র উপরে univariate Taylor theorem লাগালেই পাবে--

> Thus, for $t \in (-R, R)$, we have
>
> $$g(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} t^i + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}. \qquad (*)$$

এবার g থেকে f-এ ফিরতে হবে। তার জন্য g-এর derivative-গুলোকে f-এর derivative দিয়ে প্রকাশ করতে হবে। সেই কাজের হাতিয়ার হল chain rule.

> Now, by chain rule, $g'(t) = (Df)(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$.

মনে রেখো $g(t) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$. এর উপরে সরাসরি chain rule লাগালেই এটা পাবে।

> Using this repeatedly we get
>
> $$g^{(i)}(t) = (D^i f)(a + t\mathbf{h}) \text{ for } i = 1, \ldots, k+1.$$
>
> Putting this in (*) and putting $t = 1$, we get the theorem.

[Q.E.D]

■

এই প্রমাণটার কায়দাটা ভালো করে লক্ষ করো। আমরা কিন্তু পুরো ব্যাপারটাকেই univariate Taylor theorem-এ পর্যবসিত করে নিলাম। যদি তোমাকে কখনো কোনো $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-এর Taylor polynomial বার করতে হয়, তবে সরাসরি theorem-টা না ব্যবহার করে, অনেক সময়ে এই পথে এগোলেই বেশী সহজ হয়। পরে আমরা এরকম কয়েকটা উদাহরণ দেখব।

Taylor theorem-এর আরেকটা নাম হল **Taylor expansion**, কারণ এর সাহায্যে তিলকে তাল করা যায়, $f(x, y)$-কে একটা polynomial এবং একটা remainder term দিয়ে প্রকাশ করা যায়। Taylor theorem লাগানো হয় around কোনো একটা বিন্দু। যদি এই বিন্দুটা origin হয়, তবে আমরা সেই Taylor expansion-কে অনেক সময়ে **Maclaurin expansion**-ও বলে থাকি। Maclaurin-এর উচ্চারণ হল ম্যাক্‌লরিন।

Exercise 39: State and prove Taylor's theorem in finite form to a function $f(x, y)$ of two variables.[2+4] **(2006.8a)**

HINT:

এটাও আসলে আগের অংকটাই। এখানে "finite form" কথাটা দেখে ঘাবড়ে যেও না। ওর মানে হল আমরা খালি finite-সংখ্যক term নিচ্ছি, মানে polynomial-এর term-গুলো এবং সব শেষে remainder-টা। অনেক সময়ে দেখানো যায় যে term-এর সংখ্যা যতই বাড়বে, ততই remainder-টা শূন্যর দিকে যাবে। তখন limit নিয়ে পুরো জিনিসটাকে একটা infinite series-এর আকারে লেখা যায়। সেটাই হল infinite form. যাই হোক, এই বইতে আমরা infinite form-টা নিয়ে মাথা ঘামাব না।

■

Exercise 40: Establish Taylor's theorem in finite form for a function $f(x, y)$ of two real variables, stating the conditions to be imposed upon $f(x, y)$.[5] **(2008.8a)**

HINT: একই অংক আরও একবার। ■

Exercise 41: State a set of sufficient conditions for the validity of the following relation and then establish it:

$$f(a+h, b+k) =$$
$$f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b) + \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta h, b+\theta k),$$

for some $\theta \in (0, 1)$. **(2004.8ai)**

HINT: এটাও একই জিনিস, খালি এখানে $k = 2$ অব্‌ধি যেতে বলেছে। ■

Exercise 42: State and prove Taylor's theorem for a real valued function of two real variables[1+4] **(2018.10)**

HINT: একই জিনিস আরেকবার। ■

28.2 Applications

আমরা এবার Taylor theorem-এর দুই ধরণের প্রয়োগ দেখব। প্রথম ক্ষেত্রে আমাদের কোনো function দিয়ে তার উপর Taylor theorem লাগাতে বলবে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Taylor theorem লাগানোর ফলে যা পাওয়া যায়, সেটা বলে দিয়ে আমাদের প্রমাণ করতে দেবে।

যখন কোনো function-এর উপর Taylor theorem লাগাতে হয়, তখন সরাসরি কাজটা করে ফেলাই ভালো। তবে কোনো কোনো ক্ষেত্রে একটা শর্টকাট পাওয়া যায়, যদিও সেই শর্টকাটটা নিলে পরীক্ষকমশাইরা চটে যেতে পারেন। এরকম একটা ক্ষেত্র হল যেখানে function-টা একটা polynomial. আন্দাজ করতে পারছ যে, সেক্ষেত্রে function-টা নিজেই নিজের Taylor polynomial around origin হবে। যদি অন্য কোনো point-এ করতে চাও, তবে origin-টাকে প্রথমে সেই point-এর এনে ফেলতে হবে। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 37: State Taylor's theorem for a function of two variables. Apply it to find the expansion of $f(x,y)=x^2y$ in a neighbourhood of $(1,-1)$.[2+3] **(2012.10)**

SOLUTION: এই অংকটা তিনভাবে করে দেখাচ্ছি। তিনটেই জানা থাকা ভালো, যখন যেটা সহজে হয়। প্রথমে সরাসরি theorem-টা লাগিয়ে করছি। আমাদের কাজ হল Taylor theorem-এর term-গুলো একে একে বার করা। প্রথম term-টা সবচেয়ে সহজ--

> Now $f(1,-1)=1^2\times(-1)=-1.$

বাকিগুলোর বেলায় আমাদেরকে প্রথমে differentiate করে, তারপর $(x,y)=(1,-1)$ বসাতে হবে।

> We take $(h,k)=(x,y)-(1,-1)$ and $D=h\partial_1+k\partial_2$.
> $Df(x,y)=(h\partial_1+k\partial_2)f=h(2xy)+k(x^2)$.
> So $(Df)(1,-1)=-2h+k$.

এবার তৃতীয় term-টা--

> Also, $D^2f(x,y)=(h^2\partial_1^2+2hk\partial_{12}+k^2\partial_2^2)f=h^2(2y)+2hk(2x)+k^2(0)$.
> So $(D^2f)(1,-1)=-2h^2+4hk$.
> Finally,
>
> $$\begin{aligned} D^3f(x,y) &= (h^3\partial_1^3+3h^2k\partial_1^2\partial_2+3hk^2\partial_1\partial_2^2+k^3\partial_2^3)f \\ &= h^3(0)+3h^2k(2)+3hk^2(0)+k^3(0)=6h^2k. \end{aligned}$$
>
> So $D^3f(1,-1)=6h^2k$. Clearly, $D^kf\equiv 0$ for $k\geq 4$. Hence the required expansion is
>
> $$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,-1)+(Df)(1,-1)+\tfrac{1}{2}(D^2f)(1,-1)+\tfrac{1}{6}(D^3f)(1,-1)+\tfrac{1}{24}(D^4f)(1,-1) \\ &= -1+(-2h+k)+\tfrac{1}{2}(-2h^2+4hk)+\tfrac{1}{6}(6h^2k) \\ &= -1+(-2h+k)+(-h^2+2hk)+h^2k. \end{aligned}$$

বিকল্প পদ্ধতি

এবার করব theorem-টা যেভাবে প্রমাণ করেছি, সেই কায়দায়--

Let $g(t) = f(1+th, -1+tk) = (1+th)^2(-1+tk) = -1+(k-2h)t+(2hk-h^2)t^2+h^2kt^3$.
The required Taylor expansion for $f(x,y)$ around $(1,-1)$ is the univariate Taylor expansion of $g(t)$ around $t=0$ at $t=1$.

$$\sum_i \frac{g^{(i)}(0)}{i!}.$$

Now $g(0) = -1$, $g'(0) = k-2h$, $g''(0) = 2(2hk-h^2)$, $g^{(3)}(0) = 6h^2k$, and $\forall i \geq 4 \quad g^{(i)} \equiv 0$.
So the answer is

$$-1 + (k-2h) + (2hk-h^2) + h^2k.$$

বিকল্প পদ্ধতি

এবার যে কায়দাটা দেখাব, সেটা খালি polynomial-দের বেলাতেই খাটে। এটা এতই শর্টকাট, যে পরীক্ষার খাতায় দেখলে মাষ্টারমশাইরা চটে যেতে পারেন। তাই এই কায়দাটা খালি উত্তরটা মিলিয়ে দেখার জন্য ব্যবহার করাই ভালো। তার জন্য $f(x,y)$-কে $h = x-1$ আর $k = y-(-1)$ দিয়ে লিখে ফেলতে হবে।

$$f(x,y) = x^2y = (1+h)^2(-1+k) = (1+2h+h^2)(-1+k) = -1-2h-h^2+k+2hk+h^2k.$$

এবার constant, linear, quadratic ইত্যাদি term-গুলোকে আলাদা আলাদা করে লিখতে হবে।

$$-1 + (-2h+k) + (-h^2+2hk) + (h^2k).$$

ব্যস্ এটাই উত্তর ছিল। এখানে যা করলাম, সেটা হল *origin*-টাকে $(0,0)$ থেকে $(1,-1)$-এ এনে ফেলা। এই পদ্ধতিতে কোনো differentiation-ই লাগল না! এই শর্টকাটটা যেকোনো polynomial-এর জন্যই খাটবে। তবে remainder বার করার ক্ষেত্রে এই কায়দাটা খুব উপযোগী নয়। ■

Exercise 43: Using Taylor's expansion of $f(x,y)$ about a point (a,b), express

$$f(x,y) = mx^2y + 3x - 2$$

as a polynomial in $(x-1)$ and $(y+2)$.[4] **(2009.8a)**
HINT:
আগের অংকের মতই। এখানে Taylor theorem লাগাতে হবে around $(1,-2)$. উত্তরটা এখানেও শর্টকাটে বার করে দেওয়া যায়। যদি $h = x-1$ এবং $k = y+2$ নিই, তবে $x = 1+h$ এবং $y = k-2$. সুতরাং--

$$\begin{aligned} f(x,y) &= mx^2y + 3x - 2 \\ &= m(1+h)^2(-2+k) + 3(1+h) - 2 \\ &= \cdots \\ &= (h^2km) + (2hkm - 2h^2m) + (-4hm + km) + (-2m + 3h) + 1 \end{aligned}$$

■

Exercise 44: Using Taylor's theorem express $x^2y+3y-2$ as a polynomial in $(x-1)$ and $(y+2)$. [5] **(2016.10)**

HINT: আগের অংকের মতই। ■

Example 38: Use Taylor's theorem to expand $x^4 + x^2y^2 - y^4$ about $(1, 1)$ up to terms of the second degree, and find the form of the remainder after two terms.[5] **(2017.10)**

SOLUTION: এই অংকটা একটু অন্যরকম, কারণ এখানে remainder বার করতে বলেছে। অংকটার ভাষায় সামান্য গোলমাল আছে বলে মনে হয়। একদিকে বলেছে "up to terms of the second degree" (তার মানে তিনটে term, কারণ zero degree থেকে শুরু), আবার বলেছে "remainder after two terms." অনুমান করছি যে, বলতে চেয়েছিল "remainder after the second degree term." আমরা সেইভাবেই সমাধান দিচ্ছি।
শুরুতেই আমাদের পরিচিত notation-গুলো লিখে নিই--

> Let $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - y^4$.
> Let $(h, k) = (x, y) - (1, 1)$.
> Let $D = h\partial_1 + k\partial_2$.

এইবার এই notation ব্যবহার করে Taylor theorem-টা লিখে নেব। প্রথমে অবশ্যই শর্তগুলো পরীক্ষা করতে হবে। এখানে অবশ্য পরীক্ষা সামান্যই, কারণ $f(x, y)$-কে যতবার খুশি differentiate করা যায়।

> Here $f(x, y)$ is differentiable infinitely often. So by Taylor theorem, we have
> $$f(x, y) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}(D^i f)(1, 1) + \frac{1}{(k+1)!}(D^{k+1} f)(1 + \theta h, 1 + \theta k)$$
> for some $\theta \in (0, 1)$.

এইবার term-গুলো একে একে বার করতে হবে। প্রথম term-টা সবচেয়ে সহজ--

> Now $f(1, 1) = 1^4 + 1^2 1^2 - 1^4 = 1$.

বাকিগুলোর বেলায় আমাদেরকে প্রথমে differentiate করে, তারপর $(x, y) = (1, 1)$ বসাতে হবে।

> Again, $Df(x, y) = (h\partial_1 + k\partial_2)f = h(4x^3 + 2xy^2) + k(2x^2y - 4y^3)$.
> So $(Df)(1, 1) = 6h - 2k$.

এবার তৃতীয় term-টা--

> Also, $D^2 f(x, y) = (h^2\partial_1^2 + 2hk\partial_{12} + k^2\partial_2^2)f = h^2(12x^2 + 2y^2) + 2hk(4xy) + k^2(2x^2 - 12y^2)$.
> So $(D^2 f)(1, 1) = 14h^2 + 8hk - 10k^2$.
> Hence the required expansion is
> $$p_2(x, y) = \frac{1}{0!} + \frac{6h - 2k}{1!} + \frac{14h^2 + 8hk - 10k^2}{2!} = 1 + 6h - 2k + 7h^2 + 4hk - 5k^2.$$

এই পর্যন্ত আগের অংকগুলোর মতই। ওখানে যেমন শর্টকাট দিয়ে উত্তর মেলানো যেত, এখানেও চাইলে তা করতে পারো।
এবার remainder term বার করার পালা। আবার সেই একইরকম কাজ--

Finally,

$$D^3 f = (h^3\partial_1^3 + 3h^2k\partial_1^2\partial_2 + 3hk^2\partial_1\partial_2^2 + k^3\partial_2^3)f$$
$$= h^3(24x) + 3h^2k(4y) + 3hk^2(4x) + k^3(-24y).$$

So the remainder term is

$$\frac{1}{6}(D^3 f)((1,1)+\theta(h,k)) = 4h^3(1+\theta h) + 2h^2k(1+\theta k) + 2hk^2(1+\theta h) - 4k^3(1+\theta k),$$

for some $\theta \in (0,1)$.

■

এতক্ষণ যেসব অংক করছিলাম, সেখানে function-গুলো সব polynomial থাকছিল। তাই শর্টকাটে মেলানোর সুবিধা ছিল। কিন্তু এবার কয়েকটা অংক দেখব, যেখানে function-গুলো মোটেই polynomial নয়, তাই differentiate করে এগোনো ছাড়া পথ নেই।

Example 39: Obtain Taylor's expansion of the function $\log_e\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]$, $(x>0, \quad y>0)$, about the point $(1,1)$ up to and including the terms of third degree.[5] **(2011.10a)**

SOLUTION:

আমরা অনেকক্ষণ Taylor theorem-টা সরাসরি ব্যবহার করে অংক করেছি। এবার একটু মুখ বদলানো যাক। সরাসরি theorem-টা ব্যবহার না করে ওর প্রমাণের কায়দাটা লাগানো যাক--

Let $g(t) = \log_e\left[\frac{1}{2}((1+tx)+(1+ty))\right]$.

আশা করি এটাকে $g(t) = f(a+th, b+tk)$ বলে চিনতে পেরেছ, যেখানে f হল প্রশ্নে দেওয়া function-টা এবং h,k-র জায়গায় আমরা x,y লিখেছি।

Then

$$g'(t) = \frac{x+y}{(t\cdot(x+y)+2)}.$$
$$g''(t) = -\left(\frac{x+y}{(t\cdot(x+y)+2)}\right)^2$$
$$g^{(3)}(t) = 2\left(\frac{x+y}{(t\cdot(x+y)+2)}\right)^3.$$

So the required Taylor expansion is the univariate Taylor expansion of $g(t)$ around $t=0$ at $t=1$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g^{(3)}(\theta)$$
$$= 0 + \frac{x+y}{2} - \frac{(x+y)^2}{8} + \frac{(x+y)^3}{3(\theta\cdot(x+y)+2)^3}.$$

for some $\theta \in (0,1)$.

■

একইরকম আরেকটা অংক তোমার করার জন্য।

Exercise 45: Expand $f(x,y) = \cos x \cos y$ near $(0,0)$ in Taylor's expansion in finite form up to terms of order four.[4] **(2003.9a)**

HINT: এখানে একটা অন্যরকমের শর্টকাট সম্ভব। হয়তো মনে আছে যে, $\cos(x)$-এর Taylor expansion হয় এইরকম--

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + - + \cdots .$$

একই জিনিস $\cos y$-এর জন্যও করে গুণ করে দিলেই পাবে--

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + - + \cdots)(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + - + \cdots) \\ &= 1 - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{24} + \text{higher order terms.}\end{aligned}$$

এখানে আমরা এমন কোনো term লিখিনি, যেখানে x আর y-এর power-এর যোগফল 4-এর বেশী হয়। অবশ্য এই শর্টকাট কায়দায় আমরা remainder term-টা পাব না। সেটা পেতে হলে লম্বা পথেই এগোতে হবে। এই শর্টকাটটা কাজে দেবে উত্তরটা মেলাতে। অবশ্য লম্বা পথটা খুব শক্ত নয়, কারণ $\cos x$-কে যতই differentiate করো, খালি $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ আর $\sin x$-ই ফিরে ফিরে আসবে।

■

এতক্ষণ যে অংকগুলো দেখলাম, সেখানে কোনো একটা function দিয়ে তার Taylor expansion বার করতে দিচ্ছিল। এবার একটু অন্য ধরণের অংক দেখব। এখানে function-টা বলে দেবে না, এমন কি Taylor expansion-এর উল্লেখও নাও থাকতে পারে। খালি Taylor expansion করার ফলে যে জিনিসটা পাওয়া যায়, সেটা লিখে দিয়ে প্রমাণ করতে বলবে। তোমার প্রথম কাজ হবে এটা বোঝা যে এখানে আদৌ Taylor expansion লাগাতে হবে। দ্বিতীয়তঃ function-টাকে চিনতে হবে। তৃতীয়তঃ কোন্ বিন্দুতে Taylor theorem লাগাতে হবে সেটা বুঝতে হবে, চতুর্থতঃ, Taylor expansion-এর order-টা বার করতে হবে, এবং সব মিলিয়ে Taylor theorem লাগিয়ে অংকটা শেষ করতে হবে।

Example 40: With proper justification show that

$$e^{ax}\sin by = by + abxy + \frac{1}{6}\exp(a\theta x)\big((a^3x^3 - 3ab^2xy^2)\sin b\theta y + (3a^2bx^2y - b^3y^3)\cos b\theta y\big)$$

for some $\theta \in (0,1)$.[1+3] **(2007.8b)**

SOLUTION:

বাঁদিকে একটা ছোট্টো জিনিস, আর ডানদিকে একটা মস্ত জিনিস, তার মধ্যে আবার $\theta \in (0,1)$-এর গল্প। এইটুকু থেকেই Taylor theorem-এর গন্ধ পাওয়া উচিত। কোন্ function-এর উপর Taylor theorem লাগাব? নিশ্চয়ই বাঁদিকের ছোট্টো জিনিসটার উপরে। অতএব--

Let $f(x,y) = e^{ax}\sin(by)$.

বুক ঠুকে এখনই লিখে দিলাম বটে, কিন্তু প্রথমে একটু রাফ করে বাজিয়ে দেখে নেওয়া ভালো। যদি এই $f(x,y)$-এর উপর Taylor theorem লাগাই তবে কী পাব, সেটা কি শক্ত শক্ত differentiation না করেই আভাস পাওয়া যায়? হ্যাঁ যায়। আমরা জানি

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \cdots$$

এবং

$$\sin(by) = by - \frac{(by)^3}{3!} + \frac{(by)^5}{5!} - + - + \cdots.$$

এই দুটোকে মনে মনে polynomial গুণ করার মত করে গুণ করলে প্রথম দুটো term যে by এবং $abxy$ আসবে বুঝতেই পারছ। যেটা প্রমাণ করতে দিয়েছে, সেখানেও এই দুটো দিয়েই শুরু। অতএব প্রাণে আশা জাগছে বৈ কি!
এবার আন্দাজ করতে হবে Taylor theorem-টা কোন্ point-এ লাগাব। তার হদিশ লুকোনো আছে ওই θ-ওয়ালা term-গুলোর মধ্যে। যদি তুমি কোনো (p,q) বিন্দুতে Taylor theorem লাগাও, তবে remainder-এ (p,q) থেকে (x,y)-এর মধ্যে কোনো বিন্দুর উল্লেখ থাকবে, মানে $(p+\theta(x-p), q+\theta(y-q))$. আমাদের অংকে আছে স্রেফ θx আর θy. সুতরাং p আর q নির্ঘাত দুজনেই 0. অতএব Taylor theorem লাগাতে হবে around $(0,0)$.
এর পরের প্রশ্ন--কত order অব্দি Taylor theorem লাগাব? যদি ওই remainder-টা (মানে θ-ওয়ালা বিচ্ছিরি জিনিসটা) বাদ দিই, তবে পড়ে থাকে $by + abxy$. এর মধ্যে প্রথমটার degree 1, এবং দ্বিতীয়টার 2. একটা zero degree-র term-ও থাকা উচিত ছিল না? বোধহয় ওটা শূন্য হয়ে গেছে। যাই হোক, মনে হচ্ছে degree 2 অব্দি গেলেই হবে।
এবার তাহলে Taylor theorem লাগানো শুরু করা যাক। প্রথমটা অবশ্য রাফে করাই ভালো।

> Here f is differentiable infinitely often.

অর্থাৎ যতবার খুশী differentiate করা যায়, তাই Taylor expansion করতে কোনো অসুবিধা নেই। আমাদের অবশ্য মোটে differentiate করতে পারলেই হল।

> We shall find the second order Taylor expansion of $f(x,y)$ around $(0,0)$.
> Let $D = h\partial_1 + k\partial_2$, where $h = x - 0$ and $k = y - 0$.

এইটা একটু অদ্ভুত লাগতে পারে। $h = x - 0$ তো x-ই হল। তবে আবার আলাদা করে h নামটার কী দরকার ছিল? আসলে আমরা এক্ষুণি $Df(x,y)$ বার করে তার মধ্যে $x = 0$, $y = 0$ বসাতে চলেছি। তখন এই h আর k কিন্তু variable-ই থাকবে, শূন্য হয়ে যাবে না।

> Now $f(0,0) = 0$.
> Also $Df(x,y) = ahe^{ax}\sin by + bke^{ax}\cos by$.
> So $(Df)(0,0) = bk$.

লক্ষ করো h আর k-র জায়গায় x আর y লিখলে এটা কিন্তু শূন্য হয়ে যেত! এবার $D^2 f$-এর পালা--

> $(D^2 f)(x,y) = (h^2\partial_1^2 + 2hk\partial_{12} + k^2\partial_2^2)f(x,y) = \cdots.$
> So $(D^2 f)(0,0) = 2abhk$.

এবার remainder-টা নিয়ে পড়া যাক--

> $(D^3 f)(x,y) = (h^3\partial_1^3 + 3h^2k\partial_1^2\partial_2 + 3hk^2\partial_1\partial_2^2 + k^3\partial_2^3)f(x,y) = \cdots.$

So using Taylor expansion

$$\begin{aligned} f(x,y) &= bk + \frac{2abhk}{2} + \\ &\quad \frac{1}{6}\left[h^3(a^3e^{a\theta x}\sin b\theta y) + 3h^2k(a^2be^{a\theta x}\cos b\theta y) + \right. \\ &\quad \left. 3hk^2(-ab^2e^{a\theta x}\sin b\theta y) + k^3(-b^3e^{a\theta x}\cos b\theta y)\right] \\ &= by + abxy + \frac{1}{6}e^{a\theta x}[(a^3x^3 - 3ab^2xy^2)\sin(b\theta y) + (3a^2bx^2y - b^3y^3)\cos(b\theta y)]. \end{aligned}$$

■

Exercise 46: Let $F(x,y) = \sin x\cos y$. Prove that there exists $\theta \in (0,1)$ for which

$$\tfrac{3}{4} = \tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi\theta}{3}\cos\tfrac{\pi\theta}{6} - \tfrac{\pi}{6}\sin\tfrac{\pi\theta}{3}\sin\tfrac{\pi\theta}{6}$$

holds.[5] **(2004.8aii)**
HINT:
লক্ষ করো, যেটা প্রমাণ করতে দিয়েছে, তার মধ্যে কোনো $F(x,y)$ নেই। তবে $F(x,y)$ দিল কেন? আসলে ওটা একটা hint. ওই $F(x,y)$-এর উপরে Taylor theorem লাগালেই প্রমাণটা হবে। এখানে $\frac{\pi\theta}{6}$ এবং $\frac{\pi\theta}{3}$ দেখে অনুমান করছি যে Taylor theorem লাগাতে হবে around (0,0). আর h এবং k-এর মধ্যে একজন হবে $\frac{\pi}{6}$, অন্যজন $\frac{\pi}{3}$. দ্যাখো এবার করতে পারো কিনা। ■

একই রকম আরো দুটো অংক।

Exercise 47: Using Maclaurin's theorem, prove that

$$\sin x\sin y = xy - \tfrac{1}{6}\{(x^3+3xy^2)\cos\theta x\sin\theta y + (y^3+3x^2y)\sin\theta x\cos\theta y\},$$

where $0<\theta<1$. **(2005.8b)** ■

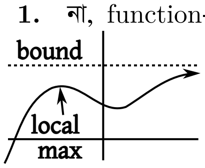
Exercise 48: Show that there exists θ with $0<\theta<1$ such that

$$\sin x\sin y = xy - \frac{1}{6}[(x^3+3xy^2)\cos\theta x\sin\theta y + (y^3+3x^2y)\sin\theta x\cos\theta y].$$

[5] **(2015.10)**
HINT: একেবারে আগের অংকটাই, সামান্য অন্য ভাষায়। ■

Answers

1. না, function-টা unbounded above হতে পারে। **2.** না, যেমন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-এর গ্রাফটা এরকম হতে পারে--



4. **(1)** সর্বত্রই $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(2)** সর্বত্রই $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **(3)** $-\sin(x+y)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

সুতরাং $(0,0)$-তে $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(4)** $\begin{bmatrix} 12x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, সুতরাং $(0,0)$-তে $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(5)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9900y^{98} \end{bmatrix}$, সুতরাং $(0,0)$-তে $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **5.** **(1)** $-x^2+8xy+3y^2$. **(2)** x^2+y^2. **(3)** $2xy$. **(4)** $x^2+3y^2+8xy-2xz+4yz$.
6. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. **7.** **(1)** PD. **(2)** ID. **(3)** PD. **(4)** ND. **(5)** কোনোটাই নয়।
8. **(1)** ID. **(2)** ID. **(3)** ID. **(4)** কোনোটাই নয়। **(5)** ND.
9.

> Here $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. At $(x,y) = (0,0)$ we have $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. So $(0,0)$ is a stationary point.
>
> Also, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ and $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$. So the Hessian matrix is
>
> $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
>
> which is an indefinite matrix. So $f(x,y)$ has a saddle point at $(0,0)$.

10. Saddle point, কারণ যেকোনো $x \neq 0$-এর জন্যই $h(x,0) > 0$ এবং যেকোনো $y \neq 0$-এর জন্যই $h(0,y) < 0$.
11.

> Here $\nabla f(x,y) = (3(x-y)^2, -2(2-x))$. So $\nabla f(2,2) = (0,0)$. Hence $(2,2)$ is a stationary point.
>
> Clearly, $f(2,2) = 0$.
>
> For any $y > 2$ we have $f(2,y) < 0$, and for any $y < 2$ we have $f(2,y) > 0$. So in every neighbourhood of $(2,2)$ the function $f(x,y)$ takes values $> f(2,2)$ and $< f(2,2)$.
>
> Hence we have a saddle point there.

12. (B). **13.** (A) আর (B) ঠিক, (C) আর (D) ভুল। **14.**

> Critical points: $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$ and $(-1,-2)$. Local maximum at $(-1,-2)$, local minimum at $(1,2)$. Saddle points at $(-1,2)$ and $(1,-2)$.

15. (D), কারণ $f(x,y) = (x-2y)^2 + 2x^4 + 3y^4$. তাই $f(x,y) \geq 0$. **16.** Feasible region-টা closed and bounded এবং target function-টা continuous. এ থেকে তো এটাও বলা যায় যে global minimum-ও থাকতে বাধ্য। তবে $x = 50$, $y = 50$-তে global minimum আছে বললাম না কেন? আসলে global maximum আর minimum দুইই আছে। Maximum-টা আছে মাঝখানে, আর minimum-টা আছে দুই প্রান্তে। কিন্তু আগের অংকে যখন আমরা unbounded feasible region নিয়েছিলাম, তখন global minimum-টা থাকছিল না।
17. max xyz subject to $xy + 2xz + 2yz = 300$. এতে Lagrange multiplier লাগালে পাবে $\frac{yz}{y+2z} = \frac{x+2z}{xz} = \frac{2x+2y}{xy}$. তা থেকে আসবে $x = y$ আর $z = \frac{x}{2}$. তাই $x = y = 10$ cm আর $z = 5$ cm নিতে হবে। সেক্ষেত্রে volume হবে 500 cm^3. এখানে constraint-এর Jacobian হল $\begin{bmatrix} 1+2z & 1+2z & 2x+2y \end{bmatrix}$, যার rank সর্বদাই 1, কারণ Jacobian-টাকে $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হতে হলে $x = y = 0$ এবং $z = -\frac{1}{2}$ হতে হয়, সেক্ষেত্রে মোট কার্ডবোর্ডের area-র শর্তটা মোটেই পালিত হয় না। এবার বাঁটুল-ষষ্ঠীচরণ করার জন্য লক্ষ করো $0 \leq x, y, z \leq 300$

নেওয়াই যথেষ্ট। কারণ $xy + 2xz + 2yz = 300$ হওয়ায় $xy \leq 300$ হবে, এবং $xz < 150$ হবে। তাই যদি ধরো $x > 300$ হয়, তবে $y < 1$ হবে, ফলে volume-টা $xyz < 150 \times 1 = 150$ হবে। সুতরাং 500-র কমই থাকছে। একইরকম সমস্যা হবে $y > 300$ বা $z > 300$ হলেও। **18.** যদি $b \leq 2$ হয়, তবে নিকটতম বিন্দু হবে $(0, 0)$, তাই minimum distance-টা হবে $|b|$. যদি $b > 2$ হয়, তবে নিকটতম বিন্দু হবে দুটো, $(\pm 2\sqrt{b-2}, b-2)$. এক্ষেত্রে minimum distance হবে $2\sqrt{b-1}$. **19.** সমাধানের বাকি অংশটুকু এইরকম--

> Then
>
> $$\frac{\partial L}{\partial x} = \cdots$$
> $$\frac{\partial L}{\partial y} = \cdots$$
>
> Solving $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ and $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ we get $\lambda = \frac{12(3x+y-9)}{x}$ and $\lambda = \frac{9(3x+y-9)}{y}$.
> Eliminating λ, we get
>
> $$\frac{12(3x+y-9)}{x} = \frac{9(3x+y-9)}{y}.$$
>
> Now $3x + y - 9 \neq 0$, since the line does not meet the ellipse. So we get $4y = 3x$.
> Putting this in the equation of the ellipse we get
>
> $$x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ and } y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

আমাদের জালে তার মানে দুটো মাছ পড়েছে। এবার global maximum আর minimum-এর গল্প। এখানে অবশ্য একটা সুবিধা আছে--

> Here the feasible region is closed and bounded.
>
> Since the target function, f, is continuous, hence it attains both global maximum and minimum.
> Now $f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 126 - 54\sqrt{5}$, and $f\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 54\sqrt{5} + 126$, so the farthest point is $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ and the nearest point is $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

21. $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ এবং $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$-তে area-টা minimum হবে। **23.**

$$
\begin{aligned}
F_x &= 2a^3x + \frac{\lambda}{x^2}, \\
F_y &= 2b^3y + \frac{\lambda}{y^2}, \\
F_z &= 2c^3z + \frac{\lambda}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Equating these to 0,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= -a\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}} \\
\frac{1}{y} &= -b\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}} \\
\frac{1}{z} &= -c\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}}.
\end{aligned}
$$

So from the constraint,

$$(a+b+c)\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}} = -1,$$

or

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}}} = a+b+c.$$

So the required answer is

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a+b+c}{a}, \\
y &= \frac{a+b+c}{b}, \\
z &= \frac{a+b+c}{c}.
\end{aligned}
$$

26. সমাধানের বাকি অংশ--

From $\frac{\partial L}{\partial r} = 0$ we see that $\mu \neq 0$.
Solving $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, we get

$$-2r^2\mu A\cos(2\theta+\phi)) = 0.$$

Now $\lambda \neq 0$ and also $r > 0$ on the ellipse.

Case I: $A = 0$: Here $a = c$ and $b = 0$. So the ellipse is a circle with radius $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Then the determinantal equation is $(a\lambda - 1)^2 = 0$, which is satisfied by

$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$, as required.

Case II: $A \neq 0$: Here $\cos(2\theta+\phi)=0$.

So $\sin(2\theta+\phi)=\pm 1$.

Then the extrema of r^2 are

$$\lambda_1 = \frac{1}{A+B} \text{ and } \lambda_2 = \frac{1}{-A+B}.$$

Then $\lambda_1+\lambda_2 = \frac{2B}{B^2-A^2}$ and $\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{B^2-A^2}$.

So

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) &= \lambda^2 - \frac{2B}{B^2-A^2}\lambda + \frac{1}{B^2-A^2}\\ &= \frac{1}{B^2-A^2}((B^2-A^2)\lambda^2 - 2B\lambda + 1)\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a\lambda-1 & b\lambda \\ b\lambda & c\lambda-1\end{vmatrix} &= (a\lambda-1)(c\lambda-1)-b^2\lambda^2\\ &= (ac-b^2)\lambda^2-(a+c)\lambda+1.\end{aligned}$$

Enough to show that $B^2-A^2 = ac-b^2$, which is obvious.

27. **(1)** $\frac{2}{\sqrt{13}}$. **(2)** $\frac{7}{\sqrt{5}}$. **28.** $(\sqrt{65}-2)^2$. **29.** Minimum= 2, maximum= 6.
30. Maximum= $2\sqrt{2}+2$ আর minimum= $2\sqrt{2}-2$. **31.** Circle দুটো পরস্পরকে ছেদ করে। তাই উত্তর হল 0.
32. দুজনেই একই circle-এর উপরে আছে, তাই উত্তর হবে diameter-টা। **33.** Minimum= 32 আর maximum= 52. **34.** $2\sqrt{3}$. **37.** $g(t)=\sin((1+2t)(2-t))$.
44. $-10-4(x-1)+4(y+2)-2(x-1)^2+2(x-1)(y+2)+(x-1)^2(y+2)$. **45.**

$$\begin{aligned}&1-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{24}+\\ &\quad -\cos(\theta x)\sin(\theta y)(y^5+5x^4y+10x^2y^3)-\sin(\theta x)\cos(\theta y)(x^5+5xy^4+10x^3y^2),\end{aligned}$$

যেখানে $\theta\in(0,1)$. **46.** এখানে $h=\frac{\pi}{3}$ এবং $k=\frac{\pi}{6}$ নিয়ে খালি একধাপ Taylor expansion করতে হবে।
47. এখানে remainder-টা হল $\frac{1}{3!}D^3 f(\theta x,\theta y)$, যেখানে $f(x,y)=\sin x\sin y$.

Chapter V
Multiple integral I

DAY 29
কী জিনিস?

আমরা হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে যখন calculus শিখেছিলাম, তখন দুটো জিনিস করতাম, differentiation এবং integration. এখানে multivariate calculus-এও একই ব্যাপার। এতক্ষণ আমরা differentiation-এর কথা শিখেছি, এবার integration-এর কথা শিখব। হায়ার সেকণ্ডারীতে আমরা দুরকম integration-এর কথা শিখেছি--

- indefinite, যেমন $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$, (যেখানে c হল arbitrary constant),
- আর definite, যেমন $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$.

Multivariate calculus-এ অবশ্য indefinite integration-এর কোনো ব্যাপার নেই। সবই definite integral. Definite integration বলতেই আমাদের মনে পড়ে একটা function-এর গ্রাফের নীচের area-র কথা (Fig 1), বা বলা ভালো signed area-র কথা (Fig 2)। এখানে multivariate calculus-এর ক্ষেত্রেও ব্যাপারটা একইরকম। এখানে আমরা কাজ করব $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ নিয়ে।

29.1 ছবি দিয়ে বোঝা

ছবি দিয়ে ভাবার সময়ে $n = 2$ নেব, যাতে গ্রাফটাকে একটা surface হিসেবে আঁকতে পারি (Fig 3)। ধরো xy-plane-এর উপরে Fig 4-এর মত করে একটা rectangle নিলাম S, যার side-গুলো axis দুটোর সঙ্গে parallel. সেই rectangle-টাকে মেঝে আর আর এই surface-টাকে ছাদ ধরে যে তাঁবুটা হয়, তার volume-টাকেই বলব S-এর উপর f-এর **double integral**. লেখার সময়ে লিখব

$$\iint_S f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Fig 1

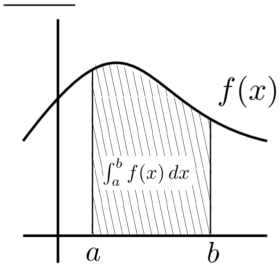


Fig 2

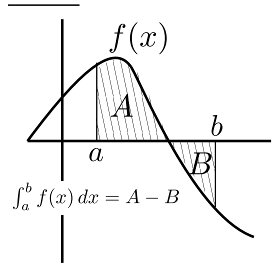


Fig 3

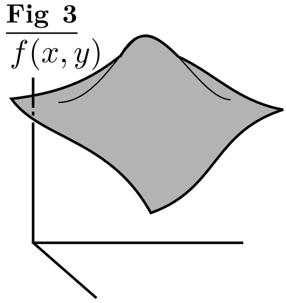
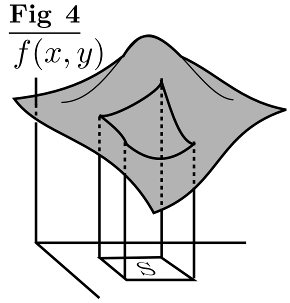


Fig 4



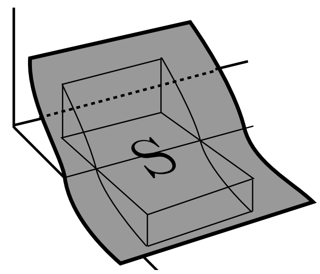


Fig 5

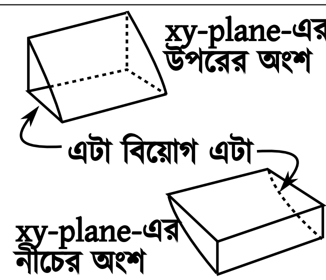


Fig 6

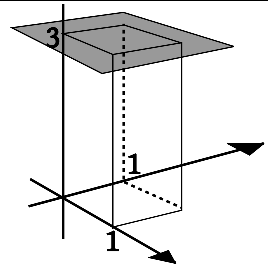


Fig 7

এখানেও অবশ্য volume না বলে signed volume বলা উচিত। কারণ surface-টা xy-plane-এর নীচে নেমে গেলে সেই সব অংশের volume-কে negative ধরা হয়। বোঝার জন্য Fig 5-এর কথাই ধরো। এখানেও xy-plane-এর উপরে একটা rectangle নিয়েছি, S. এই rectangle-এর উপরে surface-টা খানিকটা xy-plane-এর উপরে আর বাকিটা নীচে। সুতরাং এখানে $f(x, y)$-কে S-র উপরে integrate করলে যেটা আসবে সেটা হল Fig 6 এর মত, উপরের volume-টা বিয়োগ নীচের volume-টা।

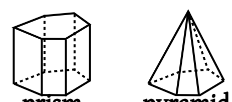
এই জ্যামিতিক বর্ণনার উপর নির্ভর করেই অনেক সময়ে multiple integral বার করে দেওয়া যায়, যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 1: $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ বার করো যেখানে $f(\mathbf{x}) \equiv 3$ এবং $S = [0, 1] \times [0, 1]$.

SOLUTION: এখানে তাঁবুটা স্রেফ একটা বাক্স (Fig 7)। বুঝতেই পারছ এর volume হবে $1 \times 1 \times 3 = 3$. সুতরাং $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 3$. ■

নীচের অংকগুলোও একই কায়দায় হবে। খালি তাঁবুটা কীরকম দেখতে হবে সেটা বোঝাটাই কাজ। প্রতিক্ষেত্রেই তাঁবুর চেহারাটা এমন কিছু হবে, যার volume বার করার কায়দা আমরা স্কুল থেকেই জানি। নেহাত যদি ভুলে গিয়ে থাকো, মনে করিয়ে দিই--

- একটা prism-এর volume হল base area × height.
- একটা pyramid-এর volume হল $\frac{1}{3}$×base area × height.



prism pyramid

Exercise 1: প্রতিক্ষেত্রে $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ বার করো--

1. $S = [1, 2] \times [0, 2]$ এবং $f(x, y) = 5$.
2. $S = [0, 1] \times [0, 1]$ এবং $f(x, y) = y$.
3. $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ এবং $f(x, y) = |x|$.
4. $S = [0, 1] \times [0, 1]$ এবং $f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{if } x + y \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

■

আমাদের আলোচনায় এতক্ষণ আমরা তাঁবুর মেঝেটা একটা rectangle নিচ্ছিলাম। কিন্তু শেষের অংকটা করে থাকলে দেখবে যে সেখানে S-টা একটা rectangle হলেও তাঁবুর মেঝেটা আসলে একটা ত্রিভুজ (কারণ তাঁবুর ছাদটা বাকি অংশে মাটিতে লুটিয়ে পড়েছে)। এই কায়দায় আমরা যেকোনো ধরণের মেঝেই পেতে পারি। যেমন ধরো একটা disc. সেক্ষেত্রে তাঁবুটা হত একটা cylinder-এর মত, যার ছাদটা হল আমাদের function-এর গ্রাফটা।

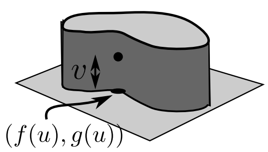


Fig 8

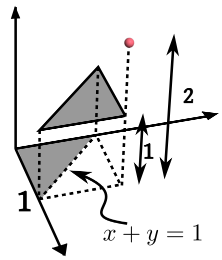


Fig 9

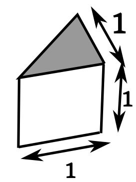


Fig 10

Example 2: $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ বার করো যেখানে $f(\mathbf{x}) \equiv 3$ এবং $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

SOLUTION: Cylinder-টার উচ্চতা 3 এবং radius হল 1. তাই volume হবে $3 \times \pi \times 1^2 = 3\pi$. ■

যদি মেঝেটা Fig 8-এর মত নিতাম, তবে দেওয়ালেও ঢেউ খেলত। এরকম বিভিন্নধরণের তাঁবুর volume (বা signed volume) বার করাই হল multivariate integration-এর মূল কথা।
কোনো double integral হাতে পাওয়া মাত্রই একবার চট্ করে তাঁবুর চেহারাটা ভেবে নেওয়া উচিত। যদি চেনা কিছু হয়ে যায়, তবে আর বেশী খাটতে হবে না। এমন সব বদখত দেখতে integral আছে, যাদের ফর্মুলা দেখলে কান্না পেতে পারে, কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে দিব্যি সহজ। এরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 3: Evaluate $\iint_E [x + y] dxdy$ where

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\},$$

and $[x + y]$ is the largest integer not exceeding $x + y$.[3] **(2011.1i)**
SOLUTION: এখানে আমাদের গ্রাফটা দেখতে Fig 9-এর মত।

> Here the integrand is
>
> $$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x + y < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \le x + y < 2 \\ 2 & \text{if } x = 1,\ y = 1 \end{cases}$$

সুতরাং আমাদের বার করতে হবে Fig 10-এর মত প্রিজ্ম্‌টার volume. সেটা একটা বাক্সের অর্ধেক। সুতরাং উত্তর হল $\frac{1}{2}$.
এটা অংকের ভাষায় লিখব এইভাবে--

> Let $E_1 = \{(x, y) \in E \ : \ 1 \le x + y < 2\}$.
> Then
>
> $$\iint_E f(x, y)\, dxdy = \iint_{E_1} f(x, y)\, dxdy = \iint_{E_1} 1\, dxdy = 1 \times \text{ area } (E_1) = \frac{1}{2}.$$

■

Exercise 2: The value of the integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |x + y|\, dxdy$$

(rounded off to 2 decimal places) is ... . **(JAM.2019.NAT49)**
HINT: এরকম absolute value-ওয়ালা কিছুকে integrate করতে হলে সাধারণতঃ positive আর negative অংশকে আলাদা করে নিলে সুবিধা হয়, মানে এইভাবে--

$$|x+y| = \begin{cases} x+y & \text{if } x+y \geq 0 \\ -(x+y) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

মনে রেখো $ax+by+c$ জাতীয় কোনো function-এর গ্রাফ হয় একটা plane. তাই এখানে গ্রাফটা দুটো plane দিয়ে তৈরী হবে, একটা $x+y$-এর জন্য, আর অন্যটা $-(x+y)$-এর জন্য। সব মিলিয়ে দেখতে কীরকম হবে, কল্পনা করার চেষ্টা করো। ■

Exercise 3: For a real number x, define $\lceil x \rceil$ to be the smallest integer greater than or equal to x. Then

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\lceil x \rceil + \lceil y \rceil + \lceil z \rceil)\, dxdydz = ...$$

(JAM.2017.NAT56)
HINT:
প্রথমেই লক্ষ করো, পুরো জিনিসটা x, y, z-এর সাপেক্ষে symmetric, মানে x, y আর z-এর মধ্যে স্থানবিনিময় করলেও integral-টা একই থাকবে। এ থেকেই বোঝা উচিত যে, উত্তরটা হবে $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \lceil x \rceil\, dxdydz$-এর তিন গুণ। (না বুঝলে, একটু চিন্তা করে দ্যাখো)। সুতরাং $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \lceil x \rceil\, dxdydz$ বার করলেই হবে। যেহেতু এখানে integrand-এর মধ্যে (মানে যেটাকে integrate করা হচ্ছে, তার মধ্যে) কোনো y বা z নেই, তাই এই জিনিসটা হয়ে যাচ্ছে স্রেফ $\int_0^1 \lceil x \rceil\, dx \times (1-0) \times (1-0) = \int_0^1 \lceil x \rceil\, dx$.
■

এই গেল ছবি দিয়ে বোঝা। এবার পুরো ব্যাপারটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করার চেষ্টা করব।

29.2 অংকের ভাষায় লেখা

হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা integral-এর বেলায় definite integration-এর সংজ্ঞা ছিল Riemann sum দিয়ে। সেটা একটু মনে করে নেওয়া যাক। আমরা শুরু করতাম কোনো একটা $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ নিয়ে। ধরে নিতাম f হল bounded. তারপর $[a, b]$-র একটা partition নিতাম, P, এইরকম--

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

এই partition-এ n-খানা interval আছে--

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad ..., \quad < [x_{n-1}, x_n].$$

Fig 11

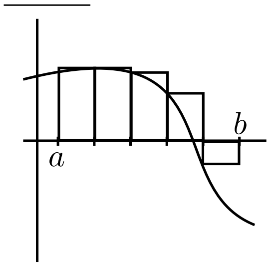
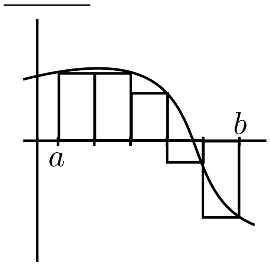


Fig 12



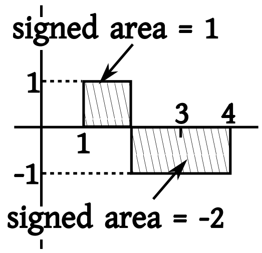


Fig 13

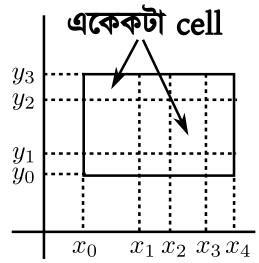


Fig 14

এর প্রতিটা interval-এর উপর দুটো করে rectangle খাড়া করতাম। একটার উচ্চতা এমন নিতাম, যাতে গ্রাফটাকে আলতো করে উপর থেকে ছুঁয়ে থাকে (Fig 11)। অন্যটা নিতাম যেন সেটা গ্রাফটাকে নীচ থেকে আলতো করে ছুঁয়ে থাকে (Fig 12)। অংকের ভাষায় বলতে গেলে প্রথম rectangle-টার উচ্চতা নিতাম--

$$M_i = \sup\left\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}.$$

আর নীচ থেকে ছুঁয়ে থাকা rectangle-টার উচ্চতা নিতাম--

$$m_i = \inf\left\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}.$$

এই sup আর inf নেবার জন্যই আমরা গোড়াতে f-কে bounded ধরে নিয়েছিলাম।
এইভাবে যে দুই দল rectangle পাওয়া গেল, তাদের signed area-গুলো যোগ করব। এখানে signed area কাকে বলে তো জানোই (Fig 13)।
উপর থেকে ছুঁয়ে থাকা rectangle-দের বেলায় যোগফলটাকে বলে ওই partition-এর জন্য function-টার **upper Riemann sum** আর লেখে $U(P, f)$. আর অন্য যোগফলটাকে বলে **lower Riemann sum** বা $L(P, f)$.
যদি P বদলাই তবে $U(P, f)$ আর $L(P, f)$-ও বদলে যেতে পারে। কিন্তু বোঝাই যাচ্ছে যে $U(P, f)$ কখনোই $L(P, f)$-র নীচে নেমে যেতে পারে না। আমরা দেখব বিভিন্ন P-এর জন্য $U(P, f)$ কত নামতে পারে, মানে $\inf_P U(P, f)$ কত হয়। একইভাবে আমরা দেখি $L(P, f)$-ই বা কত উঠতে পারে, মানে $\sup_P L(P, f)$ কত হয়। যদি এরা দুজনই সমান হয়, মানে

$$\sup_P L(P, f) = \inf_P U(P, f)$$

হয়, তবে এই সংখ্যাটাকেই আমরা বলি $\int_a^b f(x)\,dx$. আর যদি sup আর inf-টা সমান না হয়, তবে বলি যে f এই $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable নয়।
এই ছিল real analysis থেকে Riemann integration-এর স্মৃতিচারণ। এবার আমরা একই কাজ করব multivariate-এর বেলাতে। নীচের সংজ্ঞাটা পড়ার সময়ে Fig 14-এ চোখ রেখো।

DEFINITION: **Partition (for $\mathbb{R}^2$)**

Let $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Let P_1 be any partition of $[a_1, b_1]$:

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1,$$

and let P_2 be any partition of $[a_2, b_2]$:

$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2.$$

Then we call the pair (P_1, P_2) a **partition** of $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.
Also, each rectangle of the form $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ is called a **cell** in (P_1, P_2).

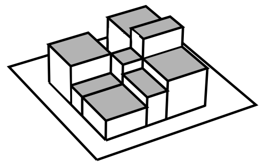


Fig 15

এবার আমরা প্রতিটা cell-এর উপরে একটা করে বাড়ি তুলব। বাড়ি মানে একেকটা ব্লকের মত। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 15-এ। এখানে x আর y দুদিকের partition-এই তিনটে করে ভাগ, ফলে মোট cell-এর সংখ্যা 9. আমরা বাড়িগুলো তুলব দুইভাবে--এক, যাতে বাড়িগুলো ছাদ আলতো করে function-এর গ্রাফটাকে নীচের দিক থেকে স্পর্শ করে, আর দুই, যাতে উপর থেকে স্পর্শ করে। সেটাই বলা হয়েছে নীচের সংজ্ঞায়।

DEFINITION: Lower and upper sums (for $\mathbb{R}^2$)

Let $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let $P = (P_1, P_2)$ be any partition of $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Let the cells of P be $c_1, ..., c_N$. Let

$$\begin{aligned} m_j &= \inf\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in c_j\} \\ M_j &= \sup\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in c_j\}. \end{aligned}$$

The **lower sum** of f over P. is defined as

$$L(P, f) = \sum_j m_j \cdot \text{area}(c_j).$$

Similarly, we define the **upper sum** of f over P as

$$U(P, f) = \sum_j M_j \cdot \text{area}(c_j).$$

আগের মতই এদের দুজনকে মিলিয়ে আমরা Riemann integration-এর সংজ্ঞা বানাব।

DEFINITION: (Riemann) integrable (for $\mathbb{R}^2$)

Let $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let $P = (P_1, P_2)$ be any partition of $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. We call f (Riemann) **integrable** over $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ if

$$\inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f),$$

where the inf and sup are taken over all partitions P of $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

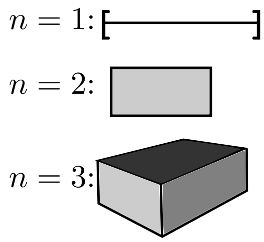


Fig 16

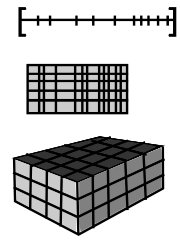


Fig 17

যা যা বললাম সে সব নিয়ে একটা ভিডিও বানিয়েছি। সেটা দেখতে পাশের QR code-টা মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করো, বা নীচের address-টা কোনো browser-এ টাইপ করো। এভাবে যদি ভিডিওটাতে পৌঁছতে না পারো, তবে আমাকে Whatsapp করে জানিও। নম্বর দেওয়া আছে এই বইয়ের ভূমিকায়।
`https://arnabc74.github.io/mult/riem.html`

এতক্ষণ আমরা $\mathbb{R}^2$ নিয়ে আলোচনা করছিলাম। একইভাবে আমরা $\mathbb{R}^n$ নিয়েও আলোচনা করতে পারি। এর জন্য প্রথমে একটা bounded function নিয়ে শুরু করব, $f : E \to \mathbb{R}$, যেখানে E হল $\mathbb{R}^n$-এর মধ্যে এরকম একটা বাক্স--

$$E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

যদি $n = 1$ হয়, তবে "বাক্স"-টা দেখতে একটা লাইনের মত হবে, $n = 2$ হলে rectangle-এর মত, এবং $n = 3$ হলে সত্যিই একটা বাক্সের মত দেখাবে (Fig 16)। যদি $n \geq 4$ হয়, তখন আর ছবি দিয়ে কল্পনা করা যাবে না। এবার প্রতিটা পাশকে partition করতে হবে, ফলে বাক্সটা অনেকগুলো ছোটো ছোটো বাক্সে ভেঙে যাবে। Fig 17-এ $n = 1, 2, 3$-এর জন্য এই ব্যাপারটা দেখিয়েছি। ধরো b হল এরকম একটা কোনো ছোটো বাক্স, যার volume হল তার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের গুণফল, যাকে আমরা লিখব $\mathrm{vol}(b)$. সেই বাক্সের উপর f-এর inf এবং sup থাকবে, এদের যথাক্রমে $M(b)$ এবং $m(b)$ নাম দিলাম। তবে আমরা এই দুটো sum নিয়ে কাজ করব--

$$\sum_b M(b) \times \mathrm{vol}(b) \text{ এবং } \sum_b m(b) \times \mathrm{vol}(b).$$

দুটো sum-ই হল যাবতীয় ছোটো ছোটো বাক্সের উপরে। তার মানে যেকোনো partition-এর জন্যই তুমি দুটো সংখ্যা পাচ্ছ। প্রথম সংখ্যাটাকে যথারীতি বলব **upper sum** আর দ্বিতীয়টাকে বলব **lower sum**. যত রকম partition সম্ভব, তাদের সবার জন্যই একটা করে upper sum পাবে। এদের set-এর infimum-টা নাও, একে বলব **upper integral**. একইভাবে যাবতীয় lower sum-এর set-এর supremum-টাকে বলব **lower integral**. এটা দেখা কঠিন নয় যে upper integral-টা সর্বদা $\geq$ lower integral হতে বাধ্য। যদি সমান হয়, তবে f-কে বলব E-এর উপরে (Riemann) integrable, এবং upper integral=lower integral-টাকেই বলব E-এর উপরে f-এর integral. লেখার সময়ে লিখব--

$$\int \cdots \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

$\mathbb{R}^2$-এর বেলায় লোকে যেমন $\iint$ লেখে, তেমনি $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় লেখে $\iiint$. এখানে n জানা নেই বলে ডট্ ডট্ ব্যবহার করেছি।

দুঃখের কথা, আমাদের notation-টা পুরো standard নয়। অনেক সময়েই লোকে double integral-কে লেখে এইভাবে--

$$\iint_S f(x, y)\, dx dy,$$

এইভাবে লেখার দুটো সমস্যা--

- প্রথম সমস্যা, কোনটা আগে লিখব, dx নাকি dy? বুঝতেই পারছ, যেটাই আগে লিখি না কেন, মানে একই থাকা উচিত। কিন্তু সেখানেই বাঁধে দ্বিতীয় সমস্যাটা।
- দ্বিতীয় সমস্যা, আমরা কালকেই আরেক ধরণের integration শিখব, যাকে বলে **repeated integral**. সেখানেও $dxdy$ লেখার প্রয়োজন হবে, এবং সেখানে কিন্তু কে আগে কে পরে, সেটা গুরুত্বপূর্ণ। এই কারণে যারা double integral-এর বেলায় $dx\,dy$ লেখে, তাদেরকে সাবধান থাকতে হবে যেন সেটা repeated integral-এর সঙ্গে গুলিয়ে না যায়।

29.3 খানিকটা generalisation

আমরা এতক্ষণ খালি সেই সব function নিয়েই কাজ করেছি, যাদের domain হল একটা বাক্স, এবং function-টা bounded. এই শর্তগুলো খানিকটা শিথিল করা সম্ভব। সেটাই আলোচনা করব এবার।

29.3.1 তাঁবু যখন নেমে আসে

প্রথমে বলি domain-টা একটা বাক্স না হলে কী হয়। $\mathbb{R}^2$-র বেলায় আমরা তাঁবুর উদাহরণ দিয়ে বোঝাচ্ছিলাম। চট্ করে দেখলে মনে হতে পারে যে আমাদের সংজ্ঞাটা খালি সেই সব তাঁবুর জন্যই খাটে, যাদের মেঝেটা rectangle. আসলে কিন্তু তা নয়, যদি অন্য কোনো আকারের মেঝেও নাও, সেক্ষেত্রেও এই একই সংজ্ঞা ব্যবহার করা যাবে। সেটা একটু গল্প করে বোঝা যাক। আমরা যখন ট্রেক করতে যাই, প্রায়ই তাঁবু করে রাত কাটাতে হয়। তাঁবুর মেঝের জন্য চমৎকার একটা প্লাস্টিকের rectangle পাতা হয়। তার উপরে ছাদটাকে ছাদের জায়গায় রাখার জন্য বিস্তর ডাণ্ডালাঠি থাকে। দুর্ভাগ্যবশতঃ মাঝেসাঝে ডাণ্ডালাঠির বিভ্রাটে ছাদের খানিকটা মেঝেতে লুটিয়ে পড়ে। ছাদের এরকম ছন্দপতনের একটা নমুনা রয়েছে Fig 18-এ। তখন বাধ্য হয়েই আমাদের মেঝেটা একটা ত্যাড়া-ব্যাঁকা কিছু হয়ে দাঁড়ায়। অবশ্য আমরা মানসিক সান্ত্বনা পাবার জন্য এমন ভাবতেই পারি যে, আমাদের তাঁবুর মেঝে rectangle-ই আছে, খালি ছাদটা বাহারী রকমের, যার খানিকটা মেঝের সঙ্গে লেপ্টে থাকে, ওটাই লেটেস্ট ডিজাইন!

এটাকেই এবার অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখব। যেমন ধরো, যদি তাঁবুর মেঝে নিতাম $E = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, তবে $\iint_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$-এর সংজ্ঞা দেব এইভাবে--

> প্রথমে E-কে একটা rectangle-এর মধ্যে পুরে দাও। অনেকভাবেই করা যায়। একটা পথ দেখিয়েছি Fig 19-এ। যেকোনো একভাবে করলেই হল। Rectangle-টার নাম দিয়েছি R. এর মধ্যে E-ও আছে, আবার E-র বাইরেও খানিকটা অঞ্চল আছে। আমাদের দরকার খালি E-টুকু। তাই আমরা integrand-টা নেব--
>
> $$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{x} \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$
>
> তাহলে g-এর domain হল একটা rectangle. তাই $\iint_R g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$-এর সংজ্ঞা দিতে অসুবিধা নেই। এবার আমরা $\iint_R g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$-কেই আমরা $\iint_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$-এর সংজ্ঞা হিসেবে নেব, কারণ f-এর বাইরে g-এর যেটুকু, সেটুকু তো শূন্য!

Fig 18

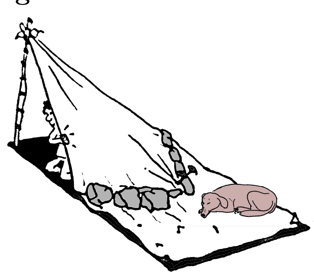
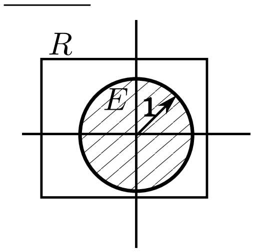


Fig 19



এবার আরেক ধরণের generalisation দেখব, যেখানে domain-টা হবে unbounded, ফলে কোনোভাবেই domain-টাকে একটা বাক্সের মধ্যে পুরে ফেলা যাবে না। তারপর শিখব সেইসব ক্ষেত্রের কথা যেখানে f-টা নিজেই unbounded. এই দুটো ক্ষেত্র নিয়ে আমাদের পরবর্তী আলোচনা।

29.3.2 Improper integral

এতক্ষণ আমরা দুটো জিনিস ধরে কাজ করছিলাম--

- এক, integration করা হচ্ছে যে অঞ্চলের উপর, সেটা bounded.
- দুই, সেই অঞ্চলের উপরে function-টাও bounded. সেই কারণেই আমরা নিশ্চিন্তে sup, inf নিয়ে কাজ করতে পারছিলাম।

যদি এই দুটো শর্ত না খাটে, তখনও কিন্তু Riemann-এর কায়দাটা খাটানোর চেষ্টা করা যায়। এ নিয়ে দুই গণিতজ্ঞ বিশেষভাবে মাথা ঘামিয়েছিলেন। যদি প্রথম শর্তটা পালিত না হয়, তবে কী করা যেতে পারে, তার কায়দা বলেছিলেন Jordan নামের একজন গণিতজ্ঞ, আর দ্বিতীয় শর্তটা পালিত না হলে কী করণীয়, সেটার হদিশ দিয়েছিলেন Vallee-Poussin (ভ্যালে পুইসঁ) নামের আরেকজন গণিতজ্ঞ। Jordan-এর পরামর্শ ছিল এইরকম--

> ধরো, তোমাকে S অঞ্চলের উপর f-কে integrate করতে দিয়েছে, যেখানে S হল unbounded, কিন্তু f এখনও bounded. তবে আমরা তাকে কিছু bounded set দিয়ে approximate করতে পারি, মানে এমন কিছু bounded set নিতে পারি $S_1, S_2, \ldots$, যাতে $S_n \to S$ হয়। এবার আমরা প্রথমে $\iint_{S_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ বার করে নেব (তাতে অসুবিধা নেই, কারণ S_n-রা সবাই bounded)। তারপর $\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ নিয়ে দেখব সেটা exist করে কিনা। যদি করে, তবে সেটাকেই $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ নেওয়ার কথা ভাবা যেতে পারে। আর যদি limit-টা exist না করে, তবে বলে দেব যে $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$-ও exist করে না। অবশ্য এর মধ্যে বিস্তর খুঁটিনাটি আছে, যেগুলো বাদ দিয়ে গেলাম। যেমন S_n-গুলো বিভিন্নভাবে নেওয়া যেতে পারে, এবং তাদের জন্য limit গুলোও আলাদা আলাদা আসতে পারে, সেক্ষেত্রেও বলব $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$-টা exist করে না। যাই হোক, সেই আলোচনা এ বইয়ের পাল্লার বাইরে।

এবার বলি অন্য সমস্যাটার কথা। আমাদের বার করতে বলেছে $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, যেখানে S-টা bounded, কিন্তু f হল unbounded. এক্ষেত্রে Vallee-Poussin-এর সমাধানটা হল--

> f-এর উপরে একটা ছাদ আর নীচে একটা মেঝে লাগিয়ে ওকে জোর করে bounded করে দাও, মানে ছাদটাকে M আর মেঝেটাকে m বললে আমরা এই নতুন function-টা নিচ্ছি--
>
> $$f_{m,M}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{if } m \le f(\mathbf{x}) \le M \\ m & \text{if } f(\mathbf{x}) < m \\ M & \text{if } f(\mathbf{x}) > M \end{cases} .$$
>
> এবার $\iint_S f_{m,M}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ বার করো, এবং তারপর মেঝেটাকে নামাতে থাকো আর ছাদটাকে তুলতে থাকো, মানে এই limit-টা নাও--
>
> $$\lim_{m\to-\infty, M\to\infty} \iint_S f_{m,M}.$$
>
> যদি limit-টা exist করে, তবে সেই limit-টাকেই বলব $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, আর যদি exist না করে, তবে বলব যে $\iint_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$-ও exist করে না।

Jordan-এর কায়দাটা এই বইতে আর কোথাও কাজে লাগবে না বটে, কিন্তু Vallee Poussin-এর কায়দাটা মাঝে মাঝেই উঁকি দেবে।

Example 4: Let p and t be positive real numbers. Let D_t be the closed disc of radius t

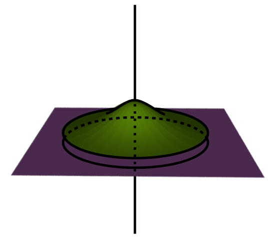


Fig 20

centred at $(0,0)$, *i.e.*, $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le t^2\}$. Define

$$I(p,t) = \iint_{D_t} \frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}.$$

Then $\lim_{t\to\infty} I(p,t)$ is finite

(A) only if $p > 1$

(B) only if $p = 1$

(C) only if $p < 1$

(D) for no value of p

(JAM.2021.MCQ5)
SOLUTION: অংকটা দেখতে বেশ কঠিন, কিন্তু ছবি দিয়ে চিন্তা করলেই হয়ে যাবে, কাগজে কলম ছোঁয়াতেই হবে না! প্রথমে অনুভব করো যে, integrand-এর গ্রাফটা দেখতে Fig 20-র মত। কেন? কারণ ওর মধ্যে x, y রয়েছে x^2+y^2 আকারে, তাই ওই গোলাকার ছাতার মত চেহারাটা হয়েছে। যতই origin থেকে দূরে যাবে, ততই ওই x^2+y^2-টা ∞-র দিকে যাবে, ফলে গ্রাফটা xy-plane-এর উপর লুটিয়ে পড়বে। নীচের তলায় p-টা আছে power-এ। তাই p যত বাড়বে, এই লুটিয়ে পড়াটা ততই তাড়াতাড়ি হবে।
লক্ষ করো limit-টা finite হবার জন্য ছাতাটা মাটির গায় নেমে আসতে হবে। সুতরাং কোনো p-এর জন্য হলে তার চেয়ে বড় p-এর জন্যও হতে বাধ্য। বোঝাই যাচ্ছে যে যথেষ্ট বড় p-এর জন্য হবেই। তাই (A). যদি এই সমাধানে তোমার মন না ভরে, তবে খানিক সবুর করো। পরের অধ্যায়ে যখন আমরা polar coordinates দিয়ে substitution শিখব, তখন এই অংকটা গায়ের জোরেও করতে পারবে। ■

29.4 একটা সাবধানবাণী

আমরা যেভাবে multiple integration-এর সংজ্ঞা দিলাম, সেটা পুরোটাই real analysis-এর Riemann integration থেকে (যাকে single integration বলা যেতে পারে), সেখান থেকে টোকা। সুতরাং মনে হতে পারে যে, এখান থেকে ফের উল্টো পথে single integration-এ ফেরা যাবে। কিন্তু সেখানে একটা ছোটো সমস্যা বাঁধবে। যখন আমরা single integration করতাম, তখন

$$\int_1^2 f(x)\,dx \text{ এবং } \int_2^1 f(x)\,dx$$

ছিল আলাদা জিনিস (বস্তুতঃ ওরা পরস্পরের negative ছিল)। কিন্তু multivariate integral-এর বেলায় যে অঞ্চলের উপর integration করছি, সেটা এভাবে ওল্টানো যায় না। তাই আমরা multiple integration-এর কায়দায় যদি $\int_{[0,1]} f(x)\,dx$ লিখি, তবে সেটা বোঝাবে কেবল $\int_0^1 f(x)\,dx$. কিন্তু $\int_1^0 f(x)\,dx$-কে এইভাবে প্রকাশ করা যাবে না।

DAY 30
Repeated integral (part 1)

আমরা গতকাল double integral এবং multiple integral-এর কথা শিখেছি। একটা double integral-কে কী করে একটা তাঁবুর signed volume বলে কল্পনা করা যায়, তাও বলেছি। যদি তাঁবুর চেহারাটা সহজ কিছু হয়, তবে হয়তো এই signed volume-টা ছবি দেখেই বলে দেওয়া যাবে। কিন্তু তা যদি না হয়, তবে? আর যদি variable-এর সংখ্যা 3 বা তার বেশী হয়, সেক্ষেত্রেও তো এভাবে ছবি দিয়ে কল্পনা করা যাবে না। সেক্ষেত্রেই বা কী করব? হায়ার সেকণ্ডারীতে যখন single integral-দের কথা শিখেছিলাম, তখন তাদের বার করার নানারকম কায়দাও শিখেছিলাম, যেমন integration by parts ইত্যাদি। কোনোভাবে যদি একটা multiple integral-কে কিছু single integral-এ ভেঙে লেখা যেত, তবে সেই সব কায়দাগুলো এখানেও লাগানো যেত। এরকম ভেঙে লেখার কায়দা সত্যিই আছে। সেটাই আমাদের আজকের আলোচ্য বিষয়।

30.1 মূল ধারণা

খুব সহজ একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি। এতই সহজ যে এর মধ্যে কোনো integration-ই নেই। ধরো তিন বন্ধু একসাথে বেড়াতে গেছে। তাদের খরচের হিসেব একটা টেবিলের আকারে দিলাম--

	জোনাকি	হিয়া	দেবস্মিতা
থাকা	2000	2000	2000
খাওয়া	344	540	430
গাড়ী	230	225	240
টিকিট	1700	1723	1700

ওরা হিসেব করতে চায় মোট খরচ কত হয়েছে। কাজটা তিনভাবে করা যায়--

- এক, টেবিলে যে বারোটা সংখ্যা রয়েছে, তাদের এক সঙ্গে যোগ করা। অর্থাৎ টেবিলটা যে 4×3 আকারের, সে কথাটা সম্পূর্ণ অগ্রাহ্য করে, বারোটা সংখ্যাকে একটার নীচে একটা লিখে এক ধাক্কায় সবগুলো যোগ করে দেওয়া। এতে পাবে 13132 টাকা।

- দুই, প্রত্যেকের কত করে খরচা হয়েছে, সেটা প্রথমে আলাদা করে হিসেব করে নিয়ে, সেই তিনটে মোট খরচাকে যোগ করা।

	জোনাকি	হিয়া	দেবস্মিতা
মোট	4274	4488	4370

  অর্থাৎ এখানে আমরা column-গুলোর মোট বার করছি প্রথমে, তারপর সেগুলোকে যোগ করছি। এতেও অবশ্যই সেই একই উত্তর আসবে, $4274+4488+4370=13132$.

- তিন, আমরা চাইলে প্রথমে বিভিন্ন খাতে মোট কত কত খরচা হয়েছে, সেগুলো বার করে নিতে পারি (মানে row-গুলোর মোট বার করে নিচ্ছি)।

	মোট
থাকা	6000
খাওয়া	1314
গাড়ী	695
টিকিট	5123

  তারপর সেই মোটগুলোকে যোগ করে দিলেই পেয়ে যাবে $6000+1314+695+5123=13132$.

যেভাবেই করি না কেন উত্তর একই আসছে। প্রথম কায়দাটাতে খালি একটাই ধাপ করতে হল, কিন্তু সেটা বেশ লম্বা একটা ধাপ। পরের দুটো পদ্ধতিতে সেই লম্বা ধাপটাকে দুটো ধাপে ভেঙে নিলাম। এদেরকে এবার অংকের ভাষায় লিখব। তার জন্য আমরা টেবিলটার i-th row এবং j-th column-এর সংখ্যাটাকে a_{ij} নাম দেব। যেমন $a_{1,1} = 2000$ এবং $a_{2,3} = 430$.

- পুরো টেবিলের সবগুলো সংখ্যাকে এক ধাক্কায় যোগ করাকে লিখতে পারি

$$\sum_{\text{table}}\sum a_{ij}.$$

  একে বলব একটা double sum.

- প্রথমে column, তারপর row-এর উপর যোগ করলে লিখব

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right].$$

  একে বলতে পারি একটা repeated sum.

- প্রথমে row, তারপর column-এর উপর যোগ করলে লিখব

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\right].$$

  এটা হল আরেক ধরণের repeated sum.

একইভাবে আমরা অনেক সময়ে একটা double integral-কেও দুইভাবে repeated integral-এ পরিণত করতে পারি। "অনেক সময়ে" বললাম শুনেই বুঝতে পারছ যে, কোথাও একটা সমস্যার সম্ভাবনা আছে। সেই সমস্যার একটু স্বাদ দিই। এখনো আমরা টেবিলের উদাহরণ নিয়েই কাজ করব। কিন্তু এবার টেবিলটাতে অসংখ্য row এবং column থাকবে--

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{bmatrix}$$

আশা করি প্যাটার্নটা বুঝতে পারছ, যদি i-th row এবং j-th column-এর সংখ্যাটাকে আবার a_{ij} বলি, তবে a_{ii}-রা সবাই 1, এবং $a_{i,i+1}$-রা সবাই -1. বাকিরা সকলেই 0. এবার দেখি এখানে repeated sum দুটো কী হয়, আর double sum-টাই বা কী হয়।

- যদি প্রথমে row-গুলোর মোট বার করি, তবে সব ক্ষেত্রেই 0 পাবে, কারণ প্রতিটা row-তেই একটা 1 আর একটা -1 আছে, বাকিরা 0. অর্থাৎ--

$$R_i = \sum_j a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

  এদেরকে যদি যোগ করি তবে পাবে $\sum_i R_i = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$. এইটা হল এক ধরণের repeated sum,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right] = 0.$$

- কিন্তু যদি প্রথমে column-এর মোট বার করতাম? তবে প্রথম column-টার বেলায় মোট হত 1, কিন্তু বাকিদের সকলের বেলাতেই পেতে 0. অর্থাৎ--

$$C_j = \sum_i a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1 \\ 0 & \text{if } j \geq 2 \end{cases} .$$

এবার এদেরকে যোগ করলে পাবে $\sum_j C_j = 1$. সুতরাং অন্য repeated sum-টা আলাদা উত্তর দিচ্ছে--

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right] = 1.$$

- এবার double sum-টা করা যাক। তার জন্য সবগুলো সংখ্যাকে একটার পর একটা লিখে এক ধাক্কায় সব যোগ করে ফেলতে হবে। যদি এইভাবে লিখি--

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - + - \cdots ,$$

তবে এই infinite series-এর partial sum-গুলো হবে

$$1, 0, 1, 0, 1, \cdots .$$

এরা কোথাও converge-ই করছে না। যদি আরেকভাবে লিখতাম, যেমন ধরো এইভাবে

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + + - + + - \cdots$$

(মানে[1] প্রতি দুটো +1-এর পরে একটা করে -1), তবে যোগফলটা হত ∞. যেহেতু কার পরে কাকে লেখা উচিত সে বিষয়ে double sum কিছু বলছে না, তাই আমরা বলব যে এখানে double sum-টা exist-ই করে না।

সুতরাং সমস্যাটা বুঝতে পারছ। Integral-এর বেলাতেও একইরকম গল্প হবে। কোনো double integral-কে অনেকসময়েই দুভাবে repeated integral হিসেবে লেখা যাবে বটে, কিন্তু কখনো-সখনো দুটো repeated integral আলাদা উত্তর দেবে, এবং তখন দেখা যাবে double integral-টা exist-ই করে না। এই হল গিয়ে পুরো গল্পটার সংক্ষিপ্তসার। এবার খুঁটিনাটিগুলো দেখা যাক।

30.2 খুঁটিনাটি

Example 5: আমাদের $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ বার করতে হবে। এই উদাহরণে আমরা double integral নিয়ে কাজ করব, মানে $\mathbf{x}$-এর মধ্যে দুটো জিনিস আছে, x আর y, অর্থাৎ $\mathbf{x} = (x, y)$. আমরা f নেব এইরকম, $f(\mathbf{x}) \equiv f(x, y) = x$ এবং $S = [0, 2] \times [0, 1]$.

SOLUTION: Fig 21 দেখে double integral-টা জ্যামিতি দিয়েই করে ফেলা যায়। এটা একটা বাক্সের volume-এর অর্ধেক, মানে $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2 = 2$.

এবার আমরা একই উত্তরে পৌঁছবার চেষ্টা করব দুটো single integral-এ ভেঙে। আমরা প্রথমে x-এর সাপেক্ষে integrate করব, তারপরে y-এর সাপেক্ষে। এখানে x যাচ্ছে 0 থেকে 2 পর্যন্ত। তাই প্রথমে আমরা বার করব

$$\int_0^2 f(x, y) dx = \int_0^2 x\, dx = \cdots = 2.$$

[1] এভাবে লেখাই যায় কারণ অসংখ্য +1 আর -1 আছে!

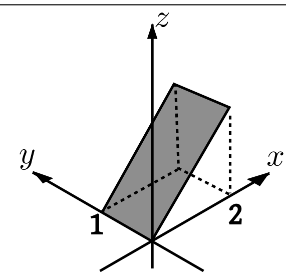


Fig 21

এবার এই উত্তরটাকে y-এর সাপেক্ষে integrate করব, এখানে y যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত, তাই--

$$\int_0^1 2\,dy = 2.$$

এটাই আমাদের উত্তর ছিল। এখানে আমরা যেদুটো single integral করলাম, তাদেরকে এক লাইনে লিখলে হয়--

$$\int_0^1 \left[\int_0^2 f(x,y)\,dx\right] dy.$$

চাইলে আমরা আগে y-এর সাপেক্ষে, এবং পরে x-এর সাপেক্ষে integrate করতে পারতাম--

$$\int_0^2 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 x\,dy\right] dx$$

যখন y-এর সাপেক্ষে integrate করছি, তখন x কিন্তু
একটা constant-এর মত আচরণ করবে। তাই
ওই ভিতরের integral-টা আসলে $x \times \int_0^1 dy = x \times 1 = x$.

$$= \int_0^2 x\,dx = \cdots = 2.$$

এখানেও সেই একই উত্তর এল। ■

এইভাবে পরপর দুটো single integral বার করাকে যে **repeated integral** বলে, সে তো জানোই। এর আরেকটা নাম হল **iterated integral**. কার সাপেক্ষে আগে, আর কার সাপেক্ষে পরে integrate করা হচ্ছে, তার উপর নির্ভর করে নানারকম repeated integral হতে পারে। যেমন, double integral-এর বেলায় দুরকম, triple integral-এর বেলায় $3! = 6$ রকম, ইত্যাদি।

লক্ষ করো একটা repeated integral করার সময়ে প্রতিটা integral একটা করে variable সরিয়ে দেয়। যেমন $f(x,y,z)$ হল তিনটে variable-এর function. যদি $\int_a^b f(x,y,z)\,dx$ বার করি, তবে উত্তরটা আর x-এর function রইল না, খালি y আর z-এর function হবে। যেই $\int_p^q \left[\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right] dy$ বার করব, অমনি y-ও ঝরে পড়বে, এটা খালি z-এর function. আর $\int_s^t \left[\int_p^q \left[int_a^b f(x,y,z)\,dx\right] dy\right] dz$ স্রেফ একটা সংখ্যা।

একটু আগে যে উদাহরণটা দেখলাম, সেখানে দুটো repeated integral-ই সমান হয়েছিল, এবং তারা আবার double integral-টার সাথেও সমান ছিল। অনেক ক্ষেত্রেই এমনটা হলেও সবসময়ে যে তা হবার কোনো গ্যারান্টি নেই, সে তো আগেই বলেছি। কখন গ্যারান্টি আছে আর কখন নেই, সেই প্রসঙ্গে ঢোকার আগে কিছু অংক করে repeated integral বার করার অভ্যাস করে নেওয়া যাক।

Example 6: ধরো $\iiint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ নিয়ে কাজ করব, যেখানে $\mathbf{x} = (x, y, z)$ এবং $f(\mathbf{x}) \equiv f(x, y, z) = xy + e^z$, এবং $S = [0, 2] \times [1, 2] \times [-1, 1]$. এটাকে প্রথমে x, তারপর y, শেষে z, এইভাবে repeated integral হিসেবে লিখে বার করো।

SOLUTION:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left[\int_{1}^{2} \left[\int_{0}^{2} xy + e^z\, dx\right] dy\right] dz &= \int_{-1}^{1} \left[\int_{1}^{2} 2y + 2e^z\, dy\right] dz \\
&= \int_{-1}^{1} 3 + 2e^z\, dz \\
&= 6 + 2(e - e^{-1}).
\end{aligned}$$

■

Exercise 4: আগের অংকটাই আরেকবার করো। কিন্তু এবার variable-গুলোকে সাজাও এইভাবে--প্রথমে y, তারপর z, এবং সব শেষে x. দ্যাখো, একই উত্তর আসে কি না। ■

Exercise 5: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে দুটো করে repeated integral আছে,

$$\int_a^b \left[\int_p^q f(x, y)\, dy\right] dx \text{ এবং } \int_p^q \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy,$$

যাদের মধ্যে পার্থক্য কেবল কোনটা আগে কোনটা পরে, তাতে। দুটোই কষে দ্যাখো সমান হয় কিনা।

1. $f(x, y) = xy^2$, $a = 1$, $b = 3$, $p = 0$ আর $q = 2$.
2. $f(x, y) = (x + y)^2$, $a = 2$, $b = 1$, $p = 10$ আর $q = 20$.
3. $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $a = 1$, $b = 2$, $p = 1$ আর $q = 2$.
4. $f(x, y) = \sin(x + y)$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ আর $q = \pi$.

■

30.3 Notation

আমরা repeated integral লেখার সময়ে বড় বড় চৌকো ব্র্যাকেট দিচ্ছি। সেগুলো লেখা অনেক সময়েই বিরক্তিকর। তাই সাধারণতঃ ওগুলো বাদ দিয়ে লেখা হয়। অর্থাৎ যেমন--

$$\int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_s^t f(x, y, z)\, dx\right] dy\right] dz$$

না লিখে সংক্ষেপে খালি লেখা হয়--

$$\int_a^b \int_p^q \int_s^t f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Repeated integral লেখার আরেকটা পথও আছে, যেটা অপেক্ষাকৃত কম প্রচলিত। সেটা অনুযায়ী আমাদের integral-টা দাঁড়াবে--

$$\int_a^b dz \int_p^q dy \int_s^t dx\, f(x,y,z).$$

এখানে $\int_a^b dz$ মানে হল "এর পরে যা আছে, সেটাকে z-এর সাপেক্ষে a থেকে b পর্যন্ত integrate করো।" কোনো কোনো জায়গায় দেখেছি একেবারে ডানদিকের integral-টাতে লোকে dx-টা শেষে লেখে--

$$\int_a^b dz \int_p^q dy \int_s^t f(x,y,z)\, dx.$$

DAY 31
Repeated integral (part 2)

31.1 তাঁবুর মেঝে rectangle না হলে

আমরা এতক্ষণ যে সব double integral নিয়ে কাজ করছিলাম, সেগুলোতে integration হচ্ছিল কোনো rectangle-এর উপরে, অর্থাৎ তাঁবু দিয়ে ভাবলে তাঁবুর মেঝেটা ছিল একটা rectangle. কিন্তু অনেক সময়ে তাঁবুর ছাদ যখন মাটিতে খানিকটা লুটিয়ে পড়ে, তখন মেঝেটাকে একটা rectangle বলে না ভেবে ত্যাড়া-ব্যাঁকা কিছু ভাবলে সুবিধা হয়, সে তো আগেই বলেছি। এরকম ক্ষেত্রেও আমরা repeated integral তৈরী করতে পারি। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 7: ধরো আমরা Fig 22-এর উপর কোনো $f(x,y)$-কে integrate করব। এর জন্য দুই ধরণের repeated integral কী কী হবে লেখো। যেহেতু $f(x,y)$-এর কোনো ফর্মুলা বলিনি, তাই integral-গুলো বার করতে পারবে না। খালি চেহারাগুলো লিখলেই হবে।

SOLUTION: এখানে আমরা যে কায়দায় এগোব, তাকে বলা যায় "স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব" কায়দা। ধরো প্রথমে y-এর উপরে integrate করব, তারপর x-এর উপরে। তার মানে বাইরে থাকবে x-এর integral-টা। সেটার জন্য "স্যাণ্ডউইচ" করব। Integration-এর অঞ্চলটাকে স্যাণ্ডউইচের দুটো পাঁউরুটি দিয়ে (Fig 23) বাঁদিক-ডানদিক থেকে চেপে ধরব (অর্থাৎ integration-এর অঞ্চলটার মধ্যে x-এর minimum আর maximum দেখব)। সবচেয়ে বাঁদিকে আছে $x=0$ আর সবচেয়ে ডানদিকে $x=1$. সুতরাং বাইরের integral-টা হবে এইরকম--

$$\int_0^1 \cdots\, dx.$$

ওই "$\cdots$" অংশে ভিতরের integral-টা থাকবে। সেটার জন্য শিককাবাব করতে হবে। দুটো পাঁউরুটি তো ছিলই, এবার তাদের মাঝে তাদের সঙ্গে সমান্তরালভাবে একটা শিক ঢুকিয়ে দাও (মানে এক্ষেত্রে vertical-ভাবে, উপরদিকে মুখ করে),

Fig 22

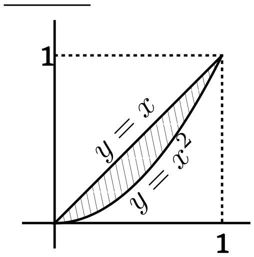
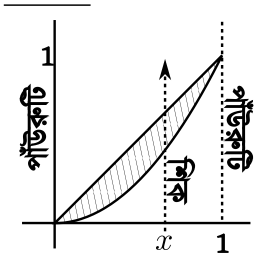


Fig 23



এবং লক্ষ করো এটা integration-এর অঞ্চলটাতে কোথায় ঢুকছে, এবং কোথা দিয়ে বেরিয়ে যাচ্ছে। অংকের ভাষায়, একটা কোনো $x \in (0,1)$ বরাবর শিকটা চালানো হচ্ছে। বুঝতেই পারছ শিকটা y-এর কোন্ value-তে integration-এর অঞ্চলে প্রবেশ করবে, এবং কোন্ value-তে বেরিয়ে যাবে, সেটা x-এর উপরে নির্ভর করবে (মানে x-এর function হবে)। এই উদাহরণে ঢুকছে $y = x^2$-এ এবং বেরোচ্ছে $y = x$-এ। তাই ভিতরের integral-টা হবে $\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$. সুতরাং সব মিলিয়ে repeated integral-টা হচ্ছে--

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dydx.$$

যদি আগে x-র সাপেক্ষে integrate করতে চাও, তবে সেই repeated integral-টাকে এভাবে লেখা যায়--

$$\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

এক্ষেত্রে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দাটা দেখিয়েছি Fig 24-এ। ■

এই স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দাটা নীচের অংক কয়টা করে রপ্ত হয়ে নাও।

Exercise 6: নীচে প্রতিক্ষেত্রে তোমার কাজ হল $\iint_S f(x,y)\,dxdy$-এর থেকে দুটো repeated integral তৈরী করে তাদের বার করা।

1. $S = \{(x,y) \;:\; x \in [0,1],\, y \in [-1,1]\}$ এবং $f(x,y) = x + y$.
2. $S = \{(x,y) \;:\; x \in [0,1],\, y \in [0,x^2]\}$ এবং $f(x,y) = xe^y$.
3. $S = \{(x,y) \;:\; x \in [0,2],\, y \in [0,2],\, xy \geq 1\}$ এবং $f(x,y) = \frac{x}{y}$.
4. $S = \{(x,y) \;:\; |x-1| + |y-2| \leq 2\}$ এবং $f(x,y) = 1$.

■

সবরকমের অঞ্চলের ক্ষেত্রেই যে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দাটা কাজ করবে, এমন কিন্তু কোনো কথা নেই। যেমন নীচের অংকটায়।

Example 8: যদি integration-এর অঞ্চলটা Fig 25-এর মত হয়, তবে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব করার সময়ে শিকটা যদি horizontal-ভাবে চালাও, তবে শিকটা ঢুকবে, বেরোবে, এবং তারপর ফের ঢুকবে, এবং বেরোবে। এক্ষেত্রে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগানো ঝকমারি। একবার ঢুকে একবারে বেরিয়ে গেলে ঠিক আছে, বারবার করে ঢোকা-বেরোনো করলেই মুশকিল। ■

যেসব set-এর বেলায় স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দা করা যায় vertical শিক দিয়ে, তাদের বলে y-**simple** (এবং তারই অনুকরণে horizontal শিকের বেলায় x-**simple**)। প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নাও। Fig 26-এ একটা y-simple set-এর উদাহরণ দেখিয়েছি। ছবি দেখে এদের চট্ করে চেনার উপায় হল এই--

Fig 24

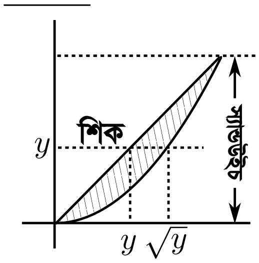


Fig 25

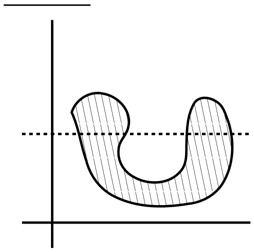
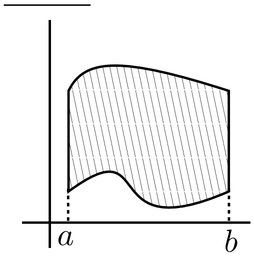


Fig 26



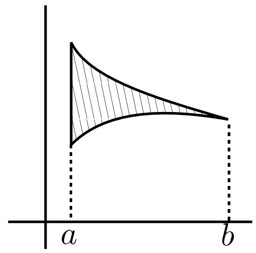


Fig 27

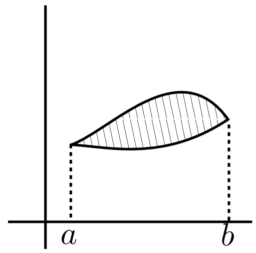


Fig 28

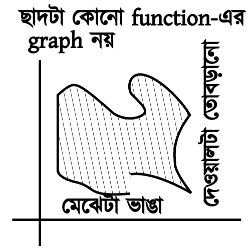


Fig 29

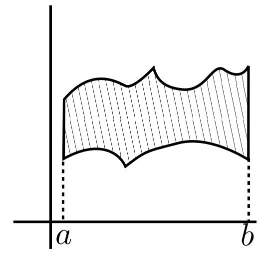


Fig 30

> এরকম set কোনো একটা $x = a$ থেকে একটানা কোনো একটা $x = b$ পর্যন্ত যায়। এই দুটো দেয়ালের মধ্যে মাথার উপরে একটা continuous function-এর গ্রাফ থাকে ছাদ হিসেবে। একইভাবে পায়ের নীচে একটা মেঝে থাকে, সেটাও একটা continuous function.

সব সময়েই যে দেওয়ালদুটো স্পষ্ট বোঝা যাবে, এমন কোনো কথা নেই। Fig 27-এ যেমন ডানদিকের দেওয়ালটা একটা বিন্দুতে পরিণত হয়েছে। আবার Fig 28-এ দুটো দেওয়ালেরই সেই দশা! এরা সকলেই y-simple set-এর উদাহরণ। এদের সঙ্গে Fig 29-এর set-টার তুলনা করো। তবেই বুঝবে কেন এটা y-simple নয়। একইভাবে x-simple-দের ছবিও কল্পনা করা বেশ সহজ। এক্ষুণি যে y-simple-এর উদাহরণ দিলাম, তাদেরকে কাত করে শুইয়ে দিলেই হল। যেমন Fig 30-কে কাত করলে পাবে Fig 31।
একটা y-simple set-এর বেলায় প্রথমে y-এর সাপেক্ষে, এবং পরে x-এর সাপেক্ষে integrate করা যায় স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দা দিয়ে। একইভাবে x-simple-এর বেলায় উল্টো repeated integral-টা বার করা যায় স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব কায়দায়। যেসব set একাধারে x-simple এবং y-simple, তাদের বেলায় দুইক্ষেত্রেই স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগাতে পারো। অবশ্য সেখানেও কোনো একটা repeated integral বার করা সহজতর হতে পারে। নীচের অংকের এরকম একটা উদাহরণ দেখানো আছে।

Example 9: Fig 32-এর অঞ্চলটা একাধারে x-simple এবং y-simple. কোন্ repeated integral-টা করা বেশী সহজ বলে মনে হচ্ছে? যদি প্রথমে y-এর সাপেক্ষে integrate করো, তবে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগাবার চেষ্টা করলে কী সমস্যা হবে? আর যদি প্রথমে x-এর সাপেক্ষে integrate করো?
SOLUTION: প্রথমে y-এর সাপেক্ষে integrate করলে স্যাণ্ডউইচ পর্বে কোনো সমস্যা হবে না, কিন্তু শিককাবাবের শিকটা কোথা দিয়ে ঢুকছে আর বেরোচ্ছে, সেটা একটা ফর্মুলা দিয়ে লেখা শক্ত।
প্রথমে x-এর সাপেক্ষে করলে পেতে এইটা--

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+e^x} f(x,y)\,dydx.$$

এই পথে এগোনোই সহজতর। ■

Fig 31

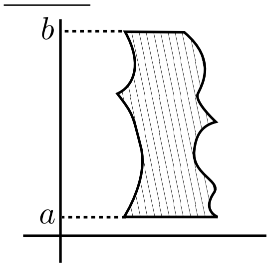
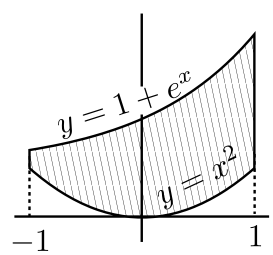


Fig 32



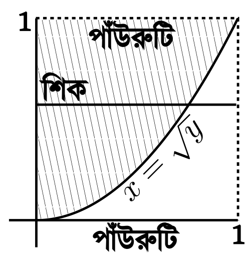


Fig 33

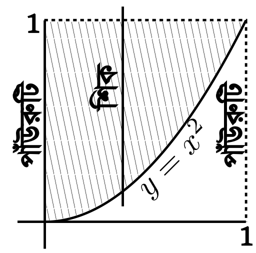


Fig 34

Exercise 7: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. If the order of integration in $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$ is reversed, then it will take the form

(A) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy$

(D) None of these.

[1+1] **(2021.1i)**
HINT: শুরুতে repeated integral-টা যেভাবে দেওয়া আছে, সেভাবে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব করলে কীরকম দেখায়, সেটা দেখিয়েছি Fig 33-এ। Integral দুটো ওল্টালে ছবিটা হবে Fig 34-এর মত। ∎

স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাবের কায়দাটা শুধু double integral-ই নয়, triple integral-দের বেলাতেও ব্যবহার করা যায়। নীচের অংকে তোমাকে সেটাই করতে হবে। আগেই বলেছি যে, repeated integral-রা অধিকাংশক্ষেত্রেই multiple integral-দের সমান হয়। এর ব্যতিক্রম অবশ্যই আছে, কিন্তু আজকের বাকি অংকগুলোর ক্ষেত্রে সেই ব্যতিক্রমটা হয়নি ধরেই এগোব। পরে আমরা একটা sufficient শর্ত শিখব, যেটা পালিত হলে জোর দিয়ে বলা যাবে যে, ব্যতিক্রমটা হয়নি।

Exercise 8: The volume of the solid

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1\le x\le 2,\quad 0\le y\le \frac{2}{x},\quad 0\le z\le x\right\}$$

is expressible as (more than one option may be correct)

(A) $\int_1^2 \int_0^{2/x} \int_0^x dz dy dx$

(B) $\int_1^2 \int_0^x \int_0^{2/x} dy dz dx$

(C) $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{2/x} dy dx dz$

(D) $\int_0^2 \int_{\max\{z,1\}}^2 \int_0^{2/x} dy dx dz$

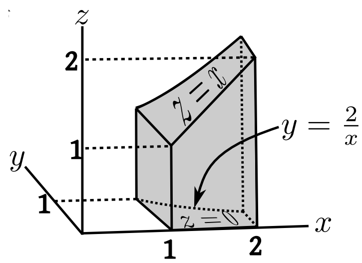


Fig 35

(JAM.2017.MSQ32)
HINT: এরকম অংকের ক্ষেত্রে ছবিটা কল্পনা করতে পারা খুবই দরকারী, যেমন দেখিয়েছি Fig 35-এ। সেটা দেখে চিন্তা করো। ■

Exercise 9: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. Value of the integral $\iint \cos(x+y)\,dxdy$ over the domain bounded by $x = 0,\ y = \pi,\ y = x$ is

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) None of these.

[1+1] **(2021.1f)**
HINT: যেকোনো একভাবে repeated integral দিয়ে করো। ■

Exercise 10: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. Value of the integral $\iiint xyz\,dxdydz$ over $R : [0,1;0,1;0,1]$ is

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) None of these.

[1+1] **(2021.1h)** এখানে $[0,1;0,1;0,1]$ বলতে বুঝিয়েছে $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. এই notation-টা মোটেই standard নয়। ■

Exercise 11: Evaluate $\iint_R \sqrt{|x^2-2y|}\,dxdy$ where $R = [-2,2;0,2]$.[5] **(2021.4b)**
HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। প্রথমে repeated integral হিসেবে লেখো--

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2}\sqrt{|x^2-2y|}\,dydx.$$

এবার x^2-2y কখন ≥ 0 আর কখন < 0 হয়, তার উপরে নির্ভর করে ভিতরের integral-টাকে দুভাগে ভেঙে নাও। আরো লক্ষ করো যে integration-এর অঞ্চলটা এবং integrand-টা y-axis বরাবর symmetric. তাই $x = 0$ থেকে $x = 2$ অব্ধি integrate করে উত্তরটাকে দ্বিগুণ করে দিলেই হবে।
■

Example 10: Evaluate $\iint_E x^{1/2}y^{1/3}(1-x-y)^{2/3}\,dxdy$, where E is the region bounded by the

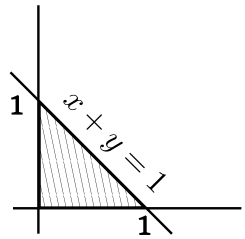


Fig 36

lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$.[10] **(2020, 2005)**

SOLUTION: এখানে integration-টা হচ্ছে Fig 36-এর শেড করা অঞ্চলটার উপরে। স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগানোর আদর্শ সুযোগ। এই অংকটা করার সময়ে **beta function**-দের কথা মাথায় রাখতে হবে। ব্যাপারটা এইরকম--

> যদি $a, b > 0$ হয়, তবে $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ সর্বদা finite হয়। এর value-টা অবশ্যই a আর b-র উপরে নির্ভর করে, মানে a, b-র function হয়। এই function-টাকেই বলে beta function. আমরা একে লিখব $B(a, b)$ হিসেবে।

এই অংকের উত্তরটা আমরা এই function দিয়ে প্রকাশ করব।

$$\iint_E x^{1/2}y^{1/3}(1-x-y)^{2/3}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} x^{1/2}y^{1/3}(1-x-y)^{2/3}\,dydx$$

$$= \int_0^1 x^{1/2}\int_0^{1-x} y^{1/3}(1-x-y)^{2/3}\,dydx$$

ভিতরের integral-টাকে আমরা beta function দিয়ে লিখতে চেষ্টা করব।

$$= \cdots$$

$$= \int_0^1 x^{1/2}\int_0^1 u^{1/3}(1-u)^{2/3}\,dudx \quad \left[\text{putting } u = \tfrac{y}{1-x}\right]$$

$$= B\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}\right)\int_0^1 x^{1/2}dx$$

এখানে $\frac{4}{3}$ এল কারণ u-এর মাথায় ছিল $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
একইভাবে $(1-u)$-এর মাথায় ছিল $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

$$= \tfrac{2}{3}B\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}\right).$$

■

নীচের অংকটা একইরকমের।

Exercise 12: Compute the Dirichlet's integral

$$\iiint x^{\ell-1}y^{m-1}z^{n-1}(1-x-y-z)^{p-1}dxdydz$$

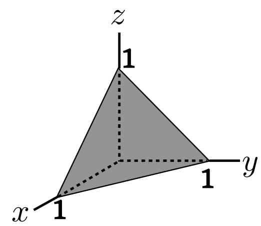


Fig 37

taken over the tetrahedron bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $x + y + z = 1$, where ℓ, m, n, p are all positive.[5] **(2009.10bi)**
HINT: এখানে একটা tetrahedron-এর উপরে integrate করতে হবে। এর ছবিটা দেখিয়েছি Fig 37-এ। এখানে ওই হেলানো ধূসর রঙের plane-টা হল $x + y + z = 1$-এর গ্রাফ। ■

Exercise 13: Find the value of the integral

$$\oiiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^4},$$

where V is the volume enclosed within the tetrahedron formed by the planes $x + y + z = 1$ and $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.[6] **(2021.10)**
HINT: এখানে ওই $\oiiint$-টা দেখে ঘাবড়ে যেও না। ওর বদলে স্রেফ $\iiint$ ভেবে নাও, উত্তরটা একই থাকবে। এই notation-টা আমরা পরে আলোচনা করব। ■

DAY 32
Repeated integral (part 3)

গতকাল আমরা দেখেছি কীভাবে একটা multiple integral-কে একটা repeated integral-এর পরিণত করে ফেলা যায়। এও বলেছি যে, অধিকাংশ সময়েই multiple integral-টা repeated integral-টার সমান হয়, যদিও এর ব্যতিক্রম আছে। আজকে আমরা খুঁটিনাটিগুলো শিখব।

32.1 কখন সমান হয়

যদি multiple integral এবং repeated integral-রা সবাই সমান হয়, তবে সেটা খুবই সুসংবাদ, কারণ সেক্ষেত্রে multiple integral-টা সরাসরি বার না করে repeated integral-গুলোর কোনো একটা বার করলেই চলে। এবং তার জন্য পরপর কয়েকটা single integral বার করাই যথেষ্ট। এবং তার জন্য হরেক রকমের কায়দা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই জানা আছে। কিন্তু প্রশ্ন হল এই integral-গুলোর সমান হবার গ্যারান্টি কোথায়? তার জন্য একটা sufficient শর্ত শিখে রাখো--

> যদি multiple integral-টা এবং কোনো একটা repeated integral-ও exist করে (improper হলেও আপত্তি নেই), তবে বাকি repeated integral-গুলোও exist করবে, এবং ওরা সকলেই সমান হতে বাধ্য।

এই তথ্যটা ব্যবহারের কায়দা হল এইরকম--

> প্রথমে কোনো একটা repeated integral বার করার চেষ্টা করো, ধরো পেরে গেলে, ব্যস্ ওটার existence জানা হয়ে গেল। এবার কোনোভাবে multiple integral-টা exist করে কিনা দ্যাখো। বার করতে বলছি না, খালি আদৌ যে exist করে, তার গ্যারান্টিটুকু পেলেই হল। অমনি বলে দিতে পারবে যে, repeated integral-টা যা বার করেছিলে, multiple integral-টাও সেটাই হবে।

অবশ্য এখানে একটা সমস্যা রয়েই গেল, কী করে বুঝব multiple integral-টা exist করে? সেটা পরীক্ষা করা খুবই শক্ত হতে পারে। কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই একটা sufficient শর্ত দিয়েই কাজ চলে যায়। এই শর্তটা পালিত হলেই multiple integral-টা exist করতে বাধ্য। শর্তটা এইরকম--

> যদি integrand-টা (মানে যে function-টাকে integrate করা হচ্ছে), সেটা যদি continuous হয়, আর যে অঞ্চলের উপর integrate করছ, সেটা যদি closed আর bounded হয়, তবে multiple integral-টা exist করবেই।

এরকম আরেকটা শর্তও দেওয়া যায়--

> যদি integrand-টা continuous আর bounded হয়, আর যে অঞ্চলের উপর integrate করছ, সেটাও যদি bounded হয়, তবেও multiple integral-টা exist করবেই।

দুটো শর্তের মধ্যে পার্থক্যটা বুঝলে তো? Integrand-এর উপর একটা বাড়তি শর্ত চাপালাম, bounded, তার বিনিময়ে অঞ্চলটার উপর একটা শর্ত কমালাম, সেটার closed হওয়ার দরকার রইল না।
এই সব শর্ত মিলিয়ে একটা অতি সহজ শর্ত বানানো যায়। তার জন্য মনে রেখো যে, integrand-টা যদি nonnegative হয়, তবে integral-টা exist করতে বাধ্য[2] (যদিও ∞ হয়ে যেতে পারে)। তাই এরকমক্ষেত্রে নিশ্চিন্তে integral-দের স্থানবিনিময় করা যায়।

Exercise 14: প্রতিটা ক্ষেত্রে একটা করে multiple integral দিলাম, repeated integral-এর আকারে। চোখে দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে integrand-টা continuous এবং integration হচ্ছে একটা closed এবং bounded rectangle-এর উপর। সুতরাং প্রতি ক্ষেত্রেই খালি দুটো single integral কষলেই double integral-টা বেরিয়ে যাবে--

1. $\int_0^1 \int_1^2 x - y\, dxdy.$
2. $\int_1^2 \int_{-1}^2 |x| + |y|\, dxdy.$

■

এইরকমের অংক হল ভালো খবর। যারা physics বা engineering-এর জন্য multiple integral বার করে, তারা এই ভালো খবরের রাজ্যেই বাস করে। কিন্তু খারাপ খবরও আছে, এবং যাদের অংক নিয়েই কারবার, তাদের সেগুলো একটু না জানলে চলে না। এবার সেরকম কিছু খবর দিই।

32.2 বাজে খবর

প্রথম অংকটায় double integral বা repeated integral দুটোর কোনোটাই exist করে না!

Example 11: আমরা কাজ করব $\iint_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ নিয়ে, যেখানে

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

এটা কি exist করে? এর repeated integral দুটো কি exist করে?

SOLUTION: প্রথমে এই repeated integral-টা নিয়ে শুরু করি, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy$. লক্ষণীয় যে, আমাদের f-টা আসলে খালি x-এর function. এবং যেহেতু এটা ক্রমাগতঃ 0 থেকে 1-এ লাফালাফি করে চলেছে, তাই upper Riemann

[2] যদি positive আর negative দুরকম value-ই নিত, একবার positive, একবার negative, ফের positive, ফের negative এরকমভাবে চলতে চলে integral-টা oscillate করে সমস্যা হতে পারত।

sum কোনোভাবেই 1-এর নীচে নামতে পারবে না, এবং lower Riemann sum কোনোভাবেই 0-র উপরে উঠতে পারবে না। সুতরাং $\int_0^1 f(x,y)\,dx$-টাই exist করবে না। অতএব এই repeated integral-টার পক্ষে exist করা অসম্ভব।
এবার অন্য repeated integral-টা, মানে $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx$. এখানে যদি $x \in \mathbb{Q}$ নিই, তবে y-এর function হিসেবে $f(x,y) \equiv 1$. সুতরাং সেক্ষেত্রে ভিতরের integral-টা হবে $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$. একই যুক্তিতে $x \notin \mathbb{Q}$ হলে $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0$ হবে। সুতরাং

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এবার বাইরের integral-টা করতে হবে x-এর সাপেক্ষে। কিন্তু এই function-টা যে Riemann integrable নয়, সে তো বললামই। অতএব এই repeated integral-টারও আর exist করা হয়ে উঠল না।
এবার দেখি double integral-টা exist করে কি না। সেখানেও একই সমস্যা। Function-টা ক্রমাগতঃ 0 থেকে 1-এ লাফালাফি করে চলেছে, তাই upper Riemann sum-গুলো 1-এর নীচে আসতে পারছে না, আর lower Riemann sum-গুলো পারছে না 0-র উপরে যেতে। সুতরাং double integral-টাও exist করছে না। ■

এইটা ছিল একেবারে যা তা খারাপ খবর। এবার একটু কম খারাপ খবরের অংক।

Example 12: Let $f(x,y)$ be defined over $S = [0 \le x \le 1;\quad 0 \le y \le 1]$ by

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 3y^2 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Examine whether the repeated integrals

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy \text{ and } \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

exist. **(2005.9c)**

SOLUTION: প্রথমে $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx$-কে দেখি--

> If $x \in \mathbb{Q}$, then $f(x,y) \equiv 1$. So $\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 1\,dy = 1$.
>
> If $x \notin \mathbb{Q}$, then $f(x,y) = 3y^2$. So $\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 3y^2\,dy = 1$.

তার মানে x-টা rational বা irrational যাই হোক না কেন, ভিতরের integral-টা সব সময়েই 1 হচ্ছে।

> So $\forall x \in [0,1] \quad \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$.
>
> Hence $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx = \int_0^1 1\,dx = 1$.

যাক বাবা, একটা repeated integral অন্ততঃ বেঁচে গেল! এবার অন্যটার কী গতি হয় দেখি। এখানেও একটা লাফালাফি করা function-কে integrate করা হচ্ছে। লাফালাফিটা হচ্ছে $3y^2$ থেকে 1-এর মধ্যে। যদি $3y^2 = 1$ হয়ে যায়, তবেই একমাত্র কোনো লাফালাফি হবে না, এবং integral-টা exist করবে। নইলে exist করবে না।

> If $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, then $f(x,y) \equiv 1$, and so $\int_0^1 f(x,y)\,dx = 1$.
>
> If $y \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$, then $\int_0^1 f(x,y)\,dx$ does not exist.

■

যে function মোটে একটা value-তে ছাড়া exist-ই করে না, সেটা আর integrate করি কী করে?

> So $\int_0^1 f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{if } y=0 \\ \text{does not exist} & \text{otherwise} \end{cases}$.
>
> Hence $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy$ cannot exist.

■

এই অংকে double integral-টা নিয়ে মাথা ঘামাতে বলে নি। যদি দেখতে বলত double integral-টা exist করে কিনা, তবে কী করতে? সেখানেও লাফালাফির কায়দাটা ব্যবহার করা যায়। লাফালাফিটা চলছে 1 আর $3y^2$-এর মধ্যে। প্রথমে এমন একটা জায়গা নেব, যেখানে $3y^2$ থাকবে 1-এর চেয়ে খানিকটা দূরে। ধরো $3y^2 \leq \frac{1}{2}$. মানে এই অঞ্চলটা নিচ্ছি--

> Let $S = \left\{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \ : \ 3y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$.
>
> Then over S the function takes the value 1 over a dense set, and is $\leq \frac{1}{2}$ over another dense set.
>
> So the upper Riemann sums must always be ≥ 1 and the lower Riemann sums must be $\leq \frac{1}{2}$.
>
> Hence the double integral cannot exist.

আরেকভাবেও double integral-টার অনস্তিত্ব প্রমাণ করা যেত, contradiction ব্যবহার করে। ধরো, যদি সম্ভব হয়, double integral-টা exist করে। এদিকে একটা repeated integral যে exist করে, সেটা তো দেখিয়েইছি। সুতরাং আমরা আগে একটা যে sufficient শর্ত শিখেছিলাম, সেটা বলছে যে, অন্য repeated integral-টাও exist করতে বাধ্য। কিন্তু সেটা তো করছে না। অতএব double integral-টা exist করতে পারে না।
একইরকম আরো দুটো অংক। তোমার হাত পাকানোর জন্য।

Exercise 15: Let f be defined over

$$S = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

by

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } y \text{ is rational} \\ x & \text{if } y \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Examine the existence of the repeated integrals

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy \text{ and } \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx.$$

[3] **(2007.9b)** ■

Exercise 16: Let a function f be defined on the rectangle $R = [0,1;0,1]$ as follows:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } y \text{ is rational} \\ x & \text{if } y \text{ is irrational} \end{cases}.$$

Show that (i) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y,)\,dx = \frac{1}{2}$ and (ii) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y,)\,dy$ does not exist.[4+6] **(2021, 2020)**
HINT: আগের অংকটাই সামান্য অন্য ভাষায়। ■

এর পরের উদাহরণটা এমন যেখানে repeated integral দুটোই দিব্যি exist করে, কিন্তু ওদের value আলাদা, অতএব double integral-টা exist করতে পারে না।

Example 13: Let

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{if } 0<x<y<1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{if } 0<y<x<1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Show that the repeated integrals

$$\int_0^1 dx \int_0^1 F(x,y)dy \text{ and } \int_0^1 dy \int_0^1 F(x,y)dx$$

both exist, but the double integral

$$\int_0^1 \int_0^1 F(x,y)dxdy$$

cannot exist. **(2003.10aii)**
SOLUTION: এই অংকটা দেখে প্রথমেই যেটা চোখে পড়া উচিত, সেটা হল এখানে আমরা improper integral নিয়ে কাজ করছি। যে অঞ্চলের উপর integration হচ্ছে, সেটা bounded বটে, কিন্তু integrand-টা মোটেই bounded নয়, কারণ x,y এখানে 0-র একেবারে গায় চলে যেতে পারছে, এবং তখন $\frac{1}{x}$ আর $\frac{1}{y^2}$ সটান ∞-র দিকে ছুটবে। ছবিটা রয়েছে Fig 38-এ।

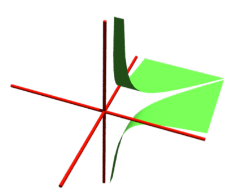
For any fixed $x \in (0,1)$ we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x,y)dy &= -\int_0^x \frac{1}{x^2}\,dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}\,dy \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 1 = -1. \end{aligned}$$

So

$$\int_0^1 dx \int_0^1 F(x,y)\,dy = -\int_0^1 dx = -1.$$

Fig 38



Again, for any fixed $y \in (0,1)$ we have

$$\int_0^1 F(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y^2}\,dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 1.$$

Thus both the repeated integrals exist.

However, since they are unequal, the double integral cannot exist.

■

নীচের অংক দুটো একইরকম। তোমার জন্য রেখে দিলাম।

Exercise 17: Show that

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx.$$

[5] **(2006.9ai)** ■

Exercise 18: Consider the function

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Show that

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dydx = \frac{\pi}{4} \text{ and } \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy = -\frac{\pi}{4}.$$

Hence the double integral does not exist. ■

এই অংকগুলোতে সব সময়েই আমরা improper integral নিয়ে কাজ করছিলাম। যদি improper না হয়, তবে কিন্তু এরকম বিভ্রাট হতে পারত না। যেমন ধরো, উপরের অংকটাকে সামান্য বদলে নীচের অংকটা তৈরী, যেখানে integrand-টা দিব্যি bounded. অমনি সব সমস্যা মিটে গেছে।

Exercise 19: Show that

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dx.$$

[5] **(2006.9aii)**
HINT: আগের অংকের কায়দাতেই এটাও হবে। ■

32.3 Change of order

এবার আমরা কিছু অংক দেখব, যেখানে আমাদের এমন একটা repeated integral করতে দেওয়া থাকবে, যেটা করা মুস্কিল। কিন্তু যদি integral দুটোর স্থানবিনিময় করে নিই, তবে যে repeated integral-টা পাবে, সেটা করা যাবে। অংকগুলো করার

সময়ে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাবের কায়দাটা মনে রাখতে হবে। যদি repeated integral-টায় শিকটা horizontal-ভাবে ঢোকানো হয়, তবে integral-দের স্থানবিনিময় মানে শিকটাকে vertical করে ঢোকানো। যদি শুরুতেই vertical-ভাবে ঢোকানো থাকে, তবে আমাদের কাজ হবে horizontal-ভাবে ঢোকানো।

Exercise 20: The value of the integral

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y^2} y\sin(\pi(1-x)^2)\,dxdy$$

is

(A) $\frac{1}{2\pi}$ (B) 2π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2}{\pi}$

(JAM.2019.MCQ9)

HINT:

যেভাবে দিয়েছে তাতে x-এর integral-টা আছে ভিতরে, মানে ওটাই করতে হবে প্রথমে। কিন্তু ওই sin-এর পেটের ভিতর $(1-x)^2$-টা দেখতে মোটেই উপাদেয় লাগছে না। অপরপক্ষে, integrand-এর মধ্যে y-টা রয়েছে স্রেফ y হিসেবেই, তাই y-এর সাপেক্ষে integrate করাটা সহজ। এ থেকেই মাথায় আসা উচিত যে, order of integration বদলালে সুবিধা হবে। প্রথমেই integration-এর অঞ্চলটার একটা ছবি এঁকে নাও (Fig 39)। মনে রেখো এখানে $x>0$, তাই $x=1-y^2$ মানে হল $y=\sqrt{1-x}$. তাই শুরু হবে এইভাবে--

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y^2} y\sin(\pi(1-x)^2)\,dxdy = \int_{x=0}^{1}\left[\sin(\pi(1-x)^2)\int_{y=0}^{\sqrt{1-x}} y\,dy\right]dx.$$

বাকি কাজ তোমার জন্যই রেখে দিলাম।

আর হ্যাঁ, এখানে যে interchange of integral করা যাবে, তার কারণ হল, bounded অঞ্চলের উপর bounded, continuous function-কে integrate করা হচ্ছে। ■

Exercise 21:

$$\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)\,dydx =$$

(A) $\frac{1+\cos 1}{2}$ (B) $1-\cos 1$ (C) $1+\cos 1$ (D) $\frac{1-\cos 1}{2}$

(JAM.2017.MCQ6) ■

Exercise 22: If $\int_0^1\int_{2y}^2 e^{x^2}\,dxdy = k(e^4-1)$, then k equals .... **(JAM.2020.NAT47)**

Fig 39

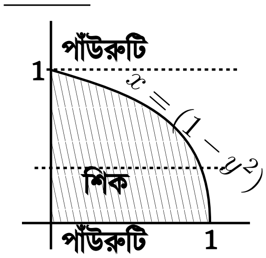
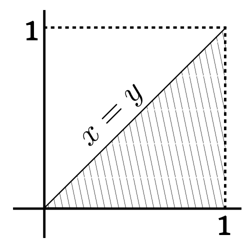


Fig 40



HINT:
এখানে যদি প্রথমে ভিতরের integral-টা বার করার চেষ্টা করো, তবে কিছুতেই করতে পারবে না। আসলে এটা দেখানো যায় (Liouville নামের জনৈক গণিতজ্ঞ দেখিয়েছিলেন, বেশ খেটেখুটে) যে, এই integral-টা exist করে বটে, কিন্তু আমাদের পরিচিত কোনো function দিয়ে একে প্রকাশ করা যায় না।

> We are integrating over $\{(x,y) \;:\; 2y \le x \le 2,\;\; 0 \le y \le 1\}$.
>
> Since the integrand is bounded and continuous here, we can interchange the integrals.
>
> Interchanging integrals this becomes
>
> $$\int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{x^2}\, dy dx = \int_0^2 \frac{x}{2} e^{x^2}\, dx.$$

বাকি কাজটা তোমার জন্য রেখে দিলাম।
■

Exercise 23: Evaluate

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\, dx.$$

[8] **(2021, 2020)**
HINT:
আমরা integral দুটোর স্থানবিনিময় করার চেষ্টা করব। যে অঞ্চলের উপর integration করা হচ্ছে, সেটা দেখিয়েছি Fig 40-এ। যেভাবে অংকটা দেওয়া আছে, সেখানে স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাবের শিকটা রয়েছে x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরালে। সেটাকে y-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল করে চেষ্টা করো। ■

Exercise 24: The value of the integral

$$\int_0^1 \int_x^1 y^4 e^{xy^2}\, dy dx$$

is ... . (correct up to three decimal places). **(JAM.2018.NAT56)** ■

Exercise 25: By changing the order of integration, prove that

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y\, dy}{(1+xy)^2(1+y^2)} = \frac{(\pi - 1)}{4}.$$

[6] **(2021.8)**
HINT: এখানে integral দুটোর স্থানবিনিময়ের পরে ভিতরের integral-টা হবে

$$\int_0^y \frac{y\, dx}{(1+xy)^2}.$$

এর মধ্যে $u = 1 + xy$ বসিয়ে চেষ্টা করো। Integrand-টা এখানে কিন্তু unbounded, তবে সেটা nonnegative হওয়ায় integral দুটোর স্থানবিনিময়ে কোনো সমস্যা নেই। ■

Exercise 26: Show in a diagram the field of integration of the integral

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y\,dy}{(1+xy)^2(1+y^2)}$$

and by changing the order of integration show that the value of the integral is $(\pi - 1)/4$.[4] **(2004.9b)**

HINT: এখানে field of integration বলতে বোঝাচ্ছে যে অঞ্চলটার উপরে integration হচ্ছে। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 41-এ। ■

Example 14: With proper justification evaluate

$$\int_0^1 dx \int_x^{1/x} \frac{y^2\,dy}{(x+y)^2\sqrt{1+y^2}}.$$

[4] **(2009.9a)**

SOLUTION: Fig 42-এর দিকে চোখ রাখো। আমরা integral দুটোর স্থানবিনিময় করতে চলেছি। কেন সেটা করা যাবে, তার ব্যাখ্যা চেয়েছে। Fig 42 দেখলেই বুঝবে যে, এখানে আমরা কিন্তু একটা improper integral নিয়ে কাজ করছি (integrand-টা unbounded)। কিন্তু unbounded হোক আর যাই হোক, integrand-টা কিন্তু সর্বত্রই nonnegative. সুতরাং integral-টা exist করতে বাধ্য (যদিও ∞ হয়ে যেতে পারে)।

> Here the integrand is nonnegative. So the integral must exist (though may be ∞). Hence by standard result, interchanging the integrals is justified.
>
> Interchanging the integrals we get
>
> $$\int_0^1 dx \int_x^{1/x} \frac{y^2\,dy}{(x+y)^2\sqrt{1+y^2}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^y \frac{dx}{(x+y)^2}\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dx}{(x+y)^2}\,dy}_{I_2}.$$

Fig 41

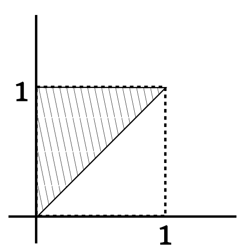
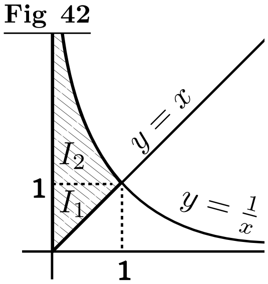


Fig 42



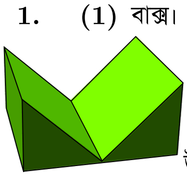
Now
$$\int \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}.$$
Hence
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2y}\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \cdots. \end{aligned}$$
Again,
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{1+y^2}\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \cdots. \end{aligned}$$

■

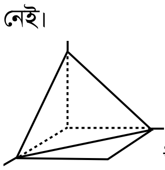
Exercise 27: By changing the order of integration prove that
$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{\phi'(y)(x^2+y^2)x\,dx\,dy}{\sqrt{4a^2x^2-(x^2+y^2)^2}} = \pi a^2[\phi(a)-\phi(0)]$$
where $\phi'(x)$ is assumed to be continuous.[5] **(2005.10aii)** ■

Answers

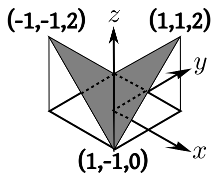
1. **(1)** বাক্স। $(2-1)(2-0)\times 5 = 10$. **(2)** প্রিজম। উত্তর $\frac{1}{2}$. **(3)** দুটো পাশাপাশি শোয়ানো একইরকম প্রিজম।



উত্তর 2. **(4)** পিরামিড। সামনের ত্রিভুজটা স্রেফ কার্পেটের মত মাটিতে বিছানো, ওর কোনো volume নেই।



উত্তর $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$. **2.** একটা হেলানো পিরামিডের volume-এর দ্বিগুণ।



পিরামিডটার base-এর area হল $\frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$. আর height হল 2. সুতরাং volume হল $\frac{1}{3}\times 2\times 2 = \frac{4}{3}$. সুতরাং উত্তর $\frac{16}{3}\approx 5.33$. **3.** $3\times 1 = 3$. **4.** না এসে যাবে কোথায়? **5.** **(1)** 4. **(2)** $-\frac{8420}{3}$. **(3)** $\frac{3}{2}\log 2$. **(4)** 2. **6.** **(1)** $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x+y)\,dxdy = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}(x+y)\,dydx = 1$.
(2) $\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y\,dydx = \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 xe^y\,dxdy = \frac{e}{2}-1$.
(3) $\int_1^2\int_{1/x}^2 \frac{x}{y}\,dydx = \int_1^2\int_{1/y}^2 \frac{x}{y}\,dxdy = \frac{3}{2}\log 2 + 2\log 2 - \frac{3}{4}$.
(4) $\int_{-1}^1\int_{1-x}^{3+x} dydx + \int_1^3\int_{x-1}^{5-x} dydx = \int_0^1\int_{1-y}^{y-1} dxdy + \int_2^4\int_{y-3}^{5-y} dxdy = 8$. **7.** (A). **8.** (A), (B) এবং (D) সঠিক, এবং (C) ভুল। **9.** (B). **10.** $\frac{1}{8}$.
11. $2\left[\int_0^2\int_{x^2/2}^2 \sqrt{2y-x^2}\,dydx + \int_0^2\int_0^{x^2/2}\sqrt{x^2-2y}\,dydx\right] = \cdots = 2\pi + \frac{8}{3}$. **12.** $\frac{\Gamma(\ell+m+n+p)}{\Gamma(\ell)\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}$.
13. $\frac{1}{48}$. **14.** **(1)** 1. **(2)** 7. **15.** প্রথমটা exist করে না, দ্বিতীয়টা হল $\frac{1}{2}$.
17. $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dydx = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$. ওদিকে $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = -\int_0^1 \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{2}$. **18.** যেহেতু $f(x,y) = -f(y,x)$, তাই repeated integral দুটো পরস্পরের negative হবে। প্রথমটার integrand হল $-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$. এর মধ্যে $y = x\tan u$ বসালেই হবে। **19.** দুটোই শূন্য হবে। **20.** (A). **21.** (B).
22. $k = \frac{1}{4}$. **23.** $\frac{1}{2}(e-1)$. **24.** $\frac{1}{3}(e-2)\approx 0.24$.

Chapter VI
Multiple integral II

DAY 33
Substitution (part 1)

হায়ার সেকণ্ডারীতে পড়ার সময়ে আমরা integration by substitution শিখি। এইবার আমরা শিখতে চলেছি multiple integral-এর বেলায় কী করে substitution ব্যবহার করতে হয়।

33.1 জিনিসটা কী?

একটা উদাহরণ দিয়ে substitution ব্যাপারটা মনে করে নিই।

Example 1: $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$-এর মধ্যে যদি substitution করা হয় $x = \sin u$, যেখানে $u \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, তবে কী হবে?

SOLUTION: বলেছে $x = \sin u$, তাই $1 - x^2 = \cos^2 u$. এদিকে $u \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, তাই $\cos u > 0$. সুতরাং $\sqrt{1-x^2} = \cos u$. এখানে integration-টা হচ্ছে $x = 0$ থেকে $x = \frac{1}{2}$ পর্যন্ত। সুতরাং u দিয়ে ভাবলে $u = 0$ থেকে $u = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ পর্যন্ত। এই অব্দি কোনো রহস্য নেই। এর পর একটা রহস্যময় কাজ করতে হত, যেহেতু $x = \sin u$, তাই $\frac{dx}{du} = \cos u$, এবং তা থেকে ম্যাজিক করে

$$dx = \cos u\, du.$$

"ম্যাজিক" বললাম, কারণ আমরা জানি যে $\frac{dx}{du}$ আসলে মোটেই "dx ভাগ du" নয়! যাই হোক, এই ম্যাজিকের ফলে আমরা পাই--

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos u\, du}{\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \sin^{-1}\frac{1}{2}.$$

■

লক্ষ করো এখানে $x = \sin u$ বসানোর সময়ে আমরা তিন জায়গায় পরিবর্তন করেছি--

- এক, integrand-এ, যেখানে $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-এর বদলে $\frac{1}{\cos u}$ লিখেছি,
- দুই, integration-এর দুই limit-এ। Integration-টা হচ্ছিল $x = 0$ থেকে $x = \frac{1}{2}$ পর্যন্ত। আমরা $x = 0$-র বদলে $u = 0$ এবং $x = \frac{1}{2}$-এর বদলে $u = \frac{\pi}{6}$ বসিয়েছি।
- তিন, dx-এর বদলে $\cos u\, du$ লিখেছি।

এখানে যা করলাম সেটা in general লিখলে এইরকম দাঁড়ায়--

আমাদের করতে বলেছিল একটা কোনো definite integral, ধরো $\int_a^b f(x)\,dx$. আমরা এর মধ্যে বসালাম $x = g(u)$ যেখানে $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ হল কোনো একটা strictly increasing onto function, যেটা differentiable-ও বটে। এর ফলে তিনটে পরিবর্তন হল--

- এক, $f(x)$-টা বদলে হয়ে গেল $f(g(u))$.
- দুই, $x = a$ এবং $x = b$ হয়ে গেল যথাক্রমে $u = g^{-1}(a) = \alpha$ এবং $u = g^{-1}(b) = \beta$. যেহেতু g-টা strictly increasing এবং continuous, তাই সেটা one-one-ও বটে। সুতরাং g^{-1}-এর অস্তিত্ব নিয়ে কোনো সমস্যা নেই। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে কেন $g^{-1}(a) = \alpha$ এবং $g^{-1}(b) = \beta$ হতে বাধ্য।
- তিন, সব শেষের ওই dx-টা হয়ে গেল $g'(u)\,du$.

ফলে পেলাম--

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(u)g'(u)\,du.$$

এবার বলি একই জিনিস multiple integral-এর বেলায় কী করে করতে হয়। তুমি শুরু করছ একটা multiple integral নিয়ে, ধরো $\int \cdots \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, যেখানে $E \subseteq \mathbb{R}^n$. এর মধ্যে বসাতে চাও $\mathbf{x} = g(\mathbf{u})$. এখানে g-কে differentiable হতে হবে। যেহেতু $n \geq 2$ হলে $\mathbb{R}^n$-এর বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনো ছোটো-বড়োর ধারণা নেই, তাই g-কে strictly increasing বলার মানে হয় না, তাই g-কে খালি one-one এবং onto নেব। এবার তিনটে পরিবর্তনের পালা--

- এক, $f(\mathbf{x})$ হয়ে যাবে $f(g(\mathbf{u}))$.
- দুই, E হয়ে যাবে $g^{-1}(E)$, মানে সেইসব $\mathbf{u}$-এর set যাদের জন্য $g(\mathbf{u}) \in E$ হবে।
- তিন, x-এর বদলে বসাতে হবে $|\det(J(g(\mathbf{u})))|\,d\mathbf{u}$, অর্থাৎ কিনা g-এর Jacobian-এর determinant-এর absolute value-র পরে $d\mathbf{u}$. হায়ার সেকণ্ডারীতেই তৃতীয় ধাপটা ম্যাজিক ছিল। এ যে দেখি আরো বড় ম্যাজিক! Determinant-এর absolute value আবার এলো কোত্থেকে রে বাবা!

সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

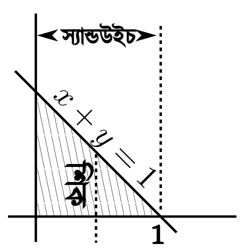
$$\int \cdots \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{g^{-1}(E)} f(g(\mathbf{u}))|\det(J(g(\mathbf{u}))|\,d\mathbf{u}.$$

এটা কেন কাজ করে, তা নিয়ে এখনই মাথা ঘামাব না। আগে এটা ব্যবহার করে কয়েকটা অংক করে নিই। তারপরে উৎসাহ অবশিষ্ট থাকলে ছবি দিয়ে বোঝার চেষ্টা করা যাবে হায়ার সেকণ্ডারীর ম্যাজিকটাই বা কেন কাজ করে, আর তার multiple integral সংস্করণে determinant-এর absolute value-ই বা কেন আসে!

33.2 যেখানে substitution-টা বলা আছে

এবার আমরা কিছু অংক দেখব, যেখানে একটা multiple integral দেওয়া থাকবে, এবং একটা substitution বলে দেবে। আমাদের কাজ হবে সেই substitution-টা ব্যবহার করে integral-টা বার করা। একটা সহজ অংক দিয়ে শুরু করা যাক, যেখানে substitution ছাড়াই integral-টা বার করা যায়।

Fig 1



Example 2: Let $E = \{(x,y) \ : \ x,y \geq 0, \quad x+y \leq 1\}$. Compute $\iint_E x+y\,dxdy$ directly. Then use the substitution $x = u+v$ and $y = u-v$ to convert it to an integral in terms of u and v. Check that the new integral has the same value as the original integral.

SOLUTION: E-এর ছবিটা দেখিয়েছি Fig 1-এ। প্রথমে সরাসরি বার করব। তার জন্য স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগাতে হবে।

First part:

$$\begin{aligned}\iint_E x+y\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x+y\,dydx\\ &= \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx\\ &= \int_0^1 x(1-x) + \tfrac{1}{2}(1-x)^2\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

এবার দ্বিতীয় অংশ, substitution লাগানো। তার জন্য তিনটে ধাপ। এক, Integrand-টাকে বদলানো--

Here $(x,y) = g(u,v) \equiv (u+v, u-v)$. **So** $x+y = (u+v)+(u-v) = 2u$.

দুই, integration-এর অঞ্চলটাকে u,v দিয়ে প্রকাশ করা--

$$g^{-1}(E) = \{(u,v) \ : \ u+v \geq 0, \quad u-v \geq 0, \quad (u+v)+(u-v) \leq 1\}$$

এখানে আমরা $(x,y) \in E$ এই শর্তটাকে u,v দিয়ে লিখেছি মাত্র।

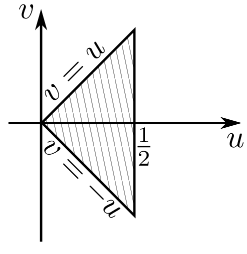
এবার এটাকে খানিকটা দলাইমলাই করে সহজ করলে পাবে--

$$= \{(u,v) \ : \ -u \leq v \leq u, \quad u \leq \tfrac{1}{2}\}.$$

এই জিনিসটার একটা ছবি এঁকে নেওয়া খুব দরকার। নইলে কেবলমাত্র অংকের ভাষায় লেখাটুকু দেখে অঞ্চলটা কীরকম দেখতে সেটা ঠাহর করা যায় না। ছবিটা দেখিয়েছি Fig 2-এ। এই ছবি থেকে বুঝতে পারবে যে $u \geq 0$ হচ্ছে। সেটা কিন্তু অংকের ভাষায় লেখা বর্ণনাটার মধ্যে সরাসরি দেওয়া ছিল না ($-u \leq v \leq u$ শর্তটার মধ্যে লুকিয়ে ছিল)।

এবার তৃতীয় ধাপ, Jacobian-এর determinant-এর absolute value বার করা। এখানে Jacobian-টা হল--

Fig 2



$$J(g(u,v)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

So $|\det(J(g(u,v)))| = |-2| = 2.$

ব্যস্, এবার নতুন integral-টা লিখে ফেলতে পারব--

So the transformed integral is

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^{u} 2u \times 2\, dv du = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^{u} 4u\, dv du.$$

এটাকে কষে ফেললে এরকম হবে--

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^{u} 4u\, dv du &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4u \int_{-u}^{u} dv du \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 8u^2 du = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

as before.

■

এই অংকের integral-টা substitution ছাড়া করাই সহজ ছিল। কিন্তু অনেক অংকে substitution না করলে integral-টা বার করাই প্রায় অসম্ভব। সেরকম অংক আমরা এক্ষুণি দেখব। তার আগে এই অংকটার একটা শিক্ষণীয় দিক দেখাই। এটা থেকে বোঝা যায় কেন আমরা determinant-টার absolute value নিই। আমরা যখন Jacobian লিখি তখন variable-গুলোকে কোনো একভাবে সাজিয়ে নিই। যেমন ধরো এখানে $x = u + v$ এবং $y = u - v$ ছিল। আমরা যখন Jacobian-টা লিখলাম, তখন আমরা x, y-এর মধ্যে x-কে আগে রেখেছিলাম, আর u, v-র মধ্যে u-কে। তাই Jacobian-টা হয়েছিল

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

যদি আমরা x, y-এর মধ্যে ক্রমটা অপরিবর্তিত রেখে u, v-এর ক্রমটা উল্টে দিতাম, তবে Jacobian-টা হয়ে যেত

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

মানে row দুটো স্থানবিনিময় করত। সেক্ষেত্রে determinant-টার চিহ্নও যেত উল্টে। কিন্তু আমরা কোন্ variable-টাকে আগে আর কোন্‌টাকে পরে কল্পনা করছি, তাতে তো আর integral-টা বদলে যেতে পারে না। ফলে determinant-এর চিহ্নটার কোনো গুরুত্ব নেই। সেই কারণেই absolute value-র অবতারণা।

আমরা আগেই বলেছি যে substitution করার সময়ে যখন $\mathbf{x} = g(\mathbf{u})$ বসাই, সেই $g(\cdot)$-টা একটা one-one এবং onto function হতে হয়। কোনো function দেওয়া থাকলে সেটা one-one আর onto হবে কিনা, সেটা নির্ভর করে তার domain এবং codomain-এর উপর। কিন্তু অনেক সময়েই দেখবে যে একটা substitution-এর অংকে এই domain আর codomain-এর কোনো উল্লেখ নেই। তখন নিজেদেরকেই বুদ্ধি করে domain আর codomain নির্বাচন করে নিতে হয়।

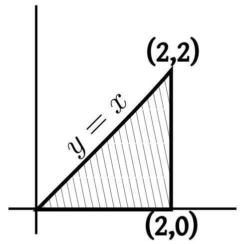


Fig 3

ব্যাপারটা হায়ার সেকণ্ডারীতেও ছিল। যেমন ধরো $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ বার করতে হলে অনেক সময়েই লোকে বলে $x=\sin u$ বসাও। কিন্তু $\sin u$ তো মোটেই one-one নয়, কারণ sin-এর গ্রাফটা ঢেউ-খেলানো, একই value বার বার করে নেয়। সেই জন্য আমরা domain-টা বুদ্ধি করে $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ধরে নিই। নীচের অংকে একইরকম কাজ করতে হবে multiple integral-এর বেলাতে।

Example 3: Show that $\iint_E \frac{dxdy}{\sqrt{(x+y+1)^2-4xy}} = \frac{1}{2}\log_e\frac{16}{e}$ by using the transformation $x=u(1+v)$, $y=v(1+u)$, where E is the triangle with vertices $(0,0)$, $(2,0)$ and $(2,2)$.[5] **(2021, 2008, 2006)**

SOLUTION:এখানে integration-এর অঞ্চলটাকে জ্যামিতির ভাষায় দিয়েছে। সেটাকে ফর্মুলা দিয়ে লিখে নিতে হবে। তার জন্য Fig 3-এর মত একটা ছবি এঁকে নিলে সুবিধা হবে।

> Here the integration is over
>
> $$E=\{(x,y)\ :\ 0\le y\le x,\quad 0\le x\le 2\}.$$
>
> We are using the transformation
>
> $$(x,y)=g(u,v)\equiv(u(1+v),v(1+u)).$$

এই function-এর codomain-টা তো E নিতেই হবে। এবার domain-টা এমনভাবে নেব যাতে function-টা one-one এবং onto হয়। এর জন্য আমরা চেষ্টা করব $(x,y)\in E$ দেওয়া থাকলে তা থেকে (u,v) বার করতে। $v=\frac{y}{1+u}=\cdots=\frac{y(1+v)}{1+v+x}$. এর মধ্যে আর কোনো u নেই, তাই এটা ব্যবহার করে x,y থেকে v বার করতে পারা উচিত। এখানে $v(1+v+x)=y(1+v)$ মানে $v^2+(1+x-y)v-y=0$. এর discriminant হল $(1+x-y)^2+4y>0$. সুতরাং দুটো distinct, real root পাচ্ছি। অর্থাৎ যেকোনো $(x,y)\in E$-এর জন্যই আমরা v-এর দুটো আলাদা value পাচ্ছি। সুতরাং onto হলেও one-one হচ্ছে না। একটু চিন্তা করলেই দেখবে দুটো real root-এর একটা >0 আর অন্যটা <0. সুতরাং যদি আমরা $u,v\ge 0$ শর্তটা চাপিয়ে নিই, তবে function-টা one-one-ও হয়ে যাচ্ছে। আমরা সেটাই করব। কী করে শর্তটা পেলাম, সেটা আর সাতকাহন করে সমাধানে লিখব না--

> To make $g(u,v)$ one-one, we shall assume $u,v\ge 0$.

এবার আমরা সেই তিনধাপে এগোব। প্রথম ধাপে integrand-টা বদলাব। আমাদের integrand-টা ছিল $\left\{(x+y+1)^2-4xy\right\}^{-1/2}$. এর মধ্যে $x=u(1+v)$ আর $y=v(1+u)$ বসিয়ে খানিকক্ষণ নাড়াচাড়া করলেই পাবে--

> Now
>
> $$\frac{1}{\sqrt{(x+y+1)^2-4xy}}=\cdots=\frac{1}{u+v+1}.$$

দ্বিতীয় ধাপে $g^{-1}(E)$ বার করব--

$g^{-1}(E) = \cdots = \left\{(u, v) \ : \ 0 \le v \le 1, \quad v \le u \le \frac{2}{1+v}\right\}.$

তৃতীয় ধাপে Jacobian বার করে রাখি--

The Jacobian matrix is
$$\begin{bmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{bmatrix},$$
with determinant $(1+v)(1+u) - uv = 1+u+v$. Since $u, v \ge 0$, hence its absolute value is $1+u+v$.

এইবার সব মিলিয়ে integral-টা করার পালা--

$$\iint_E \frac{1}{u+v+1} \times (1+u+v)\, dudv = \iint_E dudv = \int_0^1 \int_v^{\frac{2}{1+v}} dudv = \cdots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{16}{e}\right),$$

as required.

■

এই অংকটায় শুরুতে variable-গুলো ছিল x, y. পরে নতুন variable আমদানী করা হল u, v. এই substitution-টা দেওয়া হয়েছিল $x = u(1+v)$ এবং $y = v(1+u)$ হিসেবে, মানে গোড়ার variable-গুলোকে নতুন variable-গুলোর function হিসেবে দিয়েছিল। যেহেতু domain এবং codomain ঠিকভাবে নেওয়ার পরে function-টা one-one এবং onto হয়, তাই আমরা চাইলে নতুন variable-গুলোকে গোড়ার variable-দের function হিসেবেও লিখতে পারতাম। অনেক অংকে function-টা সেইভাবেই দেওয়া থাকে। এরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক এবার।

Example 4: Transform the integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin\phi}{\sin\theta}}\, d\phi d\theta$$

by the substitution

$$x = \sin\phi\cos\theta, \quad y = \sin\phi\sin\theta$$

and find its value.[2+3] **(2007.10bi)**

SOLUTION: এখানে গোড়ার variable-রা হল ϕ আর θ, এবং নতুন variable-রা হল x আর y. লক্ষ করো, এখানে substitution-টাকে দেবার সময়ে নতুন variable-গুলোকে গোড়ার variable-দের function হিসেবে প্রকাশ করেছে।
আমরা প্রথমেই domain আর codomain ঠিকভাবে নিয়ে function-টাকে one-one এবং onto বানিয়ে নেব। তাহলে গোড়ার variable-দেরকে নতুন variable-দের function হিসেবে লিখতে বাধা থাকবে না। এখানে domain-টা তো বলতে গেলে বলেই দিয়েছে, কারণ $(\phi, \theta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, এর ফলে (x, y) থাকবে $\{(x, y) \ : \ x, y \ge 0, \quad x^2 + y^2 < 1\}$-এর মধ্যে। এটাকেই আমরা codomain নেব। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 4-এ।

Here $x = \sin\phi\cos\theta$, and $y = \sin\phi\sin\theta$. To make this bijective, we shall assume $(\phi, \theta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and $(x, y) \in \{(x, y) \ : \ x, y \ge 0, \quad x^2 + y^2 < 1\}$.

এবার তবে গোড়ার variable-দেরকে নতুনদের function হিসেবে লিখে নিই--

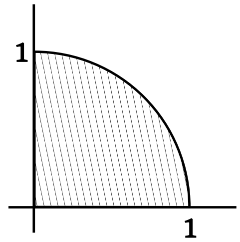


Fig 4

> Then
>
> $$\begin{aligned}\phi &= \sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2},\\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

এবার সেই তিনটে ধাপ। প্রথম ধাপে integrand-এর পরিবর্তন--

> Now, $\sin\phi = \sqrt{x^2+y^2}$ and $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
>
> So
>
> $$\sqrt{\frac{\sin\phi}{\sin\theta}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y}}.$$

দ্বিতীয় ধাপে integration-এর অঞ্চলটাকে নতুন variable দিয়ে লেখা। তা, সে কাজটা আমরা আগেই সেরে ফেলেছি, codomain বার করার সময়ে। Integration-টা হবে $\{(x,y)\ :\ x,y\geq 0,\quad x^2+y^2\leq 1\}$-এর উপরে।
তৃতীয় ধাপ হল Jacobian-এর determinant-এর absolute value বার করা--

> Also,
>
> $$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$
>
> Hence the Jacobian determinant is $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}$.

> Hence the transformed integral is
>
> $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{y(1-x^2-y^2)}}.$$

এই গেল অংকের প্রথম অংশ। এবার দ্বিতীয় অংশে এই integral-টা কষতে হবে। এর জন্য একটা জিনিস আমাদের কাজে লাগবে, সেটা হল beta integral:

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = Beta(a,b),$$

যেখানে $a, b > 0$. আমাদের যে integral-টা বার করতে হবে, তার মধ্যে এই beta integral-টা একাধিক জায়গায় লুকিয়ে রয়েছে।

> We shall first work with
>
> $$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{y(1-x^2-y^2)}}.$$
>
> Substituting $y = \sqrt{t}$ we get
>
> $$\frac{1}{2}\int_0^{1-x^2} \frac{dt}{t^{3/4}\sqrt{1-x^2-t}}.$$

এটা কতকটা beta integral-এর মত বটে, কিন্তু integration-টা 0 থেকে 1-এর বদলে 0 থেকে $1-x^2$ পর্যন্ত। তাই t-এর বদলে $\frac{t}{1-x^2}$ নিয়ে কাজ করলে সুবিধা হতে পারে।

> Substituting $u = \frac{t}{1-x^2}$ we have
>
> $$\frac{1}{2(1-x^2)^{1/4}}\int_0^1 \frac{du}{u^{3/4}\sqrt{1-u}}.$$
>
> Now $\int_0^1 u^{\frac{1}{4}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\,du = Beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$
> So
>
> $$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{y(1-x^2-y^2)}} = Beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2(1-x^2)^{1/4}}.$$

ভিতরের integral-টা তাহলে বেরোলো। এবার বাইরেরটা নিয়ে পড়া যাক--

> Next we shall find $\int_0^1 (1-x^2)^{-1/4}\,dx$.

Putting $x = \sqrt{v}$, we have

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-1/4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 v^{\frac{1}{2}-1}(1-v)^{\frac{3}{4}-1}\,dv = \frac{1}{2}Beta\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right).$$

সব মিলিয়ে তবে দাঁড়ালো--

So the answer is $\frac{1}{2}Beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) Beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

এটাকে খানিকটা কাটাকাটি করার চেষ্টা করে দেখতে পারো। এর জন্য মনে রেখো যে $Beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, এবং $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ■

DAY 34
Substitution (part 2)

গতকাল যে অংকগুলো করছিলাম, সেখানে কী substitution করতে হবে সেটা বলে দিচ্ছিল। অনেক সময়েই কোনো substitution বলে দেওয়া থাকে না। যেমন ধরো, কোনো বাস্তব সমস্যা থেকে যদি একটা multiple integral আসে, তবে তোমাকেই বুঝতে হবে কোন্ substitution লাগালে কাজ হবে (বা আদৌ কোনো substitution লাগবে কিনা)।

34.1 যেখানে substitution-টা বলা নেই

এরকম ক্ষেত্রে কিছু বহুল ব্যবহৃত substitution জানা থাকলে সুবিধা। এগুলো সবই ব্যবহার হয় Cartesian coordinate system থেকে অন্য কোনো coordinate system-এ যাবার জন্য। এবার এদের নিয়ে আলোচনা করব।

34.1.1 Polar coordinates

$\mathbb{R}^2$-র মধ্যে কোনো একটা বিন্দুর অবস্থান যদি Cartesian coordinates-এ হয় (x,y) এবং polar coordinates-এ হয় (r,θ), তবে ওদের মধ্যে সম্পর্কটা হল

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

Substitution-টাকে one-one এবং onto রাখার জন্য আমরা $(x,y) \neq (0,0)$ এবং $r > 0$ আর $\theta \in [0, 2\pi)$ নিয়ে কাজ করি।

Exercise 1: দেখাও যে এর Jacobian-এর determinant-এর absolute value হবে r. ■

এই substitution-টা কাজ আসে সেই সব double integral-এর বেলায় যেখানে integration-এর অঞ্চলটা origin-কে ঘিরে গোলাকার বা কোনো sector-জাতীয় কিছু। কয়েকটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 5-এ।
প্রতিক্ষেত্রেই অঞ্চলটাকে x, y দিয়ে প্রকাশ করার চেয়ে r, θ দিয়ে প্রকাশ করা সহজ। একটা উদাহরণ দেখলে বোঝা যাবে।

Example 5: Evaluate $\iint_E \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, where E is the ring $\{(x,y) \;:\; 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

SOLUTION: এই integral-টাকে x, y ব্যবহার করে repeated integral হিসেবে লেখাই ঝকমারি। কিন্তু E হল origin-কে ঘিরে একটা ring (ছবিতে দেখিয়েছি Fig 6-এ), আর integrand-এও $x^2 + y^2$ রয়েছে, তাই polar coordinates ব্যবহার করলে জীবন সহজতর হবে।

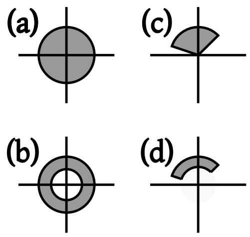


Fig 5

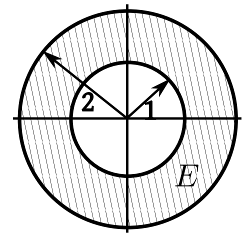


Fig 6

এখানে r থাকবে 1 থেকে 2-এর মধ্যে, আর θ থাকবে $[0, 2\pi)$-এ। আগের অংকেই বলেছি যে, এক্ষেত্রে Jacobian-এর determinant-এর absolute value হল r, তাই--

> Putting $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$ for $r \in [1, 2]$ and $\theta \in [0, 2\pi)$, the absolute value of the Jacobian determinant is r.
> So the transformed integral is
>
> $$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{r}{r^2}\,dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r}\,dr d\theta.$$

এটাকে repeated integral হিসেবে লিখে ফেলা খুবই সহজ--

> So the answer is
>
> $$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r}\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} \log r|_1^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log 2 = 2\pi\log 2.$$

■

Exercise 2: প্রতিক্ষেত্রে $\iint_E f(x, y)\,dxdy$ বার করো। ছবি আঁকতে ভুলো না।

1. $f(x, y) = xy$, $E = \{(x, y) \;:\; x^2 + y^2 \le 1\}$. (এখানে হিসেব থেকে origin-টাকে বাদ রাখতে পারো, যাতে one-one এবং onto নিয়ে সমস্যা না বাঁধে। একটা বিন্দু বাদ দিলেও integral-টা একই থাকবে।)
2. $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $E = \{(x, y) \;:\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad -y \le x \le y\}$.

■

Example 6: The value of the triple integral $\iiint_V (x^2y + 1)\,dxdydz$, where V is the region given by $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le 2$ is

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

(JAM.2020.MCQ24)
SOLUTION:এখানে z-এর কোনো ভূমিকাই নেই বলতে গেলে। তাই integral-টা আসলে $\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2y + 1)\,dxdy$. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 7-এ।

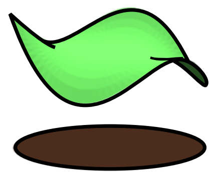


Fig 7

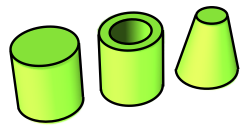


Fig 8

> If we put $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, then the Jacobian is r. So the integral becomes
> $$2\int_0^1\int_0^{2\pi}(r^3\cos^2\theta\sin\theta + 1)r\,d\theta dr.$$

এটা সহজেই করা যাবে। ■

34.1.2 Cylindrical coordinates

Polar coordinates-এর দৌড় $\mathbb{R}^2$-র মধ্যেই সীমাবদ্ধ। যদি সেটাকে $\mathbb{R}^3$-তে খাটাতে চাও, তবে সহজতম পথ হল cylindrical coordinates ব্যবহার করা। এখানে (x, y, z)-এর মধ্যে যেকোনো দুটোকে polar coordinates-এ পরিণত করা হয়, এবং অন্যটাকে অপরিবর্তিত রাখা হয়। যেমন ধরো যদি x, y-কে বদলাই আর z-কে অপরিবর্তিত রাখি, তবে cylindrical coordinates পাব (r, θ, z), যেখানে

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= z. \end{aligned}$$

ওই শেষের $z = z$ বলে বোঝাচ্ছি যে z-টা অপরিবর্তিত আছে। এখানে one-one এবং onto হবার শর্ত হল x, y একই সঙ্গে শূন্য হতে পারবে না (মানে (x, y, z) বিন্দুটা z-axis ছাড়া $\mathbb{R}^3$-র যেখানে খুশি থাকতে পারে), এবং $r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$ হবে।

Exercise 3: এখানেও Jacobian-এর determinant-এর absolute value-টা বার করে রাখো। পরে কাজে লাগবে। ■

এই substitution-টা কাজে লাগে Fig 8-এর মত অঞ্চলের বেলায়। বস্তুতঃ যেকোনো **solid of revolution**-এর বেলাতেই cylindrical coordinates চেষ্টা করে দেখা যায়। Solid of revolution কী জিনিস সেটা একটু বুঝে নেওয়া যাক। আমরা শুরু করব $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে একটা curve নিয়ে, তারপর সেটাকে ঘুরিয়ে $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে একটা solid তৈরী করা হয়। এই জায়গাটায় একটু সাবধান থাকতে হয়, $\mathbb{R}^2$-র x, y এবং $\mathbb{R}^3$-র x, y যেন গুলিয়ে না যায়।

Solid of revolution-এর ধারণা নিয়ে পরে আরো আলোচনা আসবে। আপাততঃ একটা ভিডিও দেখে ধারণাটা স্পষ্ট করে নিতে পারো। পাশের QR code-টা সেই জন্যই। ওটা মোবাইলে স্ক্যান করলে যদি কাজ না হয়, তবে সরাসরি নীচের address-টা টাইপ করে দাও browser-এ। সমস্যা হলে আমাকে জানিও।

`https://arnabc74.github.io/mult/solrev.html`

এরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 7: Let E be the region in $\mathbb{R}^3$ obtained by revolving the $y = x^2 + 1$ curve for $x \in [1, 2]$ around the x-axis. Find $\iiint_E x\,dxdydz$.

SOLUTION: এখানে $y = x^2 + 1$ রয়েছে $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে (Fig 9)। ঘোরানোর ফলে পাচ্ছি Fig 10-এর solid-টা। আমরা এমনভাবে axis-গুলো নিয়েছি, যাতে $\mathbb{R}^2$-এর x-axis আর y-axis-ই $\mathbb{R}^3$-র মধ্যে x-axis আর y-axis থাকে। ফলে ছবিতে z-axis-টা খাড়া না থেকে মাটিতে শুয়ে পড়েছে। যেহেতু এখানে x-axis বরাবর ঘোরানো হয়েছে, তাই আমাদের cylindrical coordinates নেব x-কে অপরিবর্তিত রেখে--

> We shall substitute
>
> $$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= r\cos\theta, \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned}$$
>
> where $x \in [1, 2],\ 0 < r < x^2 + 1$ and $\theta \in [0, 2\pi)$.

এখানে $r > 0$ নিতে হয়েছে one-one এবং onto রাখার জন্য। কিন্তু এর ফলে solid-টা থেকে x-axis-টা বাদ গেছে। কিন্তু তাতে integral-টা বদলাবে না।

> Then the absolute value of the Jacobian determinant is r.

এটা একটা standard result, যেটা তোমায় একটু আগেই বার করতে বলেছিলাম।

Fig 9

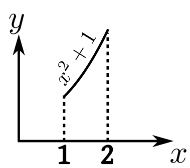
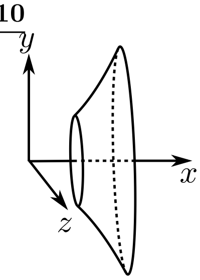


Fig 10



So the integral becomes

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{x^2+1} x\, dr d\theta dx &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} x^3 + x\, d\theta dx \\ &= \int_1^2 2\pi(x^3+x)\, dx \\ &= \frac{21\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

Exercise 4: Find the following integrals.

1. Let A be the solid of revolution obtained by revolving the graph of $y = x^3$ for $x \in [0,1]$ around the x-axis. Find $\iiint_A x + y\, dxdydz$.
2. Let B be the solid of revolution obtained by revolving the graph of $y = e^x$ for $x \in [0,1]$ around the x-axis. Find $\iiint_B y\, dxdydz$.
3. Let C be the solid of revolution obtained by revolving the graph of $y = e^x$ for $x \in [0,1]$ around the y-axis. Find $\iiint_C dxdydz$.

■

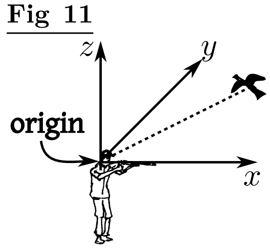
34.1.3 Spherical coordinates

$\mathbb{R}^3$-র জন্য একটা substitution শিখলে। এবার আরেকটার কথা বলি-- spherical coordinates. যদি কোনো বিন্দু (x,y,z)-এর spherical coordinates হয় (r,ϕ,θ), তবে

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi, \\ y &= r\cos\theta\sin\phi, \\ z &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

এক্ষেত্রে one-one এবং onto রাখার জন্য $\mathbb{R}^3$ থেকে z-axis-টা বাদ রাখব, এবং $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ আর $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ নেব। এখানে (r,ϕ,θ)-র সঙ্গে (x,y,z)-এর সম্পর্কটা ছবি দিয়ে মনে রাখলে সুবিধা হবে। এদের মধ্যে r-এর গল্পটা সবচেয়ে

Fig 11



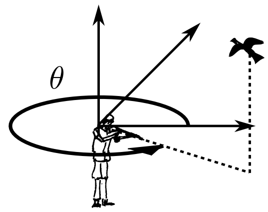


Fig 12

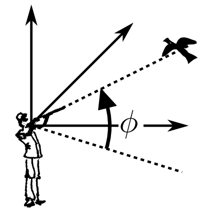


Fig 13

সহজ, origin থেকে (x, y, z)-এর দূরত্বই হল r. এবার θ এবং ϕ-এর ভূমিকা বোঝার জন্য মনে করো (x, y, z)-এ একটা পাখী রয়েছে, আর তুমি origin থেকে ওটার দিকে একটা বন্দুক তাক করতে চাইছ। তোমার বন্দুকটা প্রথমে positive x-axis বরাবর মুখ করে আছে (Fig 11)। বন্দুকটাকে তুমি খালি দুইভাবে ঘোরাতে পারো--horizontal আর vertical-ভাবে। প্রথমে তুমি horizontal-ভাবে বন্দুকটাকে ঘুরিয়ে পাখীর দিকে আনলে (Fig 12)। এর জন্য বন্দুকটাকে counter-clockwise দিকে (মানে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে) যতটা ঘোরাতে হল সেটাই হল θ. যেহেতু পাখীটা তোমার সামনে পিছনে, ডাইনে বাঁয় যেকোনো দিকেই থাকতে পারে, তাই θ-টা 0 থেকে 2π অবধি যা খুশি হতে পারে। এইবার তুমি বন্দুকটাকে vertical-ভাবে নড়াবে (Fig 13) যতটা কোণে ঘোরাতে হল, সেটাই আমাদের ϕ. যদি পাখিটা তোমার উপরে থাকে, তবে ϕ হবে 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত। যদি পাখিটা নীচে থাকে তবে ϕ-টা 0-র চেয়ে কমতে কমতে $-\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত যেতে পারে। যেহেতু z-axis-টা হিসেব থেকে বাদ রাখা আছে, তাই $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ হতে পারছে না।

Exercise 5: এই substitution-টার জন্য Jacobian-এর determinant-এর absolute value বার করো। ■

এই substitution-টা কাজে লাগে বলের মত গোলাকার অঞ্চলের জন্য।

Example 8: Evaluate $\iiint_E \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, where E consists of all those points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ for which $x, y, z > 0$ and whose distance from the origin lies between 1 and 2.

SOLUTION: পাখির দিকে বন্দুক তাক করার গল্প দিয়ে ভাবলে বুঝবে যে এখানে $r \in (1, 2)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

> We shall use the substitution
>
> $$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi, \\ y &= r\cos\theta\sin\phi, \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$
>
> for $r \in (1, 2)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. This is one-one and onto.

যদি আগের অংকটা করে থাকো, তবে জানো যে এখানে Jacobian-এর absolute determinant হয় $r^2|\cos\theta|$. এটাকে একটা standard result বলে ভাবতে পারো। এখানে যেহেতু $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, তাই $\cos\theta > 0$. অতএব--

> The absolute value of the Jacobian determinant is $r^2\cos\theta$.

So the integral becomes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{r^2 \cos\theta}{r^2}\, dr d\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos\theta\, dr d\theta d\phi = \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exercise 6: Evaluate $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, where B is given by

$$B = \{(x,y,z) \;:\; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

■

Exercise 7: Evaluate $\iiint_B x^2+y^2+z^2\, dxdydz$, where B is given by

$$B = \{(x,y,z) \;:\; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

■

Exercise 8: Evaluate $\iiint_A x^2\, dxdydz$, where A is the unit ball centred at the origin in $\mathbb{R}^3$.
HINT: প্রথমে $\iiint_A x^2+y^2+z^2\, dxdydz$ বার করে নিলে সুবিধা হতে পারে। ■

Exercise 9: Show that

$$\iiint_E \frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2} = \pi\left(2 - \tfrac{3}{2}\log 3\right),$$

where E is the region bounded by the sphere $x^2+y^2+z^2=1$.[6] **(2012.10b)** ■

Exercise 10: Evaluate

$$\iiint \frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$$

over the sphere $x^2+y^2+z^2 \le 1$.[5] **(2007.10bii)**
HINT: আগের অংকটাই, কিন্তু ভাষাটা ভুল। এখানে $x^2+y^2+z^2 \le 1$ মোটেই sphere নয়, ওটা একটা ball. অংকের জগতে sphere বলতে কেবল বাইরের খোসাটুকু বোঝায়। ■

DAY 35
Substitution (part 3)

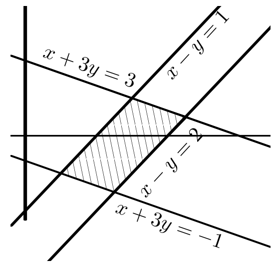


Fig 14

গতকাল আমরা কিছু বহুল-ব্যবহৃত substitution দেখেছি। কোনো কোনো multiple integral করার সময়ে এগুলোতে কাজ চলে না, তখন আবার বুদ্ধি করে বিশেষ কোনো substitution বানিয়ে নিতে হয়। কখনো সেটা multiple integral-টার চেহারা দেখে আন্দাজ করা যায়, কখনো বা বহুল-ব্যবহৃত substitution-গুলোর কোনো একটাকে একটু এদিক-ওদিক করে বানাতে হয়। এরকম বিভিন্ন উদাহরণ দেখব এবার।

35.1 নতুন substitution তৈরী

Example 9: Evaluate $\iint_R xy\,dxdy$ where R is the parallelogram with sides $x+3y=-1$, $x+3y=3$, $x-y=1$, $x-y=2$.[3] **(2012.1h)**

SOLUTION: ছবিটা দেখে নাও Fig 14-এ। এখানে parallelogram-টার দুটো পাশে আছে $x+3y$-ওয়ালা জিনিস, আর বাকি দুটোতে $x-y$-ওয়ালা। এখান থেকেই আন্দাজ করতে পারছি যে এই substitution-এ কাজ হতে পারে--

> Let $u = x + 3y$ and $v = x - y$.

এর one-one এবং onto হওয়া নিয়ে সন্দেহ নেই, কারণ u, v দেওয়া থাকলেই তৎক্ষণাৎ তুমি তা থেকে x, y-এর ঠিক একটা করেই value পেয়ে যাবে--

> Then, clearly, $x = \frac{u+3v}{4}$ and $y = \frac{u-v}{4}$.

এবার সেই তিন ধাপের গল্প। প্রথম ধাপে integrand-এর পরিবর্তন--

> The integrand is $xy = \frac{(u+3v)(u-v)}{16} = \frac{u^2+2uv-3v^2}{16}$.

দ্বিতীয় ধাপে integration-এর অঞ্চলটাকে u, v দিয়ে লেখা। এক্ষেত্রে সেটা খুবই সহজ--

> The range of u is $[-1, 3]$ and range of v is $[1, 2]$.

তৃতীয় ধাপে Jacobian--

> The Jacobian is $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, with absolute determinant $\frac{1}{4}$.

সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

So the transformed integral is

$$\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}\frac{u^2+2uv-3v^2}{16}\times\frac{1}{4}\,dvdu = \frac{1}{64}\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}u^2+2uv-3v^2\,dvdu = \cdots.$$

বাকিটুকু তোমার করার জন্য রইল। ■

Exercise 11: Show that the integral $\iint_E e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$, where E is the triangle with vertices $(0,0)$, $(0,1)$ and $(1,0)$ is $\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.[10] **(2020.4a)** ■

এবার কিছু অংক দেখব যেখানে কোনো পরিচিত substitution-কে সামান্য বদলে কাজ চালানো যাবে।

35.2 পরিচিত substitution-দের রকমফের

Exercise 12: Let $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 4x^2+9y^2\leq 4\}$. Evaluate

$$\iint_B e^{-(4x^2+9y^2)}\,dxdy.$$

(2010.9c)

HINT: এখানে B হল একটা ellipse (ভিতরটা সুদ্ধ)। যদি পুরো গোল হত, তবে polar coordinates লাগানো যেত। সেই substitution-টাকে মাথায় রেখে আমরা এখানে এইটা ব্যবহার করতে পারি--

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}r\cos\theta \\ y &= \tfrac{1}{3}r\sin\theta. \end{aligned}$$

এখানে $0<r<2$ এবং $\theta\in[0,2\pi)$ নিলেই চলবে। লক্ষ করো $r>0$ নেওয়ায় origin-টা বাদ গেল (one-one আর onto রাখার জন্য), কিন্তু একটা বিন্দুর জন্য Riemann integral বদলায় না।
■

Exercise 13: Evaluate the integral $\iint_E \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, where E is the region bounded by the circle $x^2+y^2=2ax$.[6] **(2021.9)**
HINT: Circle-টার centre আর radius বার করে নাও। ■

Exercise 14: Evaluate the integral

$$\iint_E [2a^2-2a(x+y)-(x^2+y^2)]\,dxdy$$

where E is the region bounded by the circle

$$x^2+y^2+2a(x+y)-2a^2=0.$$

[5] **(2006.10ai)**

■

Exercise 15: Evaluate

$$\iiint e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dxdydz$$

over the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1 \quad (a,b,c>0).$$

[5] **(2011.9b)**
HINT: Spherical coordinates-এর সঙ্গে মিল পাওয়া যাচ্ছে? ■

Exercise 16: Evaluate

$$\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz,$$

where D is the closed region

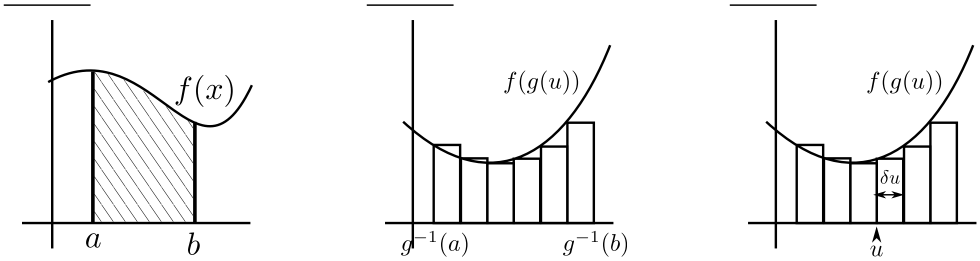
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$$

[5] **(2006.10aii)**
HINT: আগের অংকটার মতই চেষ্টা করো। ■

35.3 ম্যাজিকের পিছনের রহস্য

হায়ার সেকণ্ডারীতে আমরা যে $x = g(u)$ বসানোর সময়ে $dx = g'(u)\,du$ লিখতাম, কিংবা multiple integral-এর substitution-এর বেলায় যে Jacobian-এর determinant-এর absolute value লিখছি, এগুলো এতক্ষণ সবই ম্যাজিকের মত করে যাচ্ছিলাম। এবার আমরা ছবি দিয়ে এদের রহস্য বোঝার চেষ্টা করব।
একটা হায়ার সেকণ্ডারীর উদাহরণ নিয়ে শুরু করা যাক। ধরো আমরা $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করতে চাই, মানে Fig 15-এ দেখানো অঞ্চলটার area. কেউ আমাদের বলেছে $x = g(u)$ বসাতে, যেখানে g হল strictly increasing. ধরো আমরা substitution-এর কায়দাকানুন কিচ্ছু জানিনা। একেবারে সহজ বুদ্ধিতে এগোব। দেখব কোথায় হোঁচট খাই। সেখান থেকেই ম্যাজিকের রহস্যটা বেরোবে।
আমরা integrate করছিলাম $f(x)$-কে। এর মধ্যে $x = g(u)$ বসালে হয় $f(g(u))$. আবার $x = a$ হলে $u = g^{-1}(a)$ এবং $x = b$ হলে $u = g^{-1}(b)$. সুতরাং ফস্ করে মনে হতে পারে যে $f(g(u))$-কে $g^{-1}(a)$ থেকে $g^{-1}(b)$ পর্যন্ত integrate করলেই বুঝি চলবে! যদি চলত, তবে $\int_a^b f(x)\,dx$ আর $\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,du$ সমান হত। কেন এরা আসলে সমান নয়,

Fig 15 **Fig 16** **Fig 17**



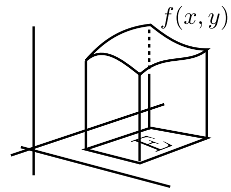


Fig 18

সেটা ছবি দিয়ে বোঝা যাক। আমরা জানি integral হল Riemann sum-এর limit. আমরা প্রথমে u-এর integral-টার জন্য একটা Riemann sum নিয়ে শুরু করি (Fig 16)। এখানে আমরা $\left[g^{-1}(a), g^{-1}(b)\right]$-এর মধ্যে অনেকগুলো ঘন ঘন বিন্দু নিয়েছি-- এবং এদের প্রতিটার উপরে গ্রাফ অব্ধি একটা করে rectangle তুলেছি। এদের মোট area-ই হল Riemann sum-টা। এটাকে সহজে লিখে বোঝানোর জন্য এইভাবে এগোব। ধরো যেকোনো একটা rectangle নিলাম (Fig 17)। এর প্রস্থ δu এবং উচ্চতা $f(g(u))$. সুতরাং area হল $\delta u \times f(g(u))$. এরকম সব rectangle-এর মোট area-কে লিখব--

$$\sum f(g(u_i))\delta u.$$

এখানে sum-টা কোথা থেকে শুরু কোথায় শেষ সেটা আর লিখে জটিল করলাম না। এইভাবে সহজে লেখার সুবিধা হল এর সঙ্গে $\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,du$-এর মিলটা সুস্পষ্ট।
এর সঙ্গে তুলনা করব x-এর integral-টার Riemann sum-এর। প্রতিটা u-এর জন্যই একটা করে $x = g(u)$ পাবে। এখানেও গ্রাফ অব্ধি rectangle তুলে যোগ করব। ফলে পাব--

$$\sum f(x)\delta x.$$

দুইক্ষেত্রের rectangle-গুলোকে তুলনা করো। ওদের উচ্চতা দুই ক্ষেত্রেই সমান, কারণ $f(g(u)) = f(x)$. কিন্তু ওদের প্রস্থগুলো বদলে গেছে। আগে যেখানে ছিল δu, এখন সেখানে δx. তার মানে x-এর বেলায় যে rectangle-গুলো রয়েছে, তাদের সমান area করতে হলে u-এর rectangle গুলোকে $\frac{\delta x}{\delta u}$ দিয়ে গুণ করে নিতে হবে। যেহেতু আমরা rectangle-গুলোকে ক্রমশঃই সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করে আনব, তাই $\frac{\delta x}{\delta u}$ ক্রমশঃ $\frac{dx}{du} = g'(u)$-এর দিকে এগিয়ে যাবে। সুতরাং x-এর integral-এর সমান হতে গেলে $f(g(u))$-কে integrate করলেই চলবে না, integrate করতে হবে $f(g(u))g'(u)$-কে।
এই গেল সহজ ভাষায় হায়ার সেকণ্ডারীর ম্যাজিকের রহস্য। এবার আসি multiple integral-দের কথায়। ছবি আঁকার সুবিধার জন্য আমরা double integral দিয়ে বোঝাব। ধরো আমরা এই double integral-টা বার করতে চাই $\iint_E f(x, y)\,dxdy$, মানে Fig 18-এ দেখানো অঞ্চলটার volume. কেউ আমাদের বলেছে $(x, y) = g(u, v) \equiv (g_1(u, v), g_2(u, v))$ বসাতে, যেখানে g হল one-one এবং onto. আমরা আবার সহজ বুদ্ধিতে এগোব। আমরা integrate করছিলাম $f(x, y)$-কে। এর মধ্যে $x = g_1(u, v)$ আর $y = g_2(u, v)$ বসালে হয় $f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \equiv f(g(u, v))$. সুতরাং প্রথমেই দেখব যে $f(g(u, v))$-কে $g^{-1}(E)$-এর উপরে integrate করলেই চলবে কিনা! যদি চলত, তবে

$\iint_E f(x, y)\,dxdy$ আর $\iint_{g^{-1}(E)} f(g(u, v))\,dudv$ সমান হত।

কিন্তু এরা যে আসলে সমান নাও হতে পারে, সেটা ছবি দিয়ে বোঝা যাক।
আমরা uv-integral-এর মেঝেটাকে ছোটোছোটো টাইলে ভেঙে নেব, এবং প্রতিটা টাইলের উপর একটা করে ব্লক খাড়া করব। এদের মোট volume হল uv-integral-টার জন্য একটা Riemann sum. যে কোনো একটা টাইল নাও, যার সাইজ ধরো $\delta u \times \delta v$. এর উপরে যে ব্লকটা খাড়া করেছি তার উচ্চতা $f(g_1(u, v), g_2(u, v))$. তার মানে ব্লকটার volume হল $f(g_1(u, v), g_2(u, v))\delta u\delta v$. এরকম সব ব্লকের মোট volume হবে--

$$\sum f(g_1(u, v), g_2(u, v))\delta u\delta v.$$

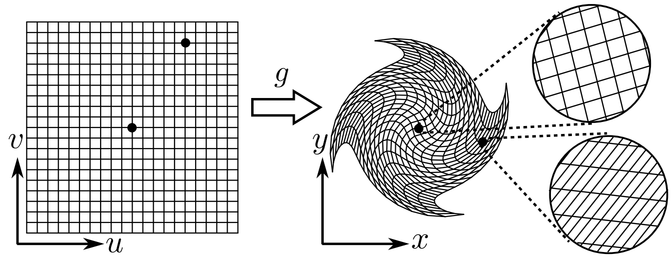


Fig 19

এর সঙ্গে তুলনা করব xy-integral-টার Riemann sum-এর। যেহেতু $(x, y) = g(u, v)$, তাই xy-টাইলগুলো পাওয়া যাবে uv-টাইলগুলোর উপর g লাগিয়ে দিলে। ফলে xy-টাইলগুলোর একটা বাঁকাচোরা প্যাটার্ন হবে (Fig 19)। এই ছবিটা আমরা এ বইতে আগেও দেখেছি differentiation-এর আলোচনার সময়ে। তখনই বলেছিলাম যে uv-টাইলগুলো যথেষ্ট ছোটো হলে xy-টাইলগুলো প্রায় একেকটা parallelogram-এর মত হয়। এবার লক্ষ করো, uv-টাইলগুলোর উপরের ব্লক এবং xy-টাইলের উপরের ব্লকের উচ্চতা সমান। পার্থক্য কেবল মেঝেটা নিয়ে, একটার বেলায় rectangle অন্যটার বেলায় (প্রায়) parallelogram. সুতরাং দুই ধরণের ব্লকের volume-এর তুলনা করা মানে মেঝের area-গুলোর মধ্যে তুলনা করা। তার জন্য Fig 20-এ একটা uv-টাইল এবং তা থেকে পাওয়া xy-টাইলের ছবি দেখিয়েছি। যেহেতু uv-টাইলের মেঝেটা rectangle, তাই তার area বার করা সহজ, $\delta u \delta v$. এবার xy-টাইলটার area বার করব। এর জন্য parallelogram-এর area-র একটা ফর্মুলা জানা থাকলে সুবিধা হবে। ধরো একটা parallelogram আছে Fig 21-এর মত। এর area বার করার জন্য vector দুটোকে পাশাপাশি লিখে একটা matrix বানাতে হবে, এবং তার determinant-এর absolute value নিতে হবে। চট্ করে কয়েকটা অংক করে ফর্মুলাটা সড়গড় হয়ে নাও।

Exercise 17: নীচের প্রতিক্ষেত্রে দুটো vector দেওয়া আছে, $\mathbf{u}$ আর $\mathbf{v}$. তোমার কাজ হল ওদের মধ্যের parallelogram-টার area বার করা। প্রতিক্ষেত্রে parallelogram-টার ছবি এঁকে নিতে ভুলো না।

1. $\mathbf{u} = (1, 0),\ \mathbf{v} = (0, 1)$.
2. $\mathbf{u} = (0, 1),\ \mathbf{v} = (1, 0)$.
3. $\mathbf{u} = (1, 2),\ \mathbf{v} = (2, 1)$.
4. $\mathbf{u} = (1, 1),\ \mathbf{v} = (2, 2)$.

■

এবার আবার Fig 20-এর দিকে চোখ ফেরানো যাক। যখন uv-টাইলটার A থেকে B-তে যাব, তখন আমরা xy-টাইলটার P থেকে S-এর যাচ্ছি। এখানে v-কে স্থির রেখে খালি u-কে বদলানো হচ্ছে। টাইলগুলো যথেষ্ট ছোটো নিয়ে কাজ করছি, তাই খুব সামান্যই বদলাচ্ছি u-টা। ফলে x বদলাচ্ছে মোটামুটি $\frac{\partial x}{\partial u} \times \delta u$ পরিমাণ। এখানে partial derivative এল, কারণ

Fig 20

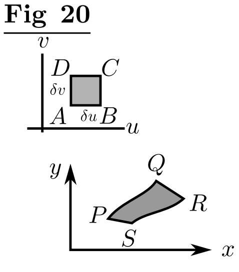
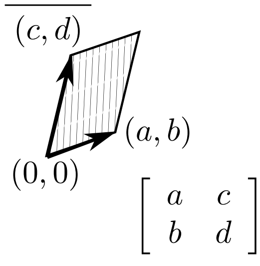


Fig 21



আমরা যখন AB বরাবর চলছি, তখন খালি u বদলাচ্ছে, v নয়। একইভাবে y বদলাচ্ছে $\frac{\partial y}{\partial u} \times \delta u$. সুতরাং P থেকে S অব্দি একটা তীর চিহ্ন আঁকলে সেটাকে vector হিসেবে মোটামুটিভাবে $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}) \times \delta u$ বলা যায়। একইভাবে uv-টাইলে A থেকে D পর্যন্ত গেলে xy-টাইলে যাওয়া হবে P থেকে Q পর্যন্ত, এবং তখন vector-টা হবে $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}) \times \delta v$. সুতরাং xy-টাইলটার area মোটামুটি দাঁড়াচ্ছে $\delta u \delta v$ গুণ এই Jacobian-টার determinant-এর absolute value--

$$J(g(u,v)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

সুতরাং uv-টাইলের উপরের ব্লকটার volume যদি xy-টাইলের উপরের ব্লকের সমান করতে চাও তবে $|\det(J(g(u,v)))|$ দিয়ে গুণ করে নিতে হবে। এবং সেখান থেকেই আসছে substitution-এর ফর্মুলাটা--

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \iint_{g^{-1}(E)} f(g(u,v))|\det(J(g(u,v)))|\,dudv.$$

সাবধান এই যুক্তিটা কিন্তু অসম্পূর্ণ, কারণ আমরা পদে পদে approximate করেছি--

- এক, xy-টাইলের বাঁকা পাশগুলোকে সোজা ধরে নিয়েছি,
- দুই, খালি সোজা ধরেই ক্ষান্ত হই নি, টাইলগুলোকে parallelogram-ও ধরেছি।
- তিন, সেই parallelogram-এর বাহুর দৈর্ঘ্য বার করার সময়ে ফের derivative দিয়ে approximate করেছি।

সুতরাং আমরা xy-টাইলের উপরে ব্লকগুলোর যে volume বার করেছি, তাতে কিছুটা ভুল থেকে যাচ্ছে। এ কথা ঠিক যে টাইলগুলো যতই ছোটো হবে, ভুলের পরিমাণও ততই কমবে। কিন্তু তখন ওদিকে ব্লকের সংখ্যাও তো বেড়ে যাচ্ছে প্রচুর। প্রচুরসংখ্যক ব্লকের প্রত্যেকটাতেই যদি একটু করেও ভুল হয়, তবে মোট ভুলের পরিমাণ যে "একটু" না হয়ে "অনেক" হয়ে যাচ্ছে না, তার গ্যারান্টি আমাদের আলোচনার মধ্যে কোথায়? যেমন এই প্রশ্নটার উত্তর চট্ করে দেওয়া মুস্কিল--"ভারতের সব মন্ত্রীরা যদি এক লক্ষ টাকা করে দান করেন তবে বেশী টাকা উঠবে, নাকি সব চাষী যদি এক টাকা করে দান করেন?"
তবে আমাদের এখানে দুশ্চিন্তার কোনো কারণ নেই। আরেকটু অংক কষলে এমন গ্যারান্টি সত্যিই পাওয়া যায় যে, মোট ভুলের পরিমাণ শূন্যের দিকে যাবে। তবে এই বইয়ের স্বল্প পরিসরে আমরা সে গুরুগম্ভীর আলোচনার মধ্যে যাব না।

DAY 36
Volume

Multiple integral-এর অন্যতম বড় প্রয়োগ হল volume বার করার কাজে। এর জন্য তিনটে কায়দা আমরা আলোচনা করব--

- প্রথম কায়দাটা আমরা আগেই দেখেছি--তাঁবুর নীচের volume বার করা। তাঁবুর ছাদটা হল একটা $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-এর গ্রাফ, যেটা xy-plane-এর উপরে শূন্যে ভাসছে। তাঁবুর মেঝেটা হল xy-plane-এর গায় একটা অঞ্চল D. তবে তাঁবুর volume হবে
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$
এইটা আমরা আগেই দেখেছি।
- কিন্তু যদি এমন কোনো কিছুর volume বের করতে হয়, যেটাকে তাঁবুর অন্দরমহল বলে কল্পনা করা যাচ্ছে না? যেমন Fig 22-এর মত কিছু একটা? এক্ষেত্রেও volume-টাকে integral দিয়ে প্রকাশ করা যায়, কিন্তু তার জন্য triple integral লাগবে--
$$\iiint_V dxdydz.$$
এইটা সবচেয়ে general হলেও, ব্যবহার করা সবচেয়ে কঠিনও বটে, কারণ V-টা বদখত কিছু একটা হলে triple integral বার করা মজাদার নাও হতে পারে।

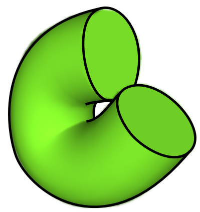


Fig 22

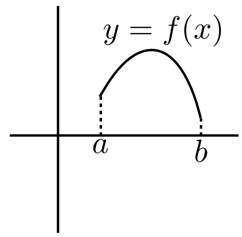


Fig 23

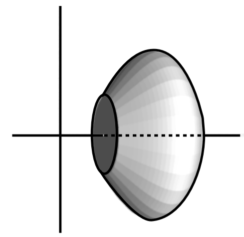


Fig 24

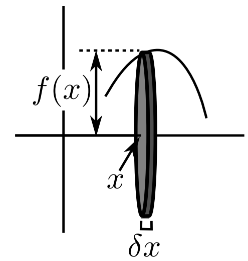


Fig 25

- কোনো কোনো ক্ষেত্রে অবশ্য volume বার করতে triple বা double integral না ব্যবহার করে স্রেফ একটা single integral-এই কাজ হয়ে যায়। এরকম একটা ক্ষেত্র হল যাকে বলে solid of revolution. ধরো Fig 23-এর মত একটা function-এর গ্রাফ আছে, x-axis-এর একপাশে। সেটাকে যদি x-axis-কে ঘিরে ঘোরাই, তবে Fig 24-এর মত একটা solid of revolution পাবে। এর volume হল

  $$\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

  এই ফর্মুলাটা মনে রাখা শক্ত নয়-- মনে করো যেন একটা পাতলা ফালি কেটে নিয়েছ Fig 25-র মত করে। সেই ফালিটা প্রায় একটা পাতলা cylinder-এর মত, যার radius হল $f(x)$ এবং পুরুত্ব হল δx. সুতরাং ফালিটার volume হবে মোটামুটিভাবে $\pi(f(x))^2\,\delta x$. এরকম সব ফালির মোট volume বার করার জন্য পুরোটাকে a থেকে b পর্যন্ত integrate করতে হবে। এইভাবে ফর্মুলাটা মনে রাখা সুবিধাজনক হলেও, এই "যুক্তি"-তে কিন্তু একটা গোঁজা রয়েছে। ফালিগুলো কোনোটাই ঠিক cylinder নয়, ওর দুই পাশের radius-এর সামান্য তারতম্য থাকতেই পারে। ফালিগুলো যতই পাতলা করবে, ততই এই তারতম্যটা কম হবে ঠিকই, কিন্তু তখন ফালির সংখ্যাও প্রচুর বেড়ে যাবে। সেই প্রচুরসংখ্যক ফালির প্রত্যেকটাতেই যদি অল্প একটু করেও ভুল হয়, সেই ভুলগুলো জমে জমে অনেক বড় ভুল হয়ে যাবে না তার গ্যারান্টি কোথায়? একটু আগেই যে "মন্ত্রীদের এক লাখ বনাম চাষীদের এক টাকা"-র উপমা দিয়েছিলাম, এখানেও সেই একই ব্যাপার। এখানে কিন্তু এই গ্যারান্টিটা cylindrical coordinates ব্যবহার করে তুমি নিজেই দিতে পারবে।

36.1 Double integral

এবার কিছু অংক দেখব, যেখানে double integration দিয়ে কোনো তাঁবুর মত জিনিসের volume বার করা হবে।

Exercise 18: Show that the volume included between the elliptical paraboloid $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ and the xy-plane is $\frac{\pi a^4(p+q)}{8pq}$. [10] **(2020.4b)**

HINT: এরকম অংকে কীসের volume বার করতে হবে, সেটাকে কল্পনা করতে পারাটা খুব কাজে লাগে। সেখান থেকেই বোঝা যায় integral কীভাবে নিতে হবে। এখানে Fig 26-এ paraboloid আর cylinder-টা দেখিয়েছি, আর Fig 27-এ

Fig 26

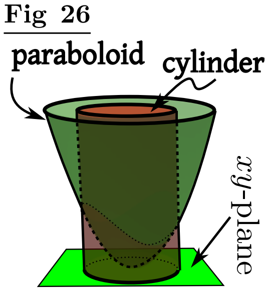
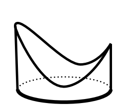


Fig 27



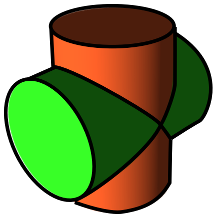


Fig 28

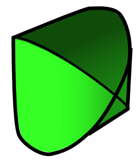


Fig 29

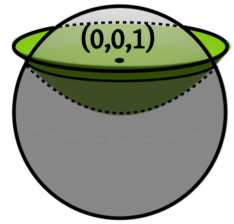


Fig 30

রয়েছে তাদের intersection-টা, যেটার volume বার করতে হবে। লক্ষ করো, এটাকে একটা তাঁবু হিসেবে ভাবলে এর ছাদটা পুরোটাই এসেছে paraboloid-টা থেকে। তাই integral দিয়ে লিখলে হবে--

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2} \frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\,dxdy.$$

এবার polar coordinate লাগাও। ■

Exercise 19: Show that the volume common to the cylinders $x^2+y^2=a^2$ and $x^2+z^2=a^2$ is $\frac{16a^3}{3}$.[6] **(2021.13)**
HINT: আমরা সাধারণতঃ $x^2+y^2=a^2$ দেখলে সেটাকে একটা circle বলেই মনে করি। এখানে সেটা cylinder হয়ে গেল কী করে? আসলে এখানে কাজ হচ্ছে (x,y,z) নিয়ে। এদিকে $x^2+y^2=a^2$-এর মধ্যে কোনো z নেই। তার মানে (x,y)-কে circle-এর উপরে নিয়ে যা খুশি z বসানো যেতে পারে। এর ফলে xy-plane-এর circle-টাকে z-axis বরাবর টেনে গেলে যে cylinder-টা হয়, সেটাই পাবে। একইভাবে $x^2+z^2=a^2$ হল xz-plane-এ আঁকা একটা circle-কে y-axis বরাবর টেনে পাওয়া cylinder. এই দুটো cylinder-কে দেখিয়েছি Fig 28-এ। এদের intersection রয়েছে Fig 29-এ। Integral-টা হল

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy.$$

এবার polar coordinate লাগাও। ■

Exercise 20: Compute the volume of the solid bounded by the sphere $x^2+y^2+z^2=4$ and the surface of the paraboloid $x^2+y^2=3z$ containing the point $(0,0,1)$.[6] **(2011.10bor)**
HINT: Fig 30 দেখে নিলে সুবিধা হতে পারে।
■

36.2 Solid of revolution

এবার আমরা বিভিন্ন solid of revolution-এর volume বার করা শিখব। মূল ব্যাপারটা আগেই বলেছি, সেটা একটা উদাহরণ দিয়ে মনে করিয়ে দিচ্ছি।

Example 10: যদি $y=x^2$-এর গ্রাফটাকে $x=0$ থেকে $x=2$-এর মধ্যে ঘোরাই y-axis-কে ঘিরে, তবে Fig 31-এর মত একটা paraboloid পাবে। একে বলে একটা paraboloid. এর volume বার কর।
SOLUTION: এখানে y যাচ্ছে 0 থেকে $2^2=4$ পর্যন্ত। এর মধ্যে কোনো একটা y নাও এবং সামান্য একটু বাড়াও, δy পরিমাণ। তবে গ্রাফের সেই অংশটুকু ঘোরার দরুণ paraboloid-টার যে অংশটা পাবে সেটা একটা চাকতির মত (Fig

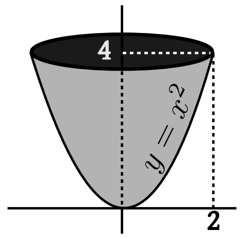


Fig 31

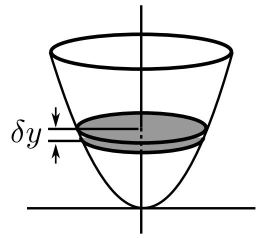


Fig 32

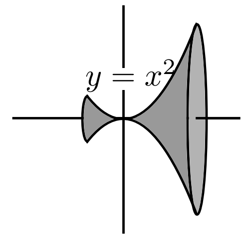


Fig 33

32), যেটা প্রায় একটা cylinder. এর radius হল $\sqrt{y}$ এবং উচ্চতা δy. সুতরাং এর volume হল $\pi(\sqrt{y})^2\delta y$. এরকম সব পাতলা পাতলা চাকতি মোট volume বার করে যদি $\delta y \to 0$ করা যায়, তবে পাবে $\int_0^4 \pi y\, dy$. আগেই বলেছি এই "যুক্তি"-তে গোঁজা আছে। এটা খালি ফর্মুলাটা মনে রাখার কায়দা মাত্র। সুতরাং গুছিয়ে উত্তরটা লেখার সময়ে শুরুই করব এই ফর্মুলাটা দিয়ে--

> Since $x \in [0, 2]$, we have $x = \sqrt{y}$.
> By the standard formula for solid of revolution the volume is
>
> $$\int_0^4 \pi(\sqrt{y})^2\, dy = \pi \int_0^4 y\, dy = 8\pi.$$

লেখার কায়দাটা বুঝে নাও। যে axis-কে ঘিরে ঘোরাচ্ছ, প্রথমে সেই variable-টার function হিসেবে লিখে নিতে হবে। তাই এখানে x-কে y-এর function হিসেবে লিখে নিলাম। সমস্যা হল $y = x^2$ হলে $x = \sqrt{y}$ যেমন হতে পারে, তেমনি $x = -\sqrt{y}$-ও হতে পারে। যেহেতু $x \in [0, 2]$ নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই $x = \sqrt{y}$ নিলাম। যদি $x = g(y)$ হত, তবে volume-এর ফর্মুলাটা হত $\int_a^b \pi g(y)^2\, dy$. ■

Example 11: আবার সেই $y = x^2$-ই নেব। এবার ঘোরাব x-axis-কে ঘিরে, $x = -1$ থেকে $x = 2$ অবধি (Fig 33)। এখানে volume কী হবে?

SOLUTION: ঘোরাচ্ছি x-axis-কে ঘিরে। তাই y-কে লিখে নিতে হবে x-এর function হিসেবে। তা, এখানে সেভাবেই দেওয়া আছে। সুতরাং--

> The volume is
>
> $$\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \cdots = 3.$$

■

এবার নিজে নিজে এই অংক কয়টা করো।

Exercise 21:

1. $y = 2x + 1$-কে ঘোরানো হল x-axis-কে ঘিরে, $x = 2$ থেকে $x = 3$ পর্যন্ত।
2. $y = \frac{1}{x}$-কে ঘোরানো হল y-axis-কে ঘিরে, $y = 1$ থেকে $y = 3$ পর্যন্ত।

3. $y = \cos x$-কে ঘোরানো হল x-axis-কে ঘিরে, $x = -\frac{\pi}{2}$ থেকে $x = \frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত।

4. $y = e^x$-কে ঘোরানো হল x-axis-কে ঘিরে, $x = 2$ থেকে $x = 3$ পর্যন্ত।

5. $y = \sin x$-কে ঘোরানো হল x-axis-কে ঘিরে, যেখানে $x \in [0, 1]$.

6. $y = \sin x$-কে ঘোরানো হল y-axis-কে ঘিরে, যেখানে $x \in [0, 1]$.

7. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$-কে ঘোরানো হল x-axis-কে ঘিরে, যেখানে $x \in [-1, 2]$.

■

সর্বদাই যে একটা কোনো axis-কে ঘিরেই ঘোরাতে হবে, এমন কোনো কথা নেই। যেমন নীচের অংকে।

Example 12: আবার সেই $y = x^2$-এর গ্রাফ। এর যে অংশটা $x = 1$ থেকে $x = 2$-এর মধ্যে আছে, সেটাকে ঘোরাও $x = 2$ লাইনকে ঘিরে (Fig 34)। কত volume হবে?

SOLUTION: এখানেও সেই চাকতির কায়দা খাটবে। যে লাইনকে কেন্দ্র করে ঘোরাচ্ছি, সেটা কোনো axis নয় বটে, কিন্তু y-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল। তাই এখানেও আমরা y-এর function হিসেবে লিখে নেব, $x = \sqrt{y}$. তাই চাকতির radius হবে $2 - \sqrt{y}$. তাই volume-টা হবে--

$$\int_1^4 \pi(1 - \sqrt{y})^2 \, dy = \cdots = \frac{7\pi}{6}.$$

■

Exercise 22: নীচের প্রতিক্ষেত্রে volume বার করো।

1. $y = x^2$-কে ঘোরানো হল $x = 2$-কে কেন্দ্র করে, যেখানে $x \in [0, 1]$.

2. $y = x^2$-কে ঘোরানো হল $y = 2$-কে কেন্দ্র করে, যেখানে $x \in [0, 1]$.

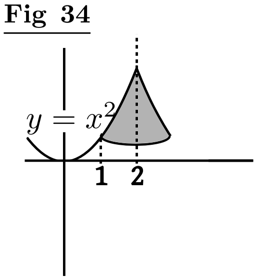
3. $y = e^x$-কে ঘোরানো হল $x = 1$-কে কেন্দ্র করে, যেখানে $x \in [0, 1]$.

■

Exercise 23: Obtain the volume of the catenoid formed by revolution about the x-axis of the area bounded by the catenary

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

Fig 34



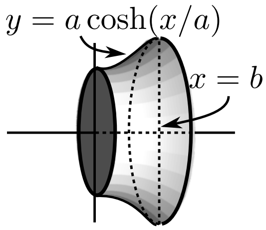


Fig 35

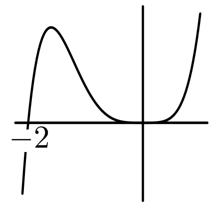


Fig 36

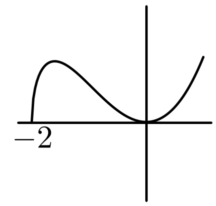


Fig 37

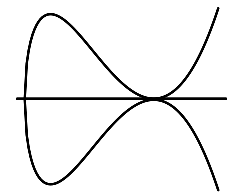


Fig 38

the y-axis, the x-axis and an ordinate.[3] **(2004.9c)**

HINT: এখানে ordinate বলে একটা কথা ব্যবহার করেছে। এর মানে এখানে y-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল কোনো লাইন। লাইনটা কোথা দিয়ে টানতে হবে বলে দেয় নি। তাই ধরে নেব $x = b$ দিয়ে টানব, যেখানে $b > 0$ যা খুশি একটা সংখ্যা। উত্তরটা হবে b-এর একটা function. খামোখা $b > 0$ নিলাম কেন? কারণ, symmetry-র কারণে $b < 0$ নিলেও একই volume পাবে।

হয়তো জানো যে, $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$-এর আরেক নাম হল $\cosh x$. সুতরাং আমাদের বেলায় $y = a\cosh\frac{x}{a}$. একবার Fig 35 দেখলেই বুঝবে যে এখানেও চাকতির কায়দাটা খাটবে।

■

Exercise 24: The volume of the solid of revolution of the loop of the curve $y^2 = x^4(x+2)$ about the x-axis (rounded off to 2 decimal places) is ... . **(JAM.2019.NAT51)**

HINT:

এই অংকে curve-টা যে কীরকম দেখতে সেটা বোঝাই সমস্যা। সেটা একবার বুঝে গেলে বাকিটুকু সহজই। প্রথমেই লক্ষ করো "y^2 = কোনো একটা function of x" বলেছে। Function-টা হল $x^4(x+2)$. এটা একটা polynomial, যার দুটোই root, একটা হল 0 (সেটা চারবার এসেছে), আর অন্যটা −2. সুতরাং গ্রাফটা Fig 36-এর মত। যেহেতু y^2-কে এর সমান হতে হবে, তাই একে ≥ 0 হতে হবে। মানে $x \geq -2$ হতে হবে। যখনই এটা > 0 হবে, তখনই ঠিক দুটো করে y পাবে, একটা প্লাস একটা মাইনাস। বড় সংখ্যাদের positive square root বড় হয়, ছোটোদের ছোটো, তাই খালি positive square root-টুকু নিলে মোটামুটি Fig 37-এর মত কিছু একটা আসবে। এরই reflection ঝুলবে x-axis-এর নীচে। তাই আন্দাজ করতে পারছ চেহারাটা কীরকম হবে (Fig 38)। দেখতেই পাচ্ছ, এর মধ্যে একটা loop আছে। আমরা খালি সেই loop-টাকে ঘুরিয়ে Fig 39-র মত একটা solid পাব। ঘোরানোর সময়ে কিন্তু পুরো loop-টা ঘোরানোর দরকার নেই, খালি যেকোনো একটা পাশ ঘোরালেই হবে। ধরো আমরা positive পাশটা ঘোরাচ্ছি। সেক্ষেত্রে $y = \sqrt{x^4(x+2)} = x^2\sqrt{x+2}$ যেখানে $x \in [-2, 0]$. এবার খালি integral-টা কষে ফেলার অপেক্ষা। ■

এবারে কয়েকটা অংক দেখব যেখানে কিছু বাড়তি প্যাঁচ আছে।

Example 13: Find the volume of the solid generated by the revolution of the area bounded

Fig 39

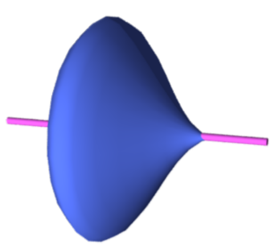


Fig 40

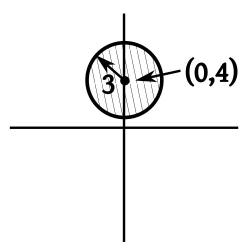


Fig 41

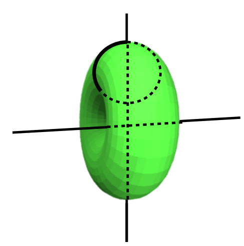
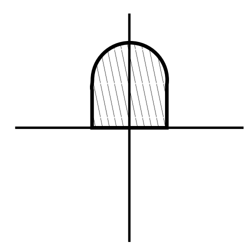


Fig 42



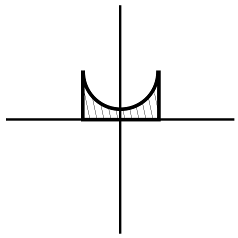


Fig 43

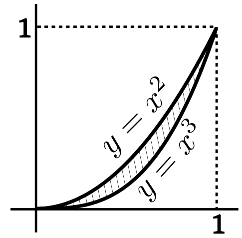


Fig 44

by the circle $x^2 + (y-4)^2 = 9$ about the x-axis.[3] **(2005.10ci)**

SOLUTION: ছবিটা দেখে নাও Fig 40 এবং Fig 41-এ। এতক্ষণ আমরা যেসব solid of revolution নিয়ে কাজ করছিলাম, সেগুলো যে অঞ্চলটা ঘুরিয়ে তৈরী হচ্ছিল, সেটা একেবারে ঘোরানোর axis পর্যন্ত ছিল। কিন্তু এখানে তা নেই, ফলে একটা গর্ত তৈরী হয়েছে। এরকম ক্ষেত্রেও একই চাকতির কায়দা লাগানো যাবে, খালি দুবার লাগাতে হবে। একবার পুরো বাইরেটা পর্যন্ত, এবং তারপর ভিতরের অংশটা তার থেকে বাদ দিতে হবে। অর্থাৎ Fig 40-এর গোলটাকে আমরা Fig 42-এর থেকে Fig 43 বিয়োগ করে পেতে চাইছি। যদি Fig 42-কে ঘোরাই, তবে পাব $\int_{-3}^{3} \pi(4+\sqrt{9-x^2})^2\,dx$. একইভাবে যদি Fig 43-কে ঘোরাই, তবে পাব $\int_{-3}^{3} \pi(4-\sqrt{9-x^2})^2\,dx$. সুতরাং আমাদের উত্তর হবে

$$
\begin{aligned}
& \int_{-3}^{3} \pi(4+\sqrt{9-x^2})^2\,dx - \int_{-3}^{3} \pi(4-\sqrt{9-x^2})^2\,dx \\
= \quad & 16\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \\
= \quad & \cdots = 72\pi^2.
\end{aligned}
$$

■

Exercise 25: Fig 44 দ্যাখো। এখানে যে অংশটা শেড করে দেখিয়েছি, সেটাকে y-axis-কে ঘিরে ঘোরালে কী volume পাবে? যদি x-axis-কে কেন্দ্র করে ঘোরাতে, তবে? ■

এবার একটা অংক দেখব যেখানে একটা নতুন কৌশল লাগবে। ধরো $y = f(x)$ জানো, এবং এও জানো যে f হল one-one, তাই তুমি $x = f^{-1}(y)$ ভাবতে পারো। কিন্তু এমন বহু f আছে, যাদের বেলায় f^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকলে f^{-1}-এর কোনো ভদ্র ফর্মুলা পাওয়া মুশকিল। একটা উদাহরণ হতে পারে $f(x) = e^x + x^3$. এটা চমৎকার একটা differentiable function. এর derivative সর্বদা > 0, তাই $f(x)$-টা one-one হবে। অথচ f^{-1}-এর ফর্মুলা পাওয়া দুষ্কর। এরকম কোনো $f(x)$-এর জন্য মনে করো তোমাকে $\int x\,dy$ বার করতে দিল। তবে কী করবে। এটা আসলে $\int f^{-1}(y)\,dy$, কিন্তু যেহেতু f^{-1}-এর কোনো ভদ্র রূপ জানা নেই, তাই integration করার প্রচলিত সরাসরি কায়দাগুলো লাগানো যাচ্ছে না। এরকম ক্ষেত্রেই আমাদের কৌশলটা কাজ করে। এটা আসলে একটা substitution, আমরা y-এর জায়গায় $f(x)$ বসাব। ঠিক যেমন $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ দেখলেই তুমি $x = \sin u$ বসাও, ঠিক সেরকম। যেহেতু $y = f(x)$, তাই $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, যেটাকে আমরা $dy = f'(x)\,dx$ আকারে লিখি। ফলে পাব $\int x\,dy = \int x f'(x)\,dx$. ব্যস্, এবার আর কোনো সমস্যা রইল না।

Exercise 26: Express the volume of the solid obtained by revolution of the cissoid $y^2(2a-x) = x^3$ about its asymptote as an integral and hence show that the volume is $2\pi^2 a^3$.[1+2] **(2003.10b)**

HINT: এখানে ভাষাটা দেখেই মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। ধীরে ধীরে বোঝা যাক। প্রথমতঃ, $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$. ওই $\pm$-টা দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, গ্রাফটা x-axis-এর উপরে নীচে symmetric হবে, মানে উপরে যা হবে, নীচে তারই প্রতিফলন হবে। সুতরাং উপরের অংশটাকে বুঝতে পারলেই হবে, মানে $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ অংশটা। সুবিধার জন্য $a > 0$ ধরে নিই। তাহলে

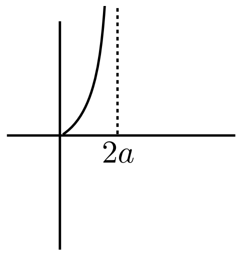


Fig 45

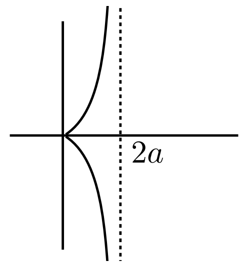


Fig 46

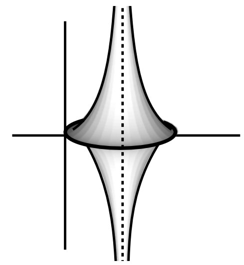


Fig 47

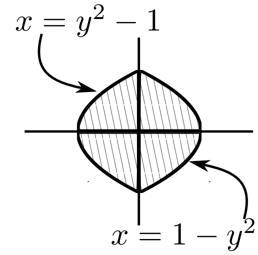


Fig 48

$2a-x>0$ হতে হবে, কারণ নইলে negative জিনিসের square root বা শূন্য দিয়ে ভাগ এসে যাবে। আবার $x=0$ হলে $y=0$ হবে, এবং $x \to 2a-$ হলে $y \to \infty$ হবে। যতই x বাড়বে, ততই y-ও বাড়বে (কারণ numerator বাড়বে আর denominator কমবে)। সুতরাং গ্রাফটা হবে Fig 45-এর মত কিছু একটা। এতক্ষণ খালি x-axis-এর উপরের অংশ নিয়ে কাজ করছিলাম, এবার x-axis-এর নীচে এর প্রতিফলনটা জুড়ে দিলে পাব পুরো গ্রাফটা (Fig 46)। এখানে ওই $x=2a$ বরাবর ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা হল asymptote. সেটাকে ঘিরে ঘোরালে পাবে Fig 47-এর মত একটা ডবল সানাই। উপরের সানাইটার volume বার করে সেটাকে ডবল করে দিলেই হবে। লক্ষ করো যে সানাইটা unbounded (মানে, ফুঁ দিতে গেলে স্বর্গে যেতে হবে)। অবশ্য আমরা এখানে ফুঁ দেবার চেষ্টা করছি না, খালি integrate করেই সন্তুষ্ট থাকব, তাই মর্ত্যে বসে improper integral লাগালেই চলবে।

এখানে x দেওয়া থাকলে y বার করা যাচ্ছে (খালি x-axis-এর উপরের অংশটুকু নিয়ে কাজ করছি)। কিন্তু y দেওয়া থাকলে তার জন্য ঠিক একটাই x থাকলেও, সেটা বার করা মোটেই সহজ ঠেকছে না। এক্ষুণি যে কৌশলটা বললাম, সেটার প্রয়োজন এই জন্যই।

দুটো integral-ও এখানে জানা থাকলে সুবিধা হবে--এক, $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$, আর দুই, $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{16}$. ■

36.3 Triple integral

এবার আমরা triple integral ব্যবহার করে volume বার করার কিছু উদাহরণ দেখব।

Exercise 27: Compute the volume of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

[4] **(2008.10cii)**

HINT: গতকাল একটা substitution শিখেছিলে, যেটা ব্যবহার করলেই অংকটা ধাঁ করে হয়ে যাবে। কী substitution বলো তো! ■

Exercise 28: The volume of the solid bounded by the surfaces $x=1-y^2$ and $x=y^2-1$, and the planes $z=0$ and $z=2$ (rounded off to 2 decimal places) is ... . **(JAM.2019.NAT50)**

HINT: এটা একটা Cylinder যার base-টা symmetric. এই base-টার ছবি এঁকেছি Fig 48-এ। একবার base-টার area বার করে, সেটাকে cylinder-এর উচ্চতা দিয়ে গুণ করে দিলেই চলবে। তবে সেই শর্টকাটটা ব্যবহার করতে না চাইলে, কিংবা শর্টকাটটা কীভাবে এসেছে, সেটা বুঝতে চাইলে triple integral-এর পথে এগোলেই হবে। ■

DAY 37
Differentiation under integral sign

ক্যালকুলাসের দুই স্তম্ভ হল differentiation এবং integration. হায়ার সেকণ্ডারীতে যখন প্রথম ক্যালকুলাস শিখি, তখন থেকেই এদের সঙ্গে আমাদের পরিচয়। তখন অবশ্য আমরা একটামাত্র variable-এর function নিয়েই কাজ করতাম। কিন্তু এখন কাজ করছি multi-variable function নিয়ে। সেই কারণে partial differentiation এবং repeated integral-এর মত ধারণা এসেছে। এই দুই ক্ষেত্রেই আমরা দেখেছি যে, কোন্ variable-টা নিয়ে আমরা আগে কাজ করছি, তাতে অনেক সময়েই কিছু এসে যায় না, কিন্তু কখনো-সখনো এই ক্রমটা গুরুত্বপূর্ণ হয়ে ওঠে। যেমন, যদি $f(x,y)$ আমাদের function-টা হয়, তবে প্রায়শঃই দেখি যে

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

কিন্তু এমন বিদঘুটে function সম্ভব, যাদের বেলায় সেটা হয় না। Young's theorem এবং Schwarz's theorem থেকে আমরা জানি যে, f-টা মোটামুটি ভদ্র হলেই এই দুটো mixed partial derivative সমান হয়।

Repeated integral-এর বেলাতেও একইরকম দেখেছি। f-টা ভদ্রসভ্য হলে দুটো repeated integral-ই সমান হয়, যদিও এমন বিদঘুটে f সম্ভব যেখানে সেটা হয় না।

এই দুই ক্ষেত্রেই আমরা হয় খালি differentiation নিয়ে কাজ করেছি, নয়তো খালি integration নিয়ে। এবার একইরকম কাজ করব এদের মিশিয়ে, মানে দুটো variable-এর একটার সাপেক্ষে integrate করব, আর অন্যটার সাপেক্ষে differentiate. একটা উদাহরণ দিলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 14: ধরো $f(x,y) = \sin(x+y)$. আমরা x-এর সাপেক্ষে differentiate করতে চাই, এবং y-এর সাপেক্ষে 0 থেকে π পর্যন্ত integrate করতে চাই। এই দুটো কাজের মধ্যে কোন্টা আগে আর কোন্টা পরে করছি, তাতে কি কিছু এসে যায়?

SOLUTION: যদি প্রথমে differentiate করি তবে পাব--

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y).$$

একে integrate করলে হবে--

$$\int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = \int_0^\pi \cos(x+y)\,dy = \sin(x+\pi) - \sin x.$$

এবার উল্টোদিকটা দেখি। প্রথমে integrate করলে পাচ্ছি--

$$\int_0^\pi f\,dy = \cos x \ \ - \cos(x+\pi).$$

এবার একে differentiate করলে হবে

$$\frac{d}{dx}\int_0^\pi f\,dy = \frac{d}{dx}(\cos x \ \ - \cos(x+\pi)) = -\sin x + \sin(x+\pi).$$

দুই ক্ষেত্রেই একই উত্তর এল। ■

এখানে চারটে জিনিস লক্ষ করার মত--

- এক, দুভাবে করেই সমান উত্তর এসেছে। এটাই বেশীরভাগ ক্ষেত্রে হয়ে থাকে। অবশ্য ব্যতিক্রম আছে।
- দুই, ব্যাপারটাকে ভাবা যায় এইভাবে, প্রথমে derivative-টা ছিল integral-এর বাইরে, তারপর যেন সেটা টুক্ করে integral-এর ভিতরে ঢুকে গেল। এই চিন্তা থেকেই differentiation আর integration-এর স্থানবিনিময়কে বলে **differentiation under integral sign**.

- তিন, যখন আমরা প্রথমে differentiate করছিলাম, তখন partial derivative নিতে হয়েছিল, কারণ y-কে স্থির রাখা হচ্ছিল। কিন্তু যখন differentiation-টা পরে করলাম, তখন differentiate করার আগেই y লোপ পেয়েছে, তাই এমনি differentiation-এই কাজ চলে গেল।
- চার, হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে আমরা শিখেছিলাম যে differentiation আর integration পরস্পরের কতকটা বিপরীত জিনিস। এখানে কিন্তু আমরা সেটা ব্যবহার করছি না। এখানে differentiation-টা হচ্ছে একটা variable-এর সাপেক্ষে, আর integration-টা হচ্ছে অন্য variable-এর সাপেক্ষে।

Differentiation under integral sign কখন করা যায় ইত্যাদি খুঁটিনাটি আলোচনা করার আগে বলে নিই এটা দিয়ে কাজটা কী হয়। এটা দিয়ে অনেক সময়ে শক্ত শক্ত integral সহজে কষে দেওয়া যায়। এই প্রসঙ্গে একটা গল্প মনে পড়ল। Richard Feynman (রিচার্ড ফেইনম্যান) নামের একজন বিখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানীর কথা তোমরা হয়তো অনেকেই জানো। ইনি স্কুলে থাকতে এই differentiation under integral sign-এর কায়দাটা একটা বই থেকে রপ্ত করেছিলেন। তখনকার দিনে এটা কলেজে বা ইউনিভার্সিটিতেও পড়ানো হত না, তাই অধিকাংশ ছাত্রছাত্রীই এই কায়দাটা জানত না। কলেজে পড়ার সময়ে অনেক শক্ত শক্ত integral যখন আর কেউ পারত না, তখন অনেক সময়েই ফেইনম্যান differentiation under integral sign দিয়ে অংকটা করে সবাইকে তাক লাগিয়ে দিতেন। সেই করে তাঁর বিলক্ষণ একটু নামও ছড়িয়ে পড়েছিল, সহপাঠীমহলে তো বটেই, এমনকি সিনিয়রদের মধ্যেও।

কায়দাটা এইরকম--ধরো তোমাকে $\int_a^b f(x,y)\,dx$ বার করতে হবে, এবং সেটা করা বেশ শক্ত হচ্ছে। এবার তুমি লক্ষ করলে যে $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ বার করা সহজ। এইবার যদি differentiation under integral sign করা যায়, তবে এটাকে তুমি $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx$ বলে ভাবতে পারো। তার মানে যেটা তোমাকে বার করতে দিয়েছিল সেটা বার করতে পারছ না বটে, কিন্তু তার derivative-টা বার করা যাচ্ছে। এবার ওই derivative-টাকে integrate করলেই তোমার দরকারী উত্তরটা পেয়ে যাবে।

একটা হাতেকলমে অংক করলে বুঝতে সুবিধা হবে। নীচের উদাহরণটা সেই জন্যই। এখানে আমরা ধরে নেব[1] যে differentiation under integral sign করা যায়।

Example 15: ধরো $t > 0$. তবে $\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx = ?$

SOLUTION: খানিকক্ষণ নাড়াচাড়া করলেই বুঝবে যে, integral-টা সহজে বার করা যাচ্ছে না। এবার differentiation under integral sign লাগানোর চেষ্টা করা যাক। তার জন্য integral-টাকে $f(t)$ নাম দেওয়া যাক। তাহলে

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx$$

এবার differentiation under integral sign লাগাতে চলেছি--

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{x^t-1}{\log x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^t \log x}{\log x}dx = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{1+t}.$$

দেখলে, আমরা $f(t)$ বার করতে না পারলেও কেমন দিব্যি $f'(t)$ বার করে ফেললাম? শুধু তাই নয়, $f'(t)$-টা বেশ সহজ জিনিসও বটে! তার মানে $f(t)$ এমন কিছু যাকে differentiate করলে $\frac{1}{1+t}$ হয়। সুতরাং $f(t) = \int \frac{dt}{1+t} = \log(1+t) + c$ জাতীয় কিছু, যেখানে c কোনো একটা constant. এই অব্ধিই হল differentiation under integral sign-এর কেরামতি। অবশ্য অংকটা এখনও পুরো শেষ হয়নি, কারণ c বার করা বাকি আছে। সে কাজটা বিভিন্ন অংকে বিভিন্নভাবে হয়ে থাকে। যেমন ধরো, যদি t-এর কোনো একটা value-র জন্য $f(t)$-টা বার করতে পারতাম, তবে সেখান থেকেই c পেয়ে যেতাম। দুঃখের ব্যাপার, কোনো t-এর জন্যই ছাই এখানে $f(t)$ জানি না। তবে উপায়? লক্ষ করো যে, $t = 0$ নিলে integrand-টা দিব্যি শূন্য হয়ে যায়। কিন্তু সমস্যা হল $t > 0$ বলেছে। তাই আমরা $t \to 0+$ করে দেখি। সেক্ষেত্রে দেখানো যায় যে integral-টা 0-র দিকে যাবে।

[1] পরে আমরা এর জন্য দুটো sufficient শর্ত শিখব।

কারণ--

$$\left|\frac{x^t-1}{\log x}\right| = \left|\frac{e^{t\log x}-1}{\log x}\right| \leq t,$$ যেহেতু $|e^a - 1| \leq |a|$ হয় (যদি $a \leq 0$ হয়)।

ওদিকে $t \to 0+$ হলে $\log(1+t)+c \to c$ হয়। তার মানে $c = 0$. তাই $\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx = \log(1+x)$.
লক্ষ করো, এখানে আমরা indefinite integral বার না করেই কেমন definite integral-টা বার করে দিলাম। ■

এই অংকে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে differentiation under integral sign করা যায়। সেটা কখন করা যায়, তার জন্য আমরা দুটো sufficient শর্ত দেব। এদের মধ্যে প্রথমটা কাজ করে $\int_a^b$-জাতীয় integral-দের জন্য (যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$), আর দ্বিতীয়টা কাজ করে $\int_a^\infty$-জাতীয় integral-দের বেলায়।

37.1 $\int_a^b$-জাতীয় integral

এ ক্ষেত্রে sufficient শর্তটা হল--

> **THEOREM**
>
> Let $a < b$ be real numbers and $J \subseteq \mathbb{R}$ be an interval . Let $f : [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ be such that both f and $\frac{\partial f}{\partial y}$ are continuous.
> Then
> $$\forall y \in J \quad \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

প্রমাণটা যে খুব কঠিন এমন নয়। কিন্তু এই বইতে আমরা সেই প্রমাণের মধ্যে যাব না।
দেখা যাক, আগের উদাহরণে যে সত্যিই differentiation under integral sign করা যেত, সেটা এই theorem দিয়ে সাব্যস্ত করা যায় কিনা।

Example 16: দেখাও যে, $t > 0$ হলে $\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{x^t-1}{\log x}dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{x^t-1}{\log x}\,dx$ হয়।

SOLUTION: Theorem-টার ভাষায় লিখতে হলে আমরা $a = 0$, $b = 1$ এবং $J = (0,\infty)$ নেব। অবশ্য integrand-এর নীচের তলায় যে $\log x$-টা আছে সেটা আবার $b = 1$-এ শূন্য হয়ে যায়। সৌভাগ্যক্রমে উপরের $x^t - 1$-টাও তখন শূন্য হয়ে যায়। দেখি বিষে বিষক্ষয় হয় কিনা। সেটা দেখার একটা পথ হল L'hôpital (লোপিতাল) লাগানো-- উপরতলার derivative হল $x^t \log x$, আর নীচেরতলার $\frac{1}{x}$. সুতরাং উপরতলার derivative-কে নীচেরতলার derivative দিয়ে ভাগ করলে হয় $x^{t+1}\log x$, যেটা $x \to 1-$ হলে চমৎকার শূন্যের দিকে যায়। তাই integrand-টাকে নেব

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{x^t-1}{\log x} & \text{if } (x,t) \in [0,1) \times J \\ 0 & \text{if } (x,t) \in \{1\} \times J \end{cases}.$$

তুচ্ছ একটা বিন্দুতে কারিকুরি করার ফলে integral-টা মোটেই বদলাবে না।
এখন লক্ষ করো $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{x^t \log x}{\log x} = x^t$. সুতরাং f এবং $\frac{\partial f}{\partial t}$ দুজনেই দিব্যি continuous. অতএব আমাদের theorem-টা বলছে যে, differentiation under integral sign করা চলবে। ■

Exercise 29: Using differentiation under the sign of integration, prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\,d\theta = \pi\log\left[\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\right], \quad a, b > 0.$$

[6] **(2021.7)**

HINT:

এই অংকটায় differentiation under integral sign করতে বলেছে বটে, কিন্তু differentiation-টা কার সাপেক্ষে করব, ঠিক বোঝা যাচ্ছে না! Integration-টা হয়েছে θ-র সাপেক্ষে, এবং integrand-এর মধ্যে θ ছাড়াও আছে a আর b. সুতরাং এদের কারোর সাপেক্ষে differentiate করে দেখলে হয়। ধরো a-র সাপেক্ষে করি। এখনও আমরা জানি না এতে কাজ হবে কিনা। তাই এখানে differentiation under integral sign সত্যিই করা যায় কিনা, সেইসব খুঁটিনাটি প্রশ্ন নিয়ে এখনই মাথা ঘামাব না। আগে তো differentiation under integral sign লাগিয়ে দেখি, উত্তরটা মেলে কিনা। মিললে পরে কেন differentiation under integral sign করা গেল তার ব্যাখ্যা নিয়ে ভাবব।

কিন্তু সবার প্রথমে একটা কেস করে নেব যেখানে কোনো differentiation under integral sign লাগবে না--

> Case I: If $a = b$:
>
> Then the LHS is $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log b \, d\theta = \frac{\pi}{2} \log b$.
>
> The RHS is $\pi \log(\sqrt{b}) = \frac{\pi}{2} \log b$ = LHS.

এবার অংকের মূল অংশ, যেখানে $a \neq b$. এখানেই differentiation under integral sign লাগবে।

> Case II: If $a \neq b$:
>
> Let $F(a) = \int_0^{\pi/2} \log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\, d\theta$.
>
> Then, by differentiation under integral sign (to be justified later),
>
> $$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial a} \log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} d\theta \end{aligned}$$

এইটাই ছিল differentiation under integral sign-এর আসল ধাপটা। লক্ষ করো কীরকম "(to be justified later)" লিখে প্রমাণের দায় আপাততঃ এড়িয়ে গিয়েছি।

এর পর কিছু মামূলী ধাপ আছে-- সবটাকে $\tan\theta$ দিয়ে লেখা, এবং $t = \tan\theta$ বসানো। তবে সব মিলিয়ে পাবে--

> $F'(a) = \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

এখান থেকে $F(a)$-কে উদ্ধার করতে হবে।

> So
>
> $$\begin{aligned} F(a) &= \int \frac{\pi\, da}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \cdots \\ &= \pi \log(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + c. \end{aligned}$$

এবার c বার করতে হবে। সেটা তোমার জন্যই রেখে দিলাম। এখানে case I-টা কাজে লাগবে।

এইবার তবে পড়ে রইল differentiation under integral sign কেন করা যাবে, তার যুক্তি দেখানো। খুবই সহজ কাজ--

> Here differentiation under integral sign is justified because both $\log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)$ and
>
> $$\frac{\partial}{\partial a}\log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) = \frac{\cos^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}$$
>
> are continuous for $(\theta, a) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (0, \infty)$.

■

Exercise 30: Stating the reason for the validity of differentiation under the sign of integration, prove that

$$\int_0^\pi \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x}dx = \pi\sin^{-1}a, \quad |a| < 1.$$

[5] **(2011.9bor)**
HINT: এখানে একটা প্যাঁচ রয়েছে। Integration হচ্ছে $x = 0$ থেকে $x = \pi$ অবধি, এর মধ্যে $x = \frac{\pi}{2}$-তে $\cos x = 0$ হয়ে যায়, অথচ সেটা রয়েছে নীচের তলায়! অবশ্য সৌভাগ্যক্রমে উপরতলার $\log(1 + a\cos x)$-টাও তখন শূন্য হয়ে যাবে। সুতরাং $\frac{0}{0}$ চেহারা। এটা দেখা কঠিন নয় যে, ওখানে integrand-টার limit হবে 1. সুতরাং integrand-টাকে ভেবে নাও যেন

$$f(x, a) = \begin{cases} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} & \text{if } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

তবে integrand-টা continuous থাকবে, আবার ওই একখানা $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে কারিকুরি করার ফলে integral-টাও বদলাবে না। এই প্যাঁচটুকু বাদে বাকি অংকটা আগের মতই।
■

Example 17: Use differentiation under the sign of integration to show that

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^{-1}(\cos\alpha\,\mathrm{cosec}\,\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha).$$

[4] **(2010.10a)**
SOLUTION: অংকটা অসম্পূর্ণভাবে দেওয়া আছে, α কোথায় থাকতে পারে সেটা বলেনি। "কিছুই যখন বলে দেয় নি, তখন নিশ্চয়ই α যেকোনো real number হতে পারে" মনে করলে মুস্কিল। এখানে আমরা $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ধরে নেব। এটা কোথা থেকে পেলাম যদি জানতে চাও, তাই কারণটা দিলাম। যদি না জানতে চাও, তবে সেটুকু বাদ দিয়ে যেতে পারো--

> ভেবে দেখলাম, যদি $\alpha = \pi$ নিই, তবে integration-টা হচ্ছে $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত। তার মধ্যে $\theta = 0$ পড়ে, যেখানে integrand-এর $\mathrm{cosec}\,\theta$-টা হয়ে যাবে undefined. একই যুক্তিতে α-টা $\geq \frac{\pi}{2}$ হতে পারে না, কারণ তবে $\theta = 0$ হয়ে যেতে পারে। আবার যদি $\alpha = -\pi$ নিই, তবে integration-টা হচ্ছে $\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{3\pi}{2}$ পর্যন্ত। এর মধ্যে $\theta = \frac{3\pi}{4}$ আছে। সেখানে $\mathrm{cosec}\,\theta = \sqrt{2}$. সুতরাং $\cos\alpha\,\mathrm{cosec}\,\theta = -\sqrt{2}$, যেটা < -1, তাই তার $\cos^{-1}$ নেওয়া যাবে না। এই সমস্যাটা বস্তুতঃ যেকোনো $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$-এর জন্যই হবে। খানিকক্ষণ এরকম গবেষণা করে দেখা যাবে যে $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ হলে কোনো সমস্যা হবে না। সুতরাং এই অংকে আমরা সেটাই ধরে সমাধান করব।

এখানে আরো একটা সমস্যা আছে, α-টা খালি integrand-এই নেই, integration-এর প্রান্তেও ঢুকে বসে আছে। এরকম ক্ষেত্রে integrand-এর α-টার জায়গায় একটা অক্ষর (ধরো a), আর প্রান্তের α-টার জন্য অন্য কোনো অক্ষর (ধরো b) বসিয়ে নিলে ভাবতে সুবিধা হবে।

> Let $F(a,b) = \int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^{-1}(\cos a \operatorname{cosec}\theta) d\theta.$

এবার এদের দুজনের সাপেক্ষে আলাদা করে partial derivative বার করতে অসুবিধা নেই--

> Then
> $$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \sin\theta \cos^{-1}(\cos a \operatorname{cosec}\theta) d\theta$$
> by differentiation under integral sign (to be justified later).
> Again
> $$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) \cos^{-1}\left(\cos a \operatorname{cosec}\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)\right)$$
> by the fundamental theorem of calculus.

এই fundamental theorem-এর জায়গাটা একটু ভালো করে চিন্তা করে বুঝে নাও।
যে integral-টা দিয়েছিল সেটাতে তো আর আলাদা করে a, b ছিল না, দু জায়গাতেই α ছিল, মানে $F(\alpha,\alpha)$. এটাকে differentiate করার সুবিধার জন্য লিখতে পারি $F(a(\alpha), b(\alpha))$ যেখানে $a(\alpha) = b(\alpha) = \alpha$. আমাদের কাজ হল $F(a(\alpha), b(\alpha))$-কে α-র সাপেক্ষে differentiate করা--

> So
> $$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F(a(\alpha), b(\alpha)) &= \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin\theta \cos^{-1}(\cos\alpha \operatorname{cosec}\theta) d\theta + \\ &\qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos^{-1}\left(\cos\alpha \operatorname{cosec}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right). \end{aligned}$$

নিশ্চয়ই দেখে কান্না পাচ্ছে? আসলে কিন্তু এদের মধ্যে প্রচুর কাটাকাটি হয়ে যাবে। যেমন দ্বিতীয় term-টা আসলে শূন্য (কেন?)।
যদি প্রথম term-এর integrand-টাকে সাজিয়ে লেখো, তবে পাবে--

> Also
> $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin\theta \cos^{-1}(\cos\alpha \operatorname{cosec}\theta) &= \sin\theta \times \frac{\sin\alpha \operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{cosec}^2\theta}} \\ &= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{cosec}^2\theta}} \\ &= \frac{\sin\alpha \sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\alpha}}. \end{aligned}$$

গায়ের জোরে এটার indefinite integral বার করে ফেলা শক্ত নয়--

Now

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\alpha}}\,d\theta \\
= & \int \frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta-\cos^2\alpha}}\,d\theta \\
= & -\sin\alpha\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2-\cos^2\alpha}} \quad \left[\text{putting } u=\cos\theta\right] \\
= & -\sin\alpha\int\frac{du}{\sqrt{\sin^2\alpha-u^2}} \\
= & -\sin\alpha\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \quad \left[\text{putting } v=\frac{u}{\sin\alpha}\right] \\
= & -\sin\alpha\sin^{-1}v+c \quad [\,c=\text{arbit const.}] \\
= & -\sin\alpha\sin^{-1}\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}+c.
\end{aligned}$$

Indefinite integral থেকে এবার definite integral বার করে ফেলব--

So

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\alpha}}\,d\theta \\
= & -\sin\alpha\sin^{-1}\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}\bigg|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
= & \cdots = \frac{\pi}{2}\sin\alpha.
\end{aligned}$$

তবে সব মিলিয়ে হল--

So $\frac{d}{d\alpha}F(\alpha,\alpha)=\frac{\pi}{2}\sin\alpha$.
Thus, $F(\alpha,\alpha)=-\frac{\pi}{2}\cos\alpha+c'$ for some constant c'.
Now clearly $F(0,0)=0$. So $c'=\frac{\pi}{2}$. Thus, the given integral is $F(\alpha,\alpha)=\frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha)$, as required.

পড়ে রইল খালি differentiation under integral sign কেন করা যাবে, সেটা প্রমাণ করা--

Justification of differentiation under integral sign:

Clearly the integrand is continuous.

সমস্যা হতে পারে derivative-টাকে continuous দেখাতে, কারণ নীচের তলায় $\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\alpha}$ রয়েছে। কিন্তু সেটাকে একটু সাজিয়ে লিখলেই চেনা জিনিস চলে আসবে--

Now

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin\theta\cos^{-1}(\cos\alpha\operatorname{cosec}\theta) = \frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\alpha}}.$$

This is continuous if $\sin^2\theta-\cos^2\alpha > 0$.
But $\sin^2\theta-\cos^2\alpha = \sin^2\theta(1-\cos^2\alpha\operatorname{cosec}^2\theta)$.
Since we have chosen the range of α in a such a way that $\cos^{-1}(\cos\alpha\operatorname{cosec}\theta)$ is well-defined, so $|\cos\alpha\operatorname{cosec}\theta| < 1$.
Hence the derivative is also continuous.
So differentiation under integral sign is allowed.

■

37.2 $\int_a^\infty$-জাতীয় integral

আগেই বলেছি যে, আমাদের theorem-টা খালি $\int_a^b$-জাতীয় integral-এর বেলাতেই খাটে, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$. কিন্তু অনেক সময়ে আমাদের $\int_a^\infty$-জাতীয় integral নিয়েও কাজ করতে হয়। সেখানেও differentiation under integral sign করা সম্ভব, কিন্তু তখন আরেকটু বেশী শর্ত লাগবে।

THEOREM

Let $a \in \mathbb{R}$ and J be an interval in $\mathbb{R}$. Let $f : [a,\infty)\times J \to \mathbb{R}$ be a function such that

1. f and $\frac{\partial f}{\partial y}$ are continuous over $[a,\infty)\times J$,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}$ is bounded by some function $A : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ such that $\int_a^\infty A(x)\,dx < \infty$.

Then

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

এর মধ্যে প্রথম শর্তটা তো আগের theorem-এই ছিল। দ্বিতীয় শর্তটা রয়েছে ∞-কে সামলাতে। এখানে বলে রাখি যে, $\int_{-\infty}^b$ বা $\int_{-\infty}^\infty$-জাতীয় integral-দের বেলাতেও differentiation under integral sign করবার জন্য এইরকম theorem বানানো যায়।

Exercise 31: Show with proper justification that

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2/4}$$

for all real t.[5] **(2012.9b)**

HINT:
এই অংকের গোড়াতেই একটা জিনিস বলে রাখি।। সেটা হল $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

এখানে $|e^{-x^2}\cos tx| \le e^{-x^2}$ এবং এক্ষুণি বললাম যে, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ হল finite. আর continuity নিয়েও সমস্যা নেই। অতএব differentiation under integral sign করা যাবে। সেটা করলে পাবে--

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx\,dx &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}e^{-x^2}\cos tx\,dx \\ &= -\int_0^\infty e^{-x^2}x\sin tx\,dx \\ &= \cdots \\ &= -\frac{t}{2}\int_0^\infty \cos tx e^{-x^2}\,dx. \end{aligned}$$

লক্ষ করো সেই গোড়ার integral-টাই ফের ফিরে এসেছে। এবার কী করে এগোবে? ■

Exercise 32: Find

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos^2 tx\,dx.$$

for all real t.[5] ■

Answers

1. $abs\left(\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\right)=r$. **2.** **(1)** $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\,drd\theta=0$. **(2)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 r\cot\theta\,drd\theta=0$ কোনো ক্ষেত্রেই কষ্ট করে integrate করার দরকার নেই, symmetry ব্যবহার করলেই হবে, odd function-এর integral. **3.** $abs\left(\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right)=r$. **4.** **(1)** আমরা $x=x,\ y=r\cos\theta$ এবং $z=r\sin\theta$ নেব, যেখানে $x\in[0,1],\ r\in[0,x^3]$ আর $\theta\in[0,2\pi]$. তাহলে integral-টা হবে

$$\int_0^1\int_0^{x^3}\int_0^{2\pi} r(x+r\cos\theta)\,d\theta drdx=\cdots=\frac{\pi}{8}.$$

(2) 0.**(3)** $\pi(e-2)$. **5.** $r^2|\cos\theta|$. **6.** $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3|\cos\theta|\,d\phi drd\theta=\cdots=15\pi$.
7. $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4|\cos\theta|\,d\phi drd\theta=\cdots=\frac{124}{5}\pi$. **8.** $\iiint_A x^2\,dxdydz=\frac{1}{3}\iiint_A x^2+y^2+z^2\,dxdydz=\frac{4\pi}{15}$.
11. এখানে $u=y+x$ এবং $v=y-x$ বসালেই হবে। **12.** $\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{-r^2}r\,drd\theta=\cdots=\frac{1}{6}\pi(1-e^{-4})$.
13. $x=a+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ব্যবহার করো। **14.** এখানে $x=-a+r\cos\theta$ এবং $y=-a+r\sin\theta$ বসাও। তবে integral-টা হয়ে যাবে $\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}(4a^2-r^2)\,drd\theta=\cdots=\frac{32\pi a^3}{3}$. **15.** এই substitution-টা চেষ্টা করো--

$$\begin{aligned} x &= ra\cos\theta\cos\phi\\ y &= rb\cos\theta\sin\phi\\ z= &= rc\sin\theta, \end{aligned}$$

যেখানে $r\in(0,1],\ \theta\in[0,2\pi)$ এবং $\phi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. তাহলেই দেখবে

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=r.$$

সুতরাং integral-টা হয়ে যাচ্ছে $\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 re^r\,drd\phi d\theta$, যেটা কষে ফেলা শক্ত নয় মোটেই।

16. $\frac{1}{abc}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2|\cos\theta|\,drd\theta d\phi = \frac{\pi^2}{4abc}$. **17.** **(1)** 1. **(2)** 1. **(3)** 3. **(4)** 0.
20. $\iint_{x^2+y^2\le 3}\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\,dxdy = \cdots = \frac{19\pi}{6}$. **21.** **(1)** $\frac{109\pi}{3}$. **(2)** $\frac{2\pi}{3}$. **(3)** $\frac{\pi^2}{2}$.
(4) $\frac{\pi}{2}(e^6-e^4)$. **(5)** $\frac{\pi}{4}(2-\sin 2)$. **(6)** $(2\cos 1-\sin 1)\pi$. **(7)** $\pi(\tan^{-1}2+\tan^{-1}1)$.
22. **(1)** $\int_0^1 \pi(2-\sqrt{y})^2\,dy = \cdots = \frac{11\pi}{6}$. **(2)** $\int_0^1 \pi(2-x^2)^2\,dx = \cdots = \frac{43\pi}{15}$.
(3) $\int_1^e \pi(1-\log y)^2\,dx = \cdots = \pi(2e-5)$. **23.** $\pi a^2\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\sinh\frac{2b}{a}\right)$. **24.** $\frac{32\pi}{15}$. **25.** x-axis-কে কেন্দ্র করে ঘোরালে $\pi\int_0^1(x^4-x^6)\,dx = \frac{2\pi}{35}$. যদি y-axis-কে কেন্দ্র করে ঘোরাতে তবে $\pi\int_0^1(y^{2/3}-y)\,dy = \frac{\pi}{10}$.
26. $2\pi\int_0^{\infty}(2a-x)^2\,dx = \cdots = \int_0^{2a}(3a-x)\sqrt{x(2a-x)}\,dx = \cdots = \pi a^3$. **27.** $\frac{4}{3}\pi abc$.
28. $4\int_{-1}^1 1-x^2\,dx = \cdots = \frac{16}{3}\approx 5.33$. **29.** $c=-\pi\log 2$. **30.**

Justification for differentiation under integral sign:

Here the integrand is continuous and also $\frac{\partial}{\partial a}\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{1+a\cos x}$ is continuous for $(x,a)\in[0,\pi]\times(-1,1)$. Let

$$F(a) = \int_0^{\pi}\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx.$$

Then, using differentiation under integral sign,

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x} \\
&= \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\right)} \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\sec^2\frac{x}{2}+a\left(1-\tan^2\frac{a}{2}\right)} \\
&= 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+a)+(1-a)t^2} \quad \left[\text{putting } t=\tan\frac{x}{2}\right] \\
&= \frac{2}{1+a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\frac{1-a}{1+a}t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} \quad \left[\text{putting } u=\sqrt{\tfrac{1-a}{1+a}}t\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.
\end{aligned}$$

Hence

$$F(a) = \int\frac{\pi\,da}{\sqrt{1-a^2}} = \pi\sin^{-1}a + c$$

for some constant c.
Now $F(a) = 0$. So $c = 0$.
Hence

$$F(a) = \int \frac{\pi\, da}{\sqrt{1-a^2}} = \pi \sin^{-1} a,$$

as required.

31. তাহলে আমরা বলতে পারি যে $\int_0^\infty \cos tx e^{-x^2}\, dx$ যদি $G(t)$ হয়, তবে $G'(t) = -\frac{t}{2}G(t)$ হবে। সুতরাং $G(t) = Ce^{-t^2/4}$, যেখানে C হল arbitrary constant. এই C-টা বার করার জন্য $t = 0$ বসালেই পাবে $G(0) = C$. এখন $G(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. সুতরাং উত্তর হল $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/4}$. **32.** $\frac{\sqrt{\pi}\, e^{-t^2}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Chapter VII
Line and surface integrals

DAY 38
Line integral (part 1)

আজকে আমরা একটা নতুন জিনিস শিখব, যার নাম হল **line integral**. জিনিসটা নতুন হলেও মূল ধারণাটা আমরা আগেই বহুবার দেখেছি। যখন আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে প্রথম definite integral শিখেছিলাম, তখন আমরা integrate করতাম একটা interval-এর উপরে, যেমন $\int_0^1 f(x)\,dx$ মানে $f(x)$-কে $[0,1]$-এর উপরে integrate করা। গত অধ্যায়ে আমরা শিখলাম একটা rectangle-র উপরে integrate করা। যেমন $R=[0,1]\times[0,2]$ হলে $\iint_R f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ বার করা। Rectangle-এর বদলে Fig 1-এর মত কোনো অঞ্চল হলেও চলত। Line integral-এর ক্ষেত্রেও ব্যাপারটা একইরকম, খালি এবার integration-টা হবে একটা curve বরাবর। ব্যাপারটা কী, এবং খামোখা কেনই বা কাজে লাগবে, সেটা আগে একটু গল্প দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। যে function-টাকে integrate করছি সেটা একটা scalar field নাকি vector field, তার উপর নির্ভর করে গল্পটা দুইভাবে বলা যায়[1]। এদের মধ্যে scalar field-এর গল্পটা সহজতর। সেটা দিয়েই শুরু করি।

38.1 Scalar field-এর line integral

ধরো হিমালয়ে গেছ, সেখানে বেজায় বরফ পড়েছে। প্রচণ্ড হাওয়া দিচ্ছিল, তাই বরফ সর্বত্র সমানভাবে পড়েনি, কোথাও বেশী উঁচু, কোথাও কম উঁচু। তুমি যেখানে দাঁড়িয়ে আছ, সেখানে পায়ের তলার জমি এমনিতে দিব্যি সমতলই ছিল, কিন্তু অসমানভাবে বরফ পড়ার দরুণ এখন পাহাড়ের মত ঢেউখেলানো দেখাচ্ছে। তোমাকে এই বরফ কেটে পথ করে এগোতে হবে। প্রশ্ন হল--কতটা বরফ তোমাকে কাটতে হবে? বলাই বাহুল্য, এই পরিমাণটা নির্ভর করবে তোমার পথটা কোথা দিয়ে গেছে, তার উপর। যদি উঁচু উঁচু ঢিপিগুলোর মধ্যে দিয়ে যায়, তবে বেশী বরফ সরাতে হবে, আবার অপেক্ষাকৃত নীচু অংশগুলো দিয়ে গেলে কম বরফ সরালেই চলবে। এই বরফের পরিমাণটাই হল line integral. এখানে পায়ের নীচের সমতল জমিটা হল আমাদের xy-plane, যেটাকে Fig 2-এ দেখিয়েছি। যে পথে তুমি যেতে চাইছ, সেই curve-টাকে দেখিয়েছি ড্যাশ্ ড্যাশ্

[1] আশা করি মনে আছে যে, scalar field মানে real-valued function, আর vector field মানে যে function-এর codomain $\mathbb{R}^n$, যেখানে $n \geq 2$ হতে পারে।

Fig 1

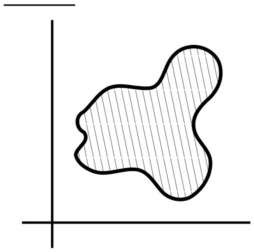
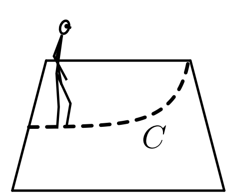


Fig 2



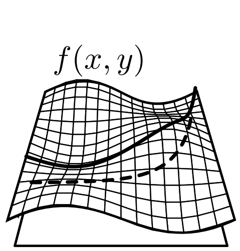


Fig 3

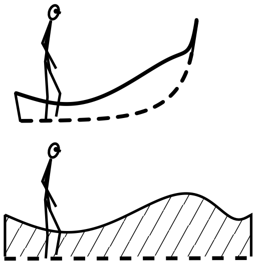


Fig 4

লাইন দিয়ে। ঢেউখেলানো বরফটা হল তার উপরে একটা surface, যেটাকে একটা function-এর গ্রাফ বলে ভাবা যায়, ধরো $f(x, y)$. বোঝার জন্য Fig 3 দেখে নাও। এই পথ বরাবর মোট বরফের পরিমাণটাকে বলব "line integral of f along C." লেখার সময়ে লিখি

$$\int_C f(x, y)\, d\ell.$$

এখানে integrand-এর মধ্যে variable হল x আর y, অথচ শেষে লিখেছি $d\ell$. এ থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে আমরা এখানে line integral করছি, অনেক সময়ে ওর জায়গায় ds-ও লেখা হয় (যেখানে integrand-এর variable-টা s-ছাড়া অন্য কিছু হয়)।
গল্প দিয়ে ব্যাপারটা বলা হল। কিন্তু line integral-টা বার করার কোনো কায়দা এখনও বলিনি। সেটাও ছবি দিয়ে একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে। Fig 4-এ খালি পথের উপরের বরফটুকুকেই দেখিয়েছি। ঠিক যেন একটা আঁকাবাঁকা কার্ডবোর্ডের টুকরো। আমাদের কাজ হল তার area-টা বার করা। যদি কার্ডবোর্ডের টুকরোটাকে সটান সোজা করে ধরি, তবেই ব্যাপারটা মুহূর্তের মধ্যে হায়ার সেকণ্ডারীতে শেখা integral-এ পরিণত হবে।

এই QR code-টা তোমার মোবাইল দিয়ে স্ক্যান করলেই একটা ভিডিওতে পৌঁছবে। সেখানে ব্যাপারটা অ্যানিমেশন দিয়ে করে দেখিয়েছি। যদি QR code-টা কাজ না করে, তবে নীচের address-টা সরাসরি Google-এ টাইপ করে চেষ্টা করতে পারো। তাতেও কাজ না হলে আমাকে জানিও। এই বইয়ের ভূমিকায় আমরা Whatsapp নম্বর পাবে।
`https://arnabc74.github.io/mult/card.html`

এই গল্পটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করতে খালি একটাই সমস্যা--ওই কার্ডবোর্ডটা সোজা করার জায়গাটা। সেটা বোঝার জন্য জানা দরকার একটা curve-কে কী করে অংকের ভাষায় প্রকাশ করে। প্রথমে চিন্তা করো, কী করে তুমি একটা curve আঁকো--

> তুমি হাতে একটা পেন নাও, সেটাকে কাগজে ছোঁয়াও, এবং কাগজে ছুঁইয়ে রেখেই খানিকক্ষণ পেন চালাতে থাকো, এবং এক সময়ে পেনটা কাগজ থেকে তুলে নাও।

ঠিক এটাই আমরা অংকের ভাষায় প্রকাশ করব। পেনটা যতক্ষণ চলছে, ততক্ষণ পেনের বিন্দুটাকে (x, y) বললে, x আর y দুজনেই হবে সময় t-এর function. তাই আমরা (x, y) না লিখে $\big(x(t),\, y(t)\big)$ লিখব। সেই সঙ্গে এটাও বলতে হবে পেনটা কখন চলতে শুরু করল, এবং কখনই বা থামল। শুরুর সময়টা যদি $t = a$ আর শেষের সময়টাকে $t = b$ বলি, তবে $x(t)$ আর $y(t)$ দুজনেই $[a, b]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ function হবে। এই a, b এবং function দুটো ঠিক কী নেব, সেটাই ঠিক করবে curve-টা কীরকম দেখতে হবে। কয়েকটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 5, Fig 6 এবং Fig 7-এ। এইভাবে একটা curve-কে প্রকাশ করাকে বলে তার **parametric form** এবং ওই t-কে বলে তার **parameter**.
এই গেল curve-এর কথা। এবার আবার integral-এর প্রসঙ্গে ফিরে আসি। আমাদের কাজ ছিল $f(x, y)$-কে C বরাবর integrate করা। যেহেতু C-কে $(x(t), y(t))$ আকারে প্রকাশ করা যাচ্ছে, তাই ফস করে মনে হতে পারে যে $\int_a^b f(x(t), y(t))\, dt$

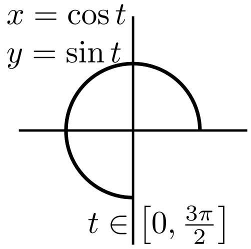


Fig 5

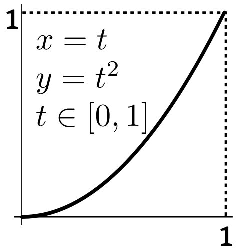


Fig 6

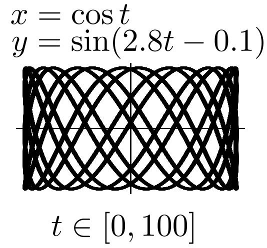


Fig 7

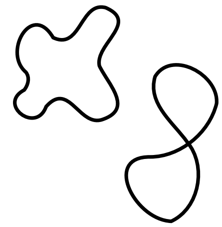


Fig 8

বার করলেই হবে। কিন্তু একটা প্যাঁচ আছে এখানে। লক্ষ করো, আমরা যখন সহজ বুদ্ধিতে একটা curve-এর কথা ভাবি, তখন খালি পেনের দাগটার কথাই ভাবি, কিন্তু অংকের ভাষায় যখন তাকে $\big(x(t),\, y(t)\big)$ হিসেবে লিখছি, তখন কিন্তু কী করে আঁকা হয়েছে সেটাও তার মধ্যে ধরা হচ্ছে। অর্থাৎ কিনা একই দাগ আস্তে আস্তে আঁকলে বা হুড়মুড়িয়ে আঁকলে, অংকের ভাষায় সেগুলো কিন্তু বিভিন্ন curve বলে গণ্য হবে। এর ফলে একটু সমস্যা দেখা দেয়। আমি জোরে হাঁটছি, নাকি আস্তে, তার উপরে নিশ্চয়ই বরফের মোট পরিমাণ নির্ভর করবে না! সুতরাং কোথাও একটা সেই ব্যাপারটা হিসেবে নিতে হবে। সেইটা হিসেবে নেওয়ার পরে ব্যাপারটা কীরকম দাঁড়ায়, সেটা প্রথমে বলে নিই। ব্যাখ্যাটা একটু পরে করছি।

DEFINITION: Line integral of a scalar field

Let C be a curve given by $\mathbf{x}(t) \equiv (x(t), y(t))$ for $t \in [a, b]$. Let $f(x, y)$ be some real-valued function defined on it. Then the **line integral** of f along C is defined as

$$\int_C f\, d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt.$$

If the curve is closed, *i.e.*, if $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, then we also write the integral as

$$\oint_C f\, d\ell.$$

এখানে কয়েকটা কথা বলা দরকার--

- এক, ওই $\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}$-টা হল পেনটা চালানোর স্পীড।
- দুই, একটা curve-কে closed বলছি যখন সেটা একটা লুপের মত, যেখানে শুরু ফের সেখানেই এসে শেষ হয়েছে (Fig 8)। এর সঙ্গে কিন্তু closed set-এর কোনো সম্পর্ক নেই।
- কোনো line integral বার করার সময়ে আমরা curve ধরে কোন্ দিকে যাচ্ছি সেটা গুরুত্বপূর্ণ। যদি অভিমুখটা উল্টে দিই, তবে line integral-টার চিহ্নও উল্টে যাবে।
- আমরা সংজ্ঞাটা দিয়েছি $\mathbb{R}^2$-এর বেলায়। একইভাবে $\mathbb{R}^3$-এর জন্যও দেওয়া চলত। খালি সেখানে $\mathbf{x}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ নিতাম, এবং সংজ্ঞাটা হত

$$\int_C f\, d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt$$

চাইলে কাজটা যেকোনো $\mathbb{R}^n$-এর জন্যই করা যায়, যদিও $n \geq 4$ হলে $\mathbb{R}^n$-এর মধ্যেকার কোনো curve-কে আর ছবি দিয়ে ভাববার জো নেই। এখানে একটা curve-কে প্রকাশ করতে হবে $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ হিসেবে, আর সংজ্ঞাটা হবে

$$\int_C f\, d\ell = \int_a^b f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \cdots + \left(x_n'(t)\right)^2}\, dt$$

অবশ্য সংক্ষেপে লেখার সময়ে সবক্ষেত্রেই $\int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt$ লেখা যায়।

এই সব সংজ্ঞা কোথা থেকে এল সেটা আমরা কিছু পরে ছবি-টবি দিয়ে বুঝব। আগে কয়েকটা অংক করে সড়গড় হয়ে নিই।

38.1.1 হাতেকলমে

Example 1: $f(x,y) = x\sqrt{1+4y}$ হলে $\int_C f\, d\ell$ বার করো, যেখানে C হল এই curve-টা, (t, t^2). বলা আছে $0 \leq t \leq 1$.

SOLUTION: ছবিটা একটু আগেই দেখেছ Fig 6-এ। এখানে $x(t) = t$ এবং $y(t) = t^2$. তাই $x'(t) = 1$ এবং $y'(t) = 2t$. সংজ্ঞা থেকে পাচ্ছি--

$$\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 t(1+4t^2)\, dt = \frac{3}{2}.$$

■

Exercise 1: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\int_C f\, d\ell$ বার করো।

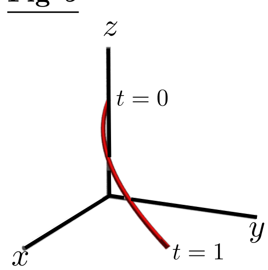
1. $f(x,y) = x + y$ এবং C হল (t,t) যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2 পর্যন্ত।
2. $f(x,y) = x + y$ এবং C হল (t,t) যেখানে t যাচ্ছে 2 থেকে 0 পর্যন্ত।
3. $f(x,y) = xy$ এবং C হল (t^2, t^2) যেখানে t যাচ্ছে -1 থেকে 1 পর্যন্ত।
4. $f(x,y) = y$ এবং C হল (t^2, t) যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2 পর্যন্ত।

■

এবার একটা $\mathbb{R}^3$-এর উদাহরণ দেখি।

Example 2: $f(x,y,z) = x\sqrt{x+2y+z}$ হলে $\int_C f\, d\ell$ বার করো, যেখানে C হল এই curve-টা, $(t, t^2, 1-t)$.

Fig 9



বলা আছে $0 \leq t \leq 1$.
SOLUTION: ছবিটা দেখিয়েছি Fig 9-এ। এখানে $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ এবং $z(t) = 1-t$. তাই $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$ এবং $z'(t) = -t$. সংজ্ঞা থেকে পাচ্ছি--

$$\int_0^1 t\sqrt{t + 2t^2 + (1-t)}\sqrt{1^2 + (2t)^2 + (-1)^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 t(1 + 2t^2)\, dt = \sqrt{2}.$$

■

Exercise 2: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\int_C f\, d\ell$ বার করো।

1. $f(x, y, z) = x + y + z$ এবং C হল (t, t, t) যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2 পর্যন্ত।
2. $f(x, y, z) = z^2$ এবং C হল (t, t, e^t) যেখানে t যাচ্ছে 2 থেকে 0 পর্যন্ত।
3. $f(x, y, z) = x - y$ এবং C হল $(t^2, t^2, 2-t)$ যেখানে t যাচ্ছে -1 থেকে 1 পর্যন্ত।
4. $f(x, y, z) = -z$ এবং C হল $(\cos t, \sin t, t)$ যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2π পর্যন্ত।

■

এবার একটা $\mathbb{R}^4$-এর অংক করি। **Example 3:** $\int_C f\, d\ell$ বার করো যেখানে C হল $(1+t, 2-t, 3t, t^2)$ যেখানে $t \in [0, 1]$, এবং $f(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 5x_2 + \frac{4}{3}x_3 + 4x_4$.
SOLUTION:

Here $x_1(t) = 1+t$, $x_2(t) = 2-t$, $x_3(t) = 3t$ and $x_4(t) = t^2$. So

$$\begin{aligned}\int_C f\, d\ell &= \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_4)\sqrt{\sum (x_i'(t))}\, dt \\ &= \cdots \\ &= \int_0^1 (11 + 4t^2)\, dt \\ &= \cdots = \frac{37}{3}.\end{aligned}$$

■

Exercise 3: Choose the correct option and justify. Value of the integral $\int \frac{ds}{x-y}$ along the line $2y = x - 4$ between the points $(0, -2)$ and $(4, 0)$ is

(A) $\sqrt{5}\log 2$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}\log 2$ (C) $2\sqrt{5}\log 2$ (D) None of these.

[1+1] **(2021.1g)**
HINT: লক্ষ করো এখানে $d\ell$ না লিখে ds লিখেছে। এখানে কোনো parametric form-ও বলে দেয় নি। সেটা আমাদেরকেই বার করে নিতে হবে। এখানে $x = 2y + 4$, তাই আমরা $y = t$ আর $x = 2t + 4$ নিলেই একটা parametric form পেয়ে যাব $(2t + 4, t)$. প্রশ্ন হল t কোথা থেকে কোথায় যাচ্ছে। দুই প্রান্তের বিন্দু দুটো হল $(0, -2)$ এবং $(4, 0)$.

এদের মধ্যে প্রথমটা পাবে $t = -2$ বসালে আর দ্বিতীয়টা আসবে $t = 0$ বসালে। অংকটায় অবশ্য বলে দেয়নি যে $(0, -2)$ থেকে $(4, 0)$-র দিকে যাচ্ছি, নাকি উল্টোটা (বলে দেওয়া উচিত ছিল)। বলে নি যখন, আমরা ধরে নেব প্রথম বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বিন্দুর দিকে যাচ্ছি, মানে $t = -2$ থেকে $t = 0$-তে। এবার বাকিটুকু তোমার জন্য রেখে দিলাম। ■

38.1.2 Function-টা যেখানে parameter দিয়েই বলেছে

এতক্ষণ যে সব অংক দেখছিলাম সেখানে integrand-টা দেওয়া থাকছিল $f(x, y)$ বা $f(x, y, z)$ আকারে, মানে function-টা $\mathbb{R}^2$ বা $\mathbb{R}^3$-র উপরে দেওয়া থাকছিল। কিন্তু সংজ্ঞা অনুযায়ী function-টা খালি curve-টুকুর উপর defined হওয়াই যথেষ্ট। অনেক অংকে function-টা সেইভাবেই দেওয়া থাকে। সেরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 4: ধরো curve-টা হল C, যার বর্ণনা $(\cos t, \sin t)$ যেখানে $0 \leq t \leq \pi$. এর উপরের প্রতিটা বিন্দুকেই কোনো না কোনো t দিয়ে প্রকাশ করা যায়। সেই t বিন্দুতে আমাদের integrand-টা দিচ্ছি এইরকম, $g(t) = t^2$. তবে $\int_C g\, d\ell$ কত হবে?

SOLUTION: সংজ্ঞায় যেখানে $f(x(t), y(t))$ লিখেছিল, এখন সেখানে $g(t)$ লিখব, ব্যস! তার মানে

$$\int_C g\, d\ell = \int_0^\pi g(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^\pi t^2\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^\pi t^2\, dt = \frac{\pi^3}{3}.$$

■

Exercise 4: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\int_C g\, d\ell$ বার করো।

1. $g(t) = t$ এবং C হল (t, t^2, t) যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত।
2. $g(t) = \sin t$ এবং C হল (t^2, t^3) যেখানে t যাচ্ছে $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত।
3. $g(t) = t$ এবং C হল $(\cos t, \sin t, 2t)$ যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2π পর্যন্ত।
4. $g(t) = \frac{1}{t}$ এবং C হল $(t, 1 - t)$ যেখানে t যাচ্ছে 1 থেকে 2 পর্যন্ত।

■

38.1.3 যদি differentiable না হয়

Line integral-এর সংজ্ঞায় curve-টাকে differentiate করতে হয়, কারণ $x'(t)$, $y'(t)$ ইত্যাদি বার করতে হয়। কিন্তু অনেক সময়ে t-এর দু-একটা value-তে $x(t)$ বা $y(t)$ differentiable হয় না। তখন curve-টাকে সেসব জায়গায় ভেঙে

Fig 10

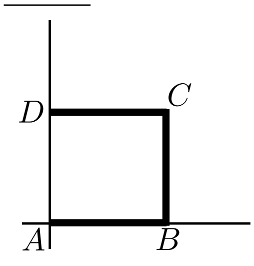
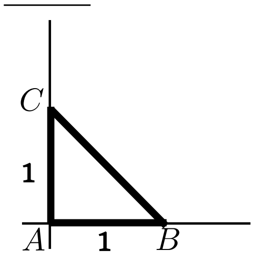


Fig 11



কয়েকটা টুকরো করে নিতে হয়, এবং প্রতিটা টুকরোর জন্য আলাদা করে line integral বার করে সেগুলো যোগ করে দিতে হয়। এরকম কিছু অংক দেখাব এবার।

Example 5: Fig 10-এর curve-টা লক্ষ করো। এটাকে আমরা তিনভাগে ভেঙে লিখতে পারি, A থেকে B, তারপর B থেকে C, এবং সব শেষে C থেকে D. রয়েছে। অংশগুলো হল--

- $\underline{A \text{ থেকে } B:}$ $(t, 0)$ যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত।
- $\underline{B \text{ থেকে } C:}$ $(1, t)$ যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত।
- $\underline{C \text{ থেকে } D:}$ $(t, 1)$ যেখানে t যাচ্ছে 1 থেকে 0 পর্যন্ত।

এই curve বরাবর $f(x, y) = x + y$-এর line integral বার করো।
SOLUTION: আমরা প্রতিটা অংশের উপর আলাদা করে line integral বার করব--

- $\underline{A \text{ থেকে } B:}$ এখানে $\int_{AB}(x+y)\,d\ell = \int_0^1 (t+0)\sqrt{1^2+0^2}\,dt = \frac{1}{2}$.
- $\underline{B \text{ থেকে } C:}$ এখানে $\int_{BC}(x+y)\,d\ell = \int_0^1 (1+t)\sqrt{0^2+1^2}\,dt = \frac{3}{2}$.
- $\underline{C \text{ থেকে } D:}$ এখানে $\int_{CD}(x+y)\,d\ell = \int_1^0 (t+1)\sqrt{1^2+0^2}\,dt = -\frac{3}{2}$.

সবগুলো যোগ করে উত্তর হবে $\int_{AB}(x+y)\,d\ell + \int_{BC}(x+y)\,d\ell + \int_{CD}(x+y)\,d\ell = \frac{1}{2}$. ■

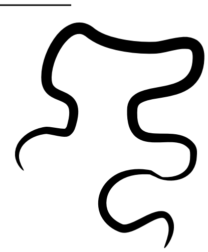
Exercise 5: Fig 11-এর জন্য $\int_{ABCA} xy\,d\ell$ বার করো। ■

38.1.4 রহস্য

এইবার আমরা ছবি দিয়ে বুঝব line integral-এর সংজ্ঞাটা কোথা থেকে আসে। আমরা তার জন্য একটা বাস্তব সমস্যাকে সহজ বুদ্ধিতে সমাধান করতে চেষ্টা করব, এবং দেখব যে line integral-এর ফর্মুলাটা খুব স্বাভাবিকভাবেই চলে আসে।
ব্যাপারটা এইরকম। মনে করো একটা তার আছে (Fig 12)। লক্ষ করো তারটার ঘনত্ব সর্বত্র সমান নয়, ছবিতে ঘনত্বের তারতম্যটা সরু-মোটা করে এঁকে বুঝিয়েছি। তারটা যে curve সৃষ্টি করেছে সেটাকে $(x(t), y(t))$ আকারে দেওয়া আছে, যেখানে $t \in [a, b]$. এর প্রতিটি বিন্দুতে ঘনত্বও দেওয়া আছে $f(x, y)$. এখানে ঘনত্ব মানে হল একক দৈর্ঘ্যের mass. যেমন যদি বলি কোনো বিন্দুতে ঘনত্ব হল 2 gm/ cm, তার মানে--যদি পুরো তারটাই ওই একই ঘনত্বের হত, তবে তার প্রতি cm-এর mass হত 2 gm করে। কিন্তু সমস্যা এখানেই যে ঘনত্বটা বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হতে পারে। তোমার কাজ হল পুরো তারটার mass বার করা। উত্তরটা আগেই বলে রাখি--

$$\int_C f\,d\ell.$$

Fig 12



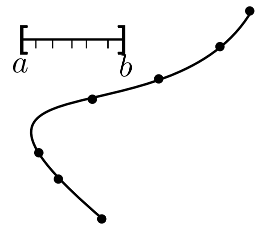


Fig 13

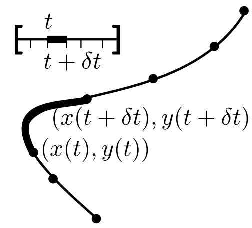


Fig 14

এবার আমরা সহজ বুদ্ধিতে এগোব, এবং দেখব যে line integral-এর সংজ্ঞাতে এসে পৌঁছই কিনা। প্রথমে আমরা $[a, b]$-কে অনেকগুলো ছোটো ছোটো ভাগে ভাঙব (Fig 13)। এর ফলে curve-টাও অনেকগুলো ভাগে ভেঙে যাবে। ধরো একটা ছোটো ভাগ t থেকে $t+\delta t$ পর্যন্ত (Fig 14)। curve-র উপরে এর ফলে যে টুকরোটার জন্ম হয়েছে সেটা গেছে $(x(t), y(t))$ থেকে $(x(t)+\delta x, y(t)+\delta y)$ পর্যন্ত। খুব ছোটো জায়গার মধ্যে বাঁকা জিনিসকেও সোজা মনে হয়, একটা curve-এর উপর কোনো বিন্দুর neighbourhood-এ curve-টাকে তার tangent-এর থেকে খালি চোখে আলাদাই করা যায় না। তাই আমরা বলতে পারি যে $\delta x \approx x'(t) \times \delta t$ আর $\delta y \approx y'(t) \times \delta t$. অতএব টুকরোটার দৈর্ঘ্য হল মোটামুটিভাবে

$$\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} \times \delta t.$$

যেহেতু খুব ছোটো অংশ, তাই ঘনত্ব প্রায় একই রয়েছে ধরা যায়, মানে এই টুকরোটার সর্বত্রই ঘনত্ব $f(x(t), y(t))$ নিচ্ছি। তাই mass হবে $f(x(t), y(t)) \times \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} \times \delta t$. এরকম সব ছোটো ছোটো টুকরোর mass যোগ করে limit নিলে পাবে

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt.$$

লক্ষ করো এটাই ঠিক সেই line integral-এর সংজ্ঞার integral-টাই, যাকে সংক্ষেপে লিখেছিলাম $\int_C f\, d\ell$.

DAY 39
Line integral (part 2)

গতকাল আমরা scalar field-এর line integral বার করা শিখেছি। এর একটা ভীষণ গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ আছে physics-এ। সেই কায়দা ব্যবহার করে আমরা একটা vector field-এরও line integral বার করে ফেলতে পারি। এবার সেটাই আলোচনা করব।

39.1 Vector field-এর line integral (tangent বরাবর)

গোড়ায় আমরা খুব অল্প একটু physics আলোচনা করে নেব। এর জন্য প্রথমে জানতে হবে work কাকে বলে। ইংরাজিতে "work" মানে যে বাংলায় "কাজ", সে তো সকলেই জানে। কিন্তু physics-এ এই ধারণাটার একটা বিশেষ সংজ্ঞা আছে। সংজ্ঞাটা আমরা সকলেই স্কুলে থাকতে অল্পবিস্তর শিখে থাকি। পাছে ভুলে গিয়ে থাকো, তাই একবার একটু মনে করিয়ে দিই। ধরো, তুমি একটা টেবিলকে ঠেলতে ঠেলতে নিয়ে চলেছ। Physics-এর ভাষায় তুমি টেবিলটার উপর force (বল) প্রয়োগ করছ। সেটা একটা vector, কারণ কোন্ দিকে ঠেলছ, আর কত জোরে ঠেলছ, এ দুটোই গুরুত্বপূর্ণ। টেবিলটা যে সরছে, এটাকে physics-এর ভাষায় বলে displacement (সরণ), সেটাও আরেকটা vector, কারণ কোন্‌দিকে সরছে আর কতটা সরছে, দুটোই গুরুত্বপূর্ণ। Physics-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী work হল এই দুই vector-এর dot product, অর্থাৎ--

work = force • displacement.

একটা অংক কষে এটা খেয়াল রাখা যাক।

Example 6: Answer the following multiple choice question with only one correct option. Choose the correct option and justify. A particle, acted on by the constant forces $(5\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$ and $(2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})$, is displaced from the origin to the point $(4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})$. The total work done by the forces is

(A) 33 units (B) 35 units (C) 37 units (D) None of these.

[1+1] **(2021.1j)**

SOLUTION:

> Here total force $= (5,2,1) + (2,-1,-3) = (7,1,-2)$.
> Also displacement $= (4,1,-3)$.
> So work $= (7,1,-2) \bullet (4,1,-3) = 7\times 4 + 1\times 1 + (-2)\times(-3) = 35$.
> So (B) is the correct option.

■

Exercise 6: ধরো আমাদের force-টা হল $(1,2,3)$ আর displacement-টা হল $(0,0,-3)$. তবে work কত হবে?
■

"Work"-এর এই সংজ্ঞাটা আমাদের প্রতিদিনকার "কাজ"-এর ধারণার সঙ্গে পুরোপুরি খাপ খায় না, তাই হজম হতে একটু সময় লাগে। যেমন ধরো, এই সংজ্ঞা অনুযায়ী কাজ < 0 হতে পারে (উদাহরণস্বরূপ, force = (1,1,1) এবং displacement= $(-1,-1,-1)$ হলে work হবে -3.)। এমনধারা সংজ্ঞা কেন physics-এ ব্যবহার করা হয়, সেটা ব্যাখ্যা করার জায়গা এটা নয়। আমরা খালি দেখব যে এই সংজ্ঞা থেকে কীভাবে line integral এসে পড়ে।

এই যে "work = force • displacement" বললাম, সেটা সরাসরি ব্যবহার করা যাবে সেইসব ক্ষেত্রের জন্য যখন force আর displacement, দুটোই স্থির আছে, মানে সোজা কোনো এক দিকে সরছে, এবং প্রতি মুহূর্তেই একই দিকে একই পরিমাণ জোরে ঠেলা বা টানা হচ্ছে। কিন্তু সর্বদাই যে এমনটা হবে, সেরকম তো কোনো কথা নেই। যেমন ধরো, অবস্থাটা Fig 15-এর মত হতেই পারে, যেখানে একটা বেলুন সোজা শূন্যে উঠছে, যতই উঠছে, হাওয়া ততই পাতলা হচ্ছে, তাই বেলুনটার উপরে হাওয়ার force-ও ক্রমশঃ কমছে। কিংবা Fig 16-এর মত, যেখানে জিনিসটা একটা curve বরাবর সরছে (ফলে displacement-এর অভিমুখ বদলে বদলে যাচ্ছে)। সেরকম ক্ষেত্রেও তো work হচ্ছে, সেটা বার করব কীভাবে? উত্তর হল, সেই আগের সংজ্ঞা দিয়েই, কিন্তু একটু কৌশল করে। Fig 17-এর দিকে চোখ রাখো। আমাদের curve-টা দেওয়া আছে $(x(t),y(t))$ হিসেবে, যেখানে t যাচ্ছে a থেকে b পর্যন্ত। ধরো t মুহূর্তে force-টা হল $\big(F_1(t),F_2(t)\big)$. যে curve বরাবর

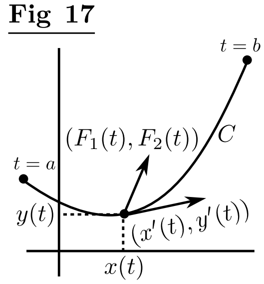
Fig 15



Fig 16



Fig 17



সরছে, সেটাকে যদি $\big(x(t), y(t)\big)$ বলি, তবে t মুহূর্তে displacement-এর অভিমুখ হল ওই বিন্দুতে curve-টার tangent বরাবর, মানে $\big(x'(t), y'(t)\big)$ বরাবর। মনে করো যেন খুব অল্প একটু সময় δt ধরে এই অভিমুখটা স্থির রইল। তবে এইটুকু সময়ে displacement হবে $\big(x'(t), y'(t)\big)\delta t$. আমরা ধরব এই অল্প একটু সময়ে force-টাও প্রায় স্থির থাকছে। তাহলে ওই অল্প একটু সময়ের জন্য work-টা হবে মোটামুটিভাবে এই দুটো vector-এর dot product, মানে

$$\big(F_1(t)x'(t) + F_2(t)y'(t)\big)\delta t.$$

এরকম ছোটো ছোটো বহু টুকরোর মোট বার করে limit নিলে কী হবে আন্দাজ করতে পারছ--

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) \bullet \mathbf{x}'(t)\, dt.$$

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে, এটা আসলে একটা line integral. তার জন্য খালি integrand-টাকে একটু সাজিয়ে লিখলেই হবে--

$$\mathbf{F}(t) \bullet \mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t) \bullet \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \times \|\mathbf{x}'(t)\|.$$

এই বিশেষ line integral-টা এত কাজে লাগে যে, লোকে এর জন্য একটা আলাদা চিহ্ন বরাদ্দ করেছে--

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

মুখে বলি **line integral** of $\mathbf{F}$ along C. অনেক সময়ে একে এভাবেও লেখা হয়--

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy.$$

Line integral বার করার সময়ে এই রূপটা ব্যবহার করলেই বেশী সুবিধা হয়।
এই আলোচনায় আমরা $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে কাজ করছিলাম। যদি $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে কাজ করি, সেক্ষেত্রে বাড়তি $z(t)$ আসবে, এবং force-এরও একটা তৃতীয় component আসবে $F_3(t)$. সুতরাং হবে

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz.$$

কয়েকটা অংক করে ব্যাপারটা সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

39.1.1 হাতেকলমে

Example 7: ধরো curve-টা হল $(\cos t, \sin t)$, যেখানে $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. এর উপর যেকোনো বিন্দু (x, y)-তে একটা

Fig 18

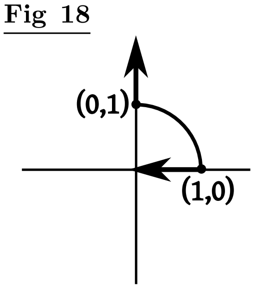


Fig 19

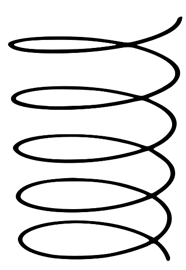


Fig 20

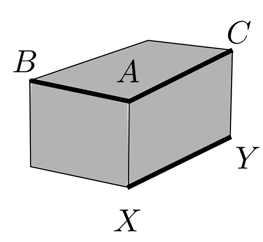
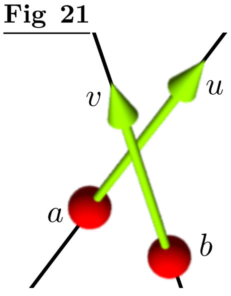


Fig 21



force কাজ করছে, $(-x, y)$. যেমন $(1,0)$ বিন্দুতে force-টা হল $(-1,0)$, আবার $(0,1)$ বিন্দুতে force-টাও হল $(0,1)$. বোঝার জন্য Fig 18 দেখে নাও। তবে $t=0$ থেকে $t=\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত মোট work বার করো।
SOLUTION: এখানে $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $F_1(t)=-x(t)=-\cos t$ এবং $F_2(t)=y(t)=\sin t$. সুতরাং মোট work হবে

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(-\sin t) + \sin t\cos t\,dt = \cdots = 1.$$

■

Exercise 7: আগের অংকের curve-টাই নাও। কিন্তু force-টা নাও $(x+y, x-y)$. এবার মোট work কত হবে? ■

Exercise 8: Consider the subset $S=\{(x,y) \;:\; x^2+y^2>0\}$ of $\mathbb{R}^2$. Let

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2} \text{ and } Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

for $(x,y)\in S$. If C denotes the unit circle traversed in the counter-clockwise direction, then the value of

$$\frac{1}{\pi}\int_C (P\,dx + Q\,dy)$$

is ... **(JAM.2021.NAT44)**
HINT: এখানে C-এর জন্য এই parametric form-টা নিলেই হবে--

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$

যতই θ এগোবে 0 থেকে 2π-এর দিকে, ততই তুমি unit circle-টা ধরে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে ঘুরবে। ■

এইবারের অংকটা কিছুটা কসরতের। তার উপর আবার প্রশ্নে খানিকটা ভুলও আছে। যারা এই বইটা নিছক অংক শেখার আনন্দে পড়ছ, এবং পরীক্ষার প্রত্যেকটা প্রশ্নের খুঁটিনাটি নিয়ে যাদের মাথাব্যথা নেই, তারা নীচের অংকটা বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 8: Let T be the smallest positive real number such that the tangent to the helix

$$\cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + \frac{t}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

at $t=T$ is orthogonal to the tangent at $t=0$. Then the line integral of $\vec{F}=x\hat{j}-y\hat{i}$ along the section of the helix from $t=0$ to $t=T$ is ... . **(JAM.2017.NAT52)**
SOLUTION: Helix-টার ছবি দিয়েছি Fig 19-এ। এই অংকটায় একটা ভুল আছে। সেটা হল $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে দুটো লাইনকে কখন পরস্পরের সঙ্গে orthogonal বলা যাবে, সেটা নিয়ে। যদি $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে কাজ হত, তবে slope-এর গুণফল -1 হচ্ছে কিনা দেখলেই চলত। কিন্তু $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে খালি slope দেখলেই চলবে না, কারণ দুটো লাইন skew line হয়ে যেতে পারে। যেমন ধরো Fig 20-এ AB আর AC হল পরস্পরের সঙ্গে orthogonal, কিন্তু AC এবং XY-এর slope একই হওয়া সত্ত্বেও XY-কে AB-র সঙ্গে orthogonal বলা যাচ্ছে না। ওরা পরস্পরের সঙ্গে skew হয়ে আছে, মানে এক plane-এই নেই! এই ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করা যাক। ধরো, লাইন দুটো হল $\mathbf{a}+u\mathbf{p}$ আর $\mathbf{b}+u\mathbf{q}$ (যেখানে $u\in\mathbb{R}$), অর্থাৎ প্রথম সরলরেখাটা $\mathbf{a}$ বিন্দু দিয়ে যায় $\mathbf{p}$ অভিমুখে, এবং দ্বিতীয়টা $\mathbf{b}$ দিয়ে যায় $\mathbf{q}$ অভিমুখে (Fig 21)। তবে ওদের orthogonal হবার জন্য দুটো শর্ত দরকার--

- এক, ওরা যেন পরস্পরকে ছেদ করে,

- এবং দুই, যেন $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} = 0$ হয়।

কিন্তু এই শর্তদুটো অনুযায়ী দেখলে এই অংকে তুমি কখনোই orthogonal পাবে না। এই অংকে প্রথম শর্তটাকে স্রেফ অগ্রাহ্য করে গেছে। অবশ্য তাতে লেখার পরিশ্রম বেঁচে যাবে!
অংকটার দুটো অংশ--এক, T বার করা, আর দুই, line integral-টা বার করা। প্রথমে T বার করার চেষ্টা করি--

> At any value of t the point on the helix is $\left(\cos t, \sin t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. The derivative is $\left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

সুতরাং tangent-টা হবে--

> The tangent there is $\underbrace{\left(\cos t, \sin t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\mathbf{p}} u.$

এর সঙ্গে তুলনা করতে হবে $t = 0$ বিন্দুতে tangent-টা--

> At $t = 0$ the tangent is $\underbrace{(1, 0, 0)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\mathbf{q}} u$ for $u \in \mathbb{R}$.

আমরা খালি দ্বিতীয় শর্তটা পরীক্ষা করে দেখব, মানে $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} = 0$ হচ্ছে কিনা। যেহেতু প্রথম শর্তটা বাদ দিলাম, তাই এটা খালি একটা necessary শর্তমাত্র।

> A necessary condition for orthogonality at $t = T$ is
>
> $$\left(-\sin T, \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bullet \left(0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$
>
> or $\cos T = -\frac{1}{2}$.

এ থেকে T বার করার জন্য আমি সাধারণতঃ Fig 22-এর মত গ্রাফ দিয়ে চিন্তা করি। লক্ষ করো ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা গ্রাফটার নীচের ঢিপিগুলোকে দুই জায়গায় ছেদ করছে, ফলে T-কে হতে হবে "$(2n+1)\pi \pm$ কিছু একটা"-জাতীয়। এবার একটু খুঁটিয়ে দেখলেই পাবে--

Fig 22

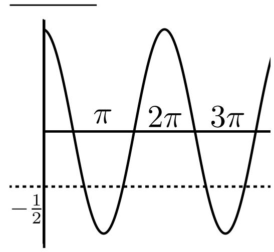
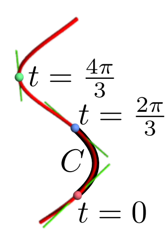


Fig 23



So $T = (2n+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$ for $n \in \mathbb{Z}$.

সবচেয়ে ছোটো $T > 0$ নিতে বলেছে, তাই $T = \frac{2\pi}{3}$ নেব। এখানে বলে রাখি যে, $(2n+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$ চেহারার কোনো বিন্দুর জন্যই orthogonality-র প্রথম শর্তটা কিন্তু পালিত হয় না। যদি হত, তবে সেটাই নিতাম, এবং অংকটাকেও ভুল বলতাম না।

So the smallest positive real T is $T = \frac{2\pi}{3}$.

ছবিতে দেখালাম Fig 23-এ। তোমার বোঝার সুবিধার জন্য $t = 0$, $\frac{2\pi}{3}$ এবং $\frac{4\pi}{3}$, এই তিন জায়গাতেই tangent এঁকে দেখিয়েছি। মনে রেখো এটা আসলে একটা 3D জিনিস, একটা চ্যাপ্টা 2D জিনিস নয়।
এবার line integral-টা বার করব। মাথা যদি গুলিয়ে গিয়ে না থাকে, তবে সে কাজটা সহজই--

Let C denote the portion of the helix between $t = 0$ and $t = T$.
The required line integral is

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (-y(t), x(t), 0) \bullet (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$$

এখানে $\vec{F} = x\hat{j} - y\hat{i} = (-y, x, 0)$ ব্যবহার করেছি।

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (-\sin(t), \cos(t), 0) \bullet \left(-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$

■

39.2 Vector field-এর line integral (normal বরাবর)

এবার আমরা আরেকভাবে vector field-এর line integral বার করা শিখব, যেটা অনেক সময়েই কাজে আসে। আমরা শুরুতেই শিখেছিলাম কী করে একটা curve বরাবর একটা scalar field-এর line integral বার করতে হয়। সেটাই line integral-এর মূল সংজ্ঞা। পরে যখন vector field-এ line integral করছিলাম, তখন বস্তুতঃ প্রথমে vector field-টা থেকে curve বরাবর একটা scalar field বানিয়ে নিচ্ছিলাম, এবং সেটার line integral বার করছিলাম। যেমন, যদি C একটা curve হয় যেটাকে আমরা $\mathbf{x}(t)$ দিয়ে লিখতে পারি, যেখানে t যাচ্ছে a থেকে b পর্যন্ত[2], তবে $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ মানে ছিল

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) \bullet \mathbf{x}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(t) \bullet \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \times \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt.$$

অর্থাৎ এটা আসলে একটা scalar field-এর line integral ছাড়া কিছুই নয়, curve-টার t বিন্দুতে যেটার value হল

$$\mathbf{F}(t) \bullet \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

এটার দিকে খানিকক্ষণ কটমট করে তাকাও, তাহলে দুটো জিনিস চোখে পড়বে--

[2] যেমন unit circle-এর বেলায় $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t)$, আর t যায় 0 থেকে 2π পর্যন্ত।

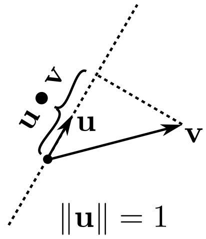


Fig 24

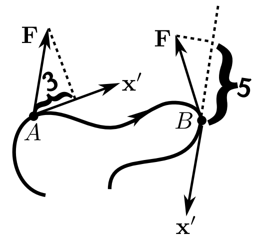


Fig 25

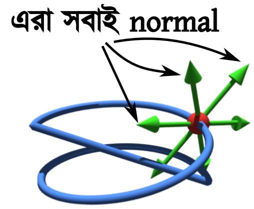


Fig 26

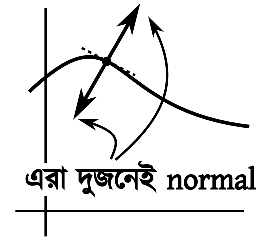


Fig 27

- এক, ওই $\frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$-টা tangent বরাবর unit vector, এর অভিমুখ হল curve বরাবর আমরা যে দিকে যাচ্ছি, সেইদিকে।

- কোনো unit vector-এর সঙ্গে কোনো vector-এর dot product নিলে সেই unit vector বরাবর ওই vector-এর component-এর দৈর্ঘ্য পাওয়া যায় (Fig 24)। চিহ্নটা প্লাস হয়, যদি component-টার অভিমুখ unit vector-টার দিকেই হয়, নইলে মাইনাস হয়। সুতরাং $\mathbf{F}(t)\bullet\frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$ হল tangent vector-এর অভিমুখে $\mathbf{F}(t)$-র component-এর দৈর্ঘ্য। যেমন Fig 25-এ A বিন্দুতে scalar field-টার value হল 3, আবার B বিন্দুতে value হল -5. চিহ্নটা মাইনাস হল, কারণ অভিমুখটা উল্টো।

অনেক সময়ে vector field থেকে একটু অন্যভাবে scalar field বানালে সুবিধা হয়, tangent-এর বদলে normal বরাবর component নিয়ে। সমস্যা হল একটা curve-এর কোনো বিন্দুতে normal দিক অনেক থাকতে পারে, $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় অসংখ্য (Fig 26), আর $\mathbb{R}^2$-র বেলায় দুটো (Fig 27)। এদের মধ্যে কোন্‌টাকে নিয়ে কাজ করব? এই প্রশ্নের সদুত্তর না পেলে এগোনো অসম্ভব। তাই আমরা যে কায়দাটা শিখতে চলেছি সেটা $\mathbb{R}^3$-এর জন্য কাজ করে না, এবং $\mathbb{R}^2$-এর বেলাতেও কেবলমাত্র **simple, closed curve**-দের বেলাতেই কাজ করে। এখানে closed curve মানে একটা লুপ, এবং simple মানে লুপটা নিজেই নিজেকে কোথাও ছেদ বা স্পর্শ করবে না (Fig 28 -এর সঙ্গে Fig 29 তুলনা করো)। এরকম লুপের বেলায় একটা ভিতর এবং বাইরে বলে ব্যাপার আছে (Fig 30)। আমরা সেই normal-টা নেব যেটা বাইরের দিকে মুখ করে আছে, একে বলে **outward normal.** ছবিতে দেখে নাও Fig 31-এ।
এইবার তবে বোঝা যাক কী করে আমরা outward normal ব্যবহার করে vector field থেকে একটা scalar field বানাই। আমরা curve-র প্রতি বিন্দুতে vector field-টার component নেব ওই বিন্দুতে outward normal বরাবর। ছবিতে দেখিয়েছি Fig 32-এ। এখানে A বিন্দুতে আমাদের scalar field-এর value হল 2 আর B বিন্দুতে -4.
অংকের ভাষায় লিখতে হলে প্রথমে outward normal-কে নাম দেওয়া হয় $\mathbf{n}$. তাহলে আমরা এই নতুন ধরণের line integral-টাকে এইভাবে লিখব--

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\mathbf{x}.$$

সব কিছু নিশ্চয়ই গুলিয়ে গেছে? কুছ পরোয়া নেই। হাতেকলমে একটা উদাহরণ করলেই স্পষ্ট হয়ে যাবে।

Fig 28

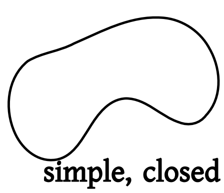


Fig 29

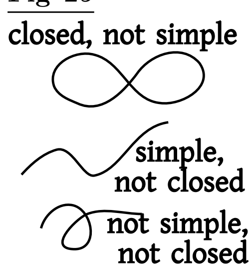
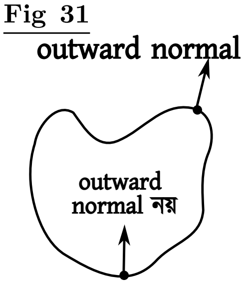


Fig 30



Fig 31



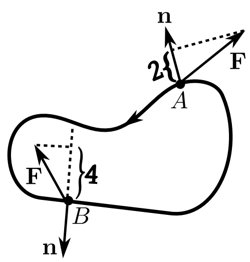


Fig 32

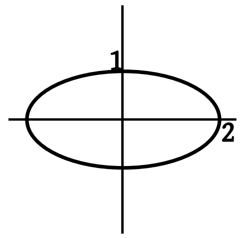


Fig 33

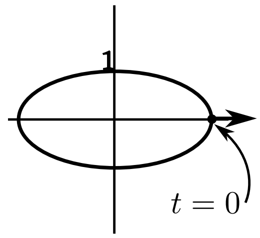


Fig 34

39.2.1 হাতেকলমে

Example 9: ধরো Fig 33-এর ellipse-টা দিলাম। এটা বরাবর counterclockwise দিকে যাব। Integrand-টা নিচ্ছি $\mathbf{F}(x, y) \equiv (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x, y)$. তবে $\oint_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\mathbf{x}$ বার করো।

SOLUTION: প্রথম কাজ হল curve-টার একটা parametric form নেওয়া। সেটা এইভাবে করা যেতে পারে--

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t \\ y(t) &= \sin t, \end{aligned}$$

যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2π পর্যন্ত। এবার unit normal বার করব। তার জন্য প্রথমে বার করব tangent vector-টা। সেটা হল $(x'(t), y'(t))$. সাবধান, এখনই differentiate করতে শুরু কোরো না, তবে সব কিছু খুব জটিল দেখাবে। শীঘ্রই বেশ কিছু কাটাকাটি হয়ে জীবন সহজ হয়ে যাবে, তখন ধীরেসুস্থে differentiate করলেই চলবে। Tangent vector থেকে normal vector-এ যাবার জন্য কায়দা হল component দুটোর স্থানবিনিময় করে কোনো একটার চিহ্ন উল্টে দেওয়া, মানে $(y'(t), -x'(t))$ বা $(-y'(t), x'(t))$. এর মধ্যে কোনটা outward normal সেটা ছবি থেকে কোনো একটা সুবিধাজনক বিন্দু নিয়ে বুঝে নেব। যেমন ধরো, $t = 0$-তে outward normal-টার মুখ হবে ডানদিকে (Fig 34), আর সেখানে $y'(t) > 0$ (যেহেতু curve-টা সেখানে উঠছে)। তাই outward normal-টা হবে $(y'(t), -x'(t))$. এই বার পেতে হবে unit outward normal, মানে এটাকে এর norm দিয়ে ভাগ করতে হবে। লক্ষ করো এর norm কিন্তু tangent vector-টার norm-এর সমান, মানে $\|\mathbf{x}'(t)\|$. সুতরাং--

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}(y'(t), -x'(t)).$$

এবার আমাদের কাজ হল $\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}$-এর line integral বার করা, মানে--

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\mathbf{x} &= \int_C \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}(F_1 y' - F_2 x') \times \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \\ &= \int_C F_1\, dy - F_2\, dx \\ &\qquad \text{বলেছিলাম না, কাটাকাটি হয়ে জীবন সহজ হয়ে যাবে?} \\ &= \int_C x\, dy - y\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t + \sin^2 t\, dt = \cdots = 3\pi. \end{aligned}$$

লক্ষ করো পুরো অংকটায় আমাদের ছবিটা দেখতে হয়েছে খালি এক জায়গায়, দুটো normal-এর মধ্যে কোন্‌টা outward সেটা স্থির করার জন্য। ■

এবার তোমার জন্য একই রকমের কিছু অংক দিই।

Exercise 9: প্রতিক্ষেত্রে $\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\mathbf{x}$ বার করো--

1. C হল (t, t), যেখানে $t \in [0, 1]$, আর $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x + y, x - y)$.
2. C হল (t^2, t), যেখানে $t \in [-1, 1]$, আর $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (y, x)$.

■

Exercise 10: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\int_C f \bullet d\mathbf{x}$ বার করো।

1. $f(x, y, z) = (0, 0, -3)$, এবং C হল $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 2t)$, যেখানে $t \in [0, 2\pi]$.
2. $f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$, এবং C হল $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = (t, 2t, ..., nt)$, যেখানে $t \in [0, 1]$.

■

39.3 সর্বত্র differentiable না হলে

Line integral-এর সংজ্ঞায় curve-টাকে differentiate করতে হয়, মানে $x'(t)$, $y'(t)$ ইত্যাদি বার করতে হয়। কিন্তু অনেক সময়ে $x(t)$ বা $y(t)$ গায় দু-এক জায়গায় differentiable নাও হতে পারে। তখন curve-টাকে সেসব জায়গায় ভেঙে কয়েকটা টুকরো করে নিতে হয়, এবং প্রতিটা টুকরোর জন্য আলাদা করে line integral বার করে সেগুলো যোগ করে দিতে হয়। এরকম কিছু অংক দেখব এবার।

Example 10: মনে করো Fig 35-এর curve-টা দিয়ে বললাম $\int_C x + y\, d\ell$ বার করতে। কী করে করবে?

SOLUTION: এটাকে দুভাবে ভেঙে নেব, vertical অংশ (C_1), আর horizontal অংশ (C_2). এর মধ্যে C_1-এর জন্য parametric form নিতে পারি $(0, t)$ যেখানে t যাচ্ছে 1 থেকে 0 পর্যন্ত। একইভাবে C_2-র জন্য নেব $(t, 0)$, যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 2 পর্যন্ত। সুতরাং পুরো line integral-টা হচ্ছে--

$$\int_C (x+y)\, d\ell = \int_{C_1} (x+y)\, d\ell + \int_{C_2} (x+y)\, d\ell = \int_1^0 (0+t)\sqrt{0^2 + 1^2}\, dt + \int_0^2 (t+0)\sqrt{1^2 + 0^2}\, dt = -\frac{1}{2} + 2 = -\frac{3}{2}.$$

■

Exercise 11: Let C be the boundary of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0\}$. Find $\oint_C x\, d\ell$, where C is oriented counter-clockwise.

HINT: ছবিটা দেখিয়েছি Fig 36-এ। ■

Fig 35

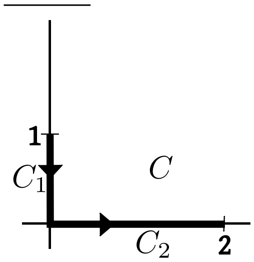
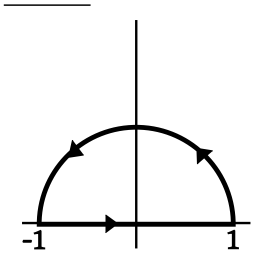


Fig 36



DAY 40
Line integral (part 3)

40.1 Path independence

এইবার একটা জিনিস আলোচনা করব, physics-এ যার গুরুত্ব অপরিসীম। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 11: মনে করো তোমাকে এই vector field-টা দিলাম, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ যেখানে $f(x, y) = (2x, 3y^2)$. আর দিলাম Fig 37-এর দেখানো curve দুটো। এই দুটো বরাবর vector field-টার line integral বার করো।

SOLUTION: এখানে C_1-এর parametric form নেওয়া যাক (t, t) যেখানে $t \in [0, 1]$. একইভাবে C_2-র বেলায় নেওয়া যায় (t, t^2). এখানেও $t \in [0, 1]$. সুতরাং--

$$\int_{C_1} f \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 f(t,t) \bullet (1,1)\, dt = \int_0^1 (2t, 3t^2) \bullet (1,1)\, dt = \int_0^1 2t + 3t^2\, dt = 2.$$

আবার--

$$\int_{C_2} f \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 f(t,t^2) \bullet (1,2t)\, dt = \int_0^1 (2t, 3t^4) \bullet (1,2t)\, dt = \int_0^1 2t + 3(t^2)^2(2t)\, dt = 2.$$

■

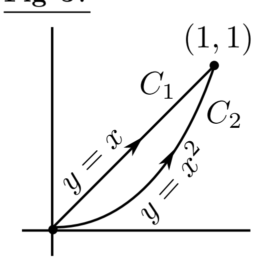
লক্ষ করো দুটো curve-এর বেলাতেই একই উত্তর এল। Fig 37-এর দিকে তাকালে দুটো curve-এর একটা মিল দেখতে পাবে, ওদের দুজনেরই শুরু একই বিন্দুতে, আবার শেষও একই বিন্দুতে। মজার কথা হল যদি তুমি ওই দুটো বিন্দুর মধ্যে যা খুশি একটা curve নাও, তার বেলাতেও line integral-টা ওই 2-ই আসবে! নীচের অংকে তারই একটা উদাহরণ রয়েছে।

Exercise 12: আগের অংকের vector field-টা নিয়ে কাজ করো, কিন্তু এবার curve-টা নাও (t, t^3) যেখানে $t \in [0, 1]$. কিংবা এই curve-টাও নিতে পারো $(0, \sin t)$, যেখানে $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. দ্যাখো সেই একই উত্তর পাও কি না। ■

এ থেকে যেন ফস্ করে ভেবে বোসো না যে, দুটো curve-এর শুরু আর শেষ মিলে গেলেই ওদের বরাবর যেকোনো vector field-এর line integral-ই সমান হতে বাধ্য। সেটা হবার জন্য integrand-টাতেও একটু ম্যাজিক থাকতে হবে। ম্যাজিকটা না থাকলে কী হতে পারে, তার একটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকে।

Example 12: এবার vector field-টা নেব $g(x, y) = (2y, 3x^2)$. আগের মতই C_1, C_2 নেব, যেমন Fig 37-এ দেখিয়েছিলাম। এবার line integral দুটো বার করে দ্যাখো কী পাও।

Fig 37



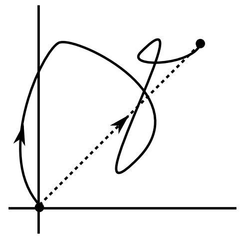


Fig 38

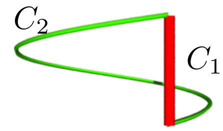


Fig 39

SOLUTION: প্রথমে C_1 নিয়ে কাজ করি--

$$\int_{C_1} g \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 (2t, 3t^2) \bullet (1,1)\, dt = \int_0^1 2t + 3t^2\, dt = 2.$$

এবার C_2-র পালা--

$$\int_{C_2} g \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 (2t^2, 3t^2) \bullet (1, 2t)\, dt = \int_0^1 2t^2 + 3t^2(2t)\, dt = \frac{13}{6} \neq 2.$$

সুতরাং এবার C_1 আর C_2-র বেলায় আলাদা উত্তর এল। ■

স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে-- integrand-টায় কী ম্যাজিক থাকলে line integral-টা কেবলমাত্র প্রান্ত বিন্দু দুটোর উপর নির্ভর করে, পুরো curve-টার উপরে নয়? এই ম্যাজিকটা জানলে সুবিধা কারণ সেক্ষেত্রে অনেক line integral সহজে করে ফেলা যাবে। ধরো তোমাকে Fig 38-এর আঁকাবাঁকা curve-টা বরাবর একটা line integral বার করতে হবে। সেটা করা খুবই কঠিন লাগছে। কিন্তু যদি তুমি ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা বরাবর line integral বার করতে, তবে সে কাজটা খুবই সহজ। যদি তোমার integrand-এ সেই ম্যাজিকটা থেকে থাকে, তবে কোনো চিন্তা নেই, ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা বরাবর integrate করে দিলেই হবে, আঁকাবাঁকা লাইনের বেলাতে যা উত্তর আসত এখানেও তাই-ই আসতে বাধ্য!
ম্যাজিকটা কী সেটা এক্ষুণি বলছি। কিন্তু তার আগে একটা $\mathbb{R}^3$-র অংক দিই।

Exercise 13: ধরো $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ হল $f(x, y, z) = (x, y^2, e^z)$. এবার এই দুটো curve দিচ্ছি (Fig 39)--

- C_1 হল $(1, 0, t)$, যেখানে t যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত,
- C_2 হল $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$. এখানেও t যাচ্ছে 0 থেকে 1 পর্যন্ত।

এই দুটো curve বরাবর line integral বার করো। একই উত্তর আসছে কী? ■

এবার বলি ম্যাজিকটা কী। আমরা $\mathbb{R}^3$-র ক্ষেত্রে বলব, $\mathbb{R}^2$-র বেলায় কী শর্ত লাগবে, সেটাও তা থেকেই পেয়ে যাবে। $\mathbb{R}^3$-র বেলায় শর্তটা হল integrand-এর curl-টা $\mathbf{0}$ হতে হবে। এটা necessary এবং sufficient শর্ত। যেমন ধরো আগের অংকে আমরা $f(x, y, z) = (x, y^2, e^z)$ দিয়েছিলাম। এখানে একটু কষলেই দেখবে $\text{curl}(f) = \mathbf{0}$ আসছে।

Example 13: $\mathbb{R}^3$-র বেলাতে শর্তটা কী বললাম। এ থেকে বলো $\mathbb{R}^2$-র বেলাতে শর্তটা কী হবে।

SOLUTION: ধরো integrand-টা দিয়েছে $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, যেখানে $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. এটা খালি xy-plane-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। তুমি মনে মনে একটা z-axis কল্পনা করে নাও। তবে f-টা হয়ে যাবে

$$g(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0).$$

লক্ষ করো z-টা কোথাও কাজ লাগল না, খালি নাম-কা-ওয়াস্তে রাখা, যাতে $\mathbb{R}^3$-র শর্তটা লাগানো যায়। এবার curl(g)-এর component-গুলো একে একে বার করা যাক। প্রথম component হল

$$\partial_y 0 - \partial_z f_2(x, y) = 0.$$

দ্বিতীয় component হল

$$\partial_z f_1(x, y) - \partial_x 0 = 0.$$

এই দুটো শূন্য হয়েই আছে। এবার তৃতীয় component-টা দেখি--

$$\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y).$$

সুতরাং curl$(g) = \mathbf{0}$ হওয়া মানে

$$\partial_x f_2(x, y) = \partial_y f_1(x, y).$$

এইটাই হল $\mathbb{R}^2$-এর বেলায় ম্যাজিক শর্তটা। ■

এই ম্যাজিক শর্তটা এতটাই গুরুত্বপূর্ণ যে লোকে এর একটা নাম দিয়েছে--

DEFINITION: **Conservative field (defn 1)**

A vector field from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ is called **conservative** if its curl is zero.
As a special case, a vector field from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$ with components f_1 and f_2 is called conservative if $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.

অনেক বইতে দেখবে conservative field-এর একটা সম্পূর্ণ অন্যরকম দেখতে সংজ্ঞা দিয়েছে। সেটাও এই বেলা আলোচনা করে রাখি।

DEFINITION: **Conservative field (defn 2)**

A vector field $\mathbf{F}$ is called a **conservative field** if it can be expressed as $\mathbf{F} = \nabla\phi$, for some scalar field ϕ. Any such scalar field is called a **potential** for $\mathbf{F}$.

দুটো সংজ্ঞা দেখতে সম্পূর্ণ আলাদা হলেও, দুটোই কিন্তু আসলে সমার্থক। এদের মধ্যে যেকোনো একটাকে মূল সংজ্ঞা ধরলে অন্যটাকে theorem হিসেবে প্রমাণ করা যায়। আমরা সে সব প্রমাণের মধ্যে যাব না, খালি একটা উদাহরণ নিয়ে দেখাব।

Example 14: ধরো $\mathbf{F}(x, y) \equiv (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (2xy+1, x^2+2y)$. প্রথম সংজ্ঞা অনুযায়ী এটা conservative, কারণ $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 2x - 2x = 0$. দ্যাখাও যে দ্বিতীয় সংজ্ঞা অনুযায়ীও এটা conservative.
SOLUTION: আমাদের এমন একটা $\phi(x, y)$ পেতে হবে যাতে $\partial_1\phi = F_1$ হয় এবং $\partial_2\phi = F_2$ হয়। যেহেতু $\partial_1\phi = 2xy + 1$ চাই, তাই আমরা x-এর সাপেক্ষে integrate করে পাচ্ছি $\phi(x, y) = x^2 y + x+$ arbitrary constant. এই arbitrary constant-এর মধ্যে কিন্তু y-ও ঢুকে থাকতে পারে। তার মানে $\phi(x, y)$ এখনও না বেরোলেও, এটুকু বলতে পারি যে, যদি এরকম $\phi(x, y)$ থেকে থাকে, তবে সেটা দেখতে হবে এইরকম--

$$\phi(x, y) = x^2 y + x + (y\text{-এর কোনো function}).$$

একইভাবে $\partial_2\phi = x^2 + 2y$-কে y-এর সাপেক্ষে integrate করে ϕ-এর চেহারা সম্পর্কে আরেকটা হদিশ পাওয়া যাচ্ছে--

$$\phi(x, y) = x^2y + y^2 + (x\text{-এর কোনো function}).$$

এই দুটো চেহারাকেই একইসঙ্গে রক্ষা করতে হলে আমরা এইভাবে ϕ নিতে পারি--

$$\phi(x, y) = x^2y + y^2 + x.$$

এটাই অবশ্য একমাত্র পথ নয়, এর সঙ্গে একটা arbitrary constant জুড়ে দিলেও আপত্তি নেই।
তার মানে আমরা এমন ϕ পেয়ে গেলাম যাতে $\mathbf{F} = \nabla\phi$ লেখা যায়। তাই দ্বিতীয় সংজ্ঞা অনুযায়ীও $\mathbf{F}$-টা conservative হল।
■

প্রথম সংজ্ঞাটার সুবিধা হল, কোনো vector field দেওয়া থাকলে চট্ করে পরীক্ষা করে দেখা যায় সেটা conservative কিনা। দ্বিতীয় সংজ্ঞাটার সুবিধা হল এটা যেকোনো $\mathbb{R}^n$-এর জন্যই ব্যবহার করা যায়। তাছাড়া এটা দিয়ে চট্ করে নতুন নতুন conservative vector field বানানোও যায়, যেমন নীচের অংকটায়।

Exercise 14: যেকোনো একটা scalar field নিয়ে শুরু করি, ধরো $\phi(x, y, z) = x^2 \sin y + yz^2$. এ থেকে একটা vector field বানাব, $\mathbf{F} = \nabla\phi = (2x\sin y, x^2\cos y + z^2, 2yz)$. দ্বিতীয় সংজ্ঞা অনুযায়ী এটা conservative. দেখাও যে প্রথম সংজ্ঞাও একই কথা বলে। ■

Example 15: Show that the vector field given by $(y + \sin z)\vec{i} + x\vec{j} + (x\cos z)\vec{k}$ is conservative.

Find a scalar potential of this field.[3] **(2021.11b)**
SOLUTION: Conservative দেখানোর জন্য খালি curl-টাকে $(0, 0, 0)$ দেখালেই চলবে। সে দায়িত্ব তোমাকেই দিলাম। আমরা এখানে দ্বিতীয় অংশটা করব, potential function বার করা। এখানে scalar potential বলেছে, কারণ potential-টা একটা scalar field.

> Second part: Since the given vector field is conservative, hence there must exist a potential function $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ such that
>
> $$\nabla\phi = (y + \sin z)\vec{i} + x\vec{j} + (x\cos z)\vec{k},$$
>
> ie,
>
> $$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= y + \sin z, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= x, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= x\cos z. \end{aligned}$$
>
> Integrating these we get
>
> $$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= xy + x\sin z + c_1(y, z), \\ \phi(x, y, z) &= xy + c_2(x, z), \\ \phi(x, y, z) &= x\sin z + c_3(x, y), \end{aligned}$$

> where c_1, c_2, c_3 are arbitrary functions. Combining all these forms, we can choose $\phi(x,y,z)$ as
>
> $$\phi(x,y,z) = xy + x\sin z + c,$$
>
> where c is any arbitrary constant.

যেহেতু এই অংকে খালি একটা potential বার করতে দিয়েছিল, তাই আমরা $c = 0$-ও বসিয়ে দিতে পারতাম। ■

Conservative field-এর প্রধান সুবিধার কথা তো বললামই--কোনো curve বরাবর line integral বার করলে সেটা কেবল curve-টার শুরু আর শেষ প্রান্তের উপর নির্ভর করে, বাকিটার উপরে নয়। এই ধর্মটাকে বলে **path independence**. এখানেও দ্বিতীয় সংজ্ঞাটার একটা সুবিধা আছে। যদি একটা potential function জানা থাকে, তবে আদৌ কোনো integrate না করেই একটা curve-এর উপর line integral বার করে দেওয়া যায়! কায়দাটা এরকম--ধরো তোমাকে $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ বার করতে দিয়েছে, যেখানে $\mathbf{F} = \nabla\phi$. অমনি তুমি বলে দিতে পারো যে integral-টা হবে--

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_{end}) - \phi(\mathbf{x}_{start}),$$

যেখানে $\mathbf{x}_{start}$ হল curve-টার শুরুর প্রান্ত, আর $\mathbf{x}_{end}$ হল শেষের প্রান্ত।
একটা উদাহরণ দেখা যাক। এই অংকটা path independence ছাড়া করাই যাবে না।

Example 16: Let $\vec{F} = (y+1)e^y\cos(x)\hat{i} + (y+2)e^y\sin(x)\hat{j}$ be a vector field in $\mathbb{R}^2$ and C be a continuously differentiable path with the starting point $(0,1)$ and the end point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Then

$$\int_C \vec{F} \bullet d\,\vec{r}$$

equals ... **(JAM.2021.NAT49)**

SOLUTION: Line integral বার করার অংক অনেকেই করেছি। চট্ করে দেখলে এই অংকটাকেও তাদেরই মত বলে ভুল হতে পারে। কিন্তু এটার একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য রয়েছে--এখানে খালি curve-এর প্রান্ত দুটো বলেছে, বাকি কিছু বলেই দেয় নি, অথচ line integral বার করতে বলেছে! সেটা করা যাবে কারণ integrand-টা একটা conservative field. তাই line integral-টা খালি প্রান্তদুটোর উপরই নির্ভর করবে।

> Here the integrand $\vec{F} = (F_1, F_2)$ is conservative.
>
> ⟦ Because:
>
> $F_1(x,y) = (y+1)e^y\cos(x)$ and $F_2(x,y) = (y+2)e^y\sin(x)$.
> So
>
> $$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= (e^y + (y+1)e^y)\cos x \\ &= (y+2)e^y\cos x \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x}.\end{aligned}$$
>
> ⟧

যেই এটা পেয়ে গেলাম, অমনি আমি জানি যে line integral-টা খালি প্রান্তের বিন্দুদুটোর উপরই নির্ভর করবে। সুতরাং এবার প্রান্ত দুটোকে যা খুশি সুবিধাজনক একটা curve দিয়ে জুড়ে সেটা বরাবর line integral বার করলেই হবে। প্রশ্ন

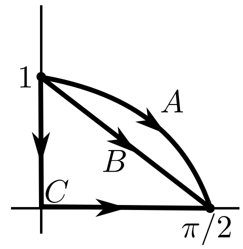


Fig 40

হল-- "সুবিধাজনক" curve কী নেওয়া যায়। এই জায়গাটায় একটু এদিক-ওদিক ঢুঁ মারা ছাড়া গত্যন্তর নেই। কয়েকটা সহজ দেখতে curve দেখিয়েছি Fig 40-এ, A, B আর C. খানিকক্ষণ ঘাঁটাঘাঁটি করে বুঝবে যে C-টাই হল সবচেয়ে সুবিধাজনক, কারণ এখানে line integral-টা দুইভাগে ভেঙে যাবে, প্রথম অংশে x স্থির থাকবে, এবং দ্বিতীয় অংশে y.

> So the line integral is independent of the path.
>
> We choose the path C_1 followed by C_2 where
>
> $$C_1 \;:\; (0,t), \text{ where } t \text{ goes from } 1 \text{ to } 0$$
> $$C_2 \;:\; (t,0), \text{ where } t \text{ goes from } 0 \text{ to } \tfrac{\pi}{2}.$$
>
> Then the required integral is
>
> $$\int_{C_1} F_1\,dx + F_2\,dy + \int_{C_2} F_1\,dx + F_2\,dy$$
>
> এর মধ্যে প্রথমটার dx অংশটা শূন্য, কারণ C_1 বরাবর x স্থির থাকে।
> একইভাবে দ্বিতীয়টার বেলায় dy অংশটা শূন্য।
>
> $$= \int_{C_1} F_2\,dy + \int_{C_2} F_1\,dx$$
> $$= \int_1^0 (t+2)e^t \sin 0\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0+1)e^0 \cos t\,dt$$
> $$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \cdots = 1.$$
>
> So for any curve satisfying the given condition, the line integral is 1.

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

এবার conservative-এর দ্বিতীয় সংজ্ঞা ব্যবহার করে একই অংক আরেকবার করব। এই পথে খালি একটাই কাজ, potential বার করা। তার জন্য $F_1(x,y) = (y+1)e^y\cos(x)$-কে x-এর সাপেক্ষে integrate করে ϕ-এর একটা চেহারা পাব--

$$\phi(x,y) = (y+1)e^y\sin(x) + (y\text{-এর কোনো function}).$$

অন্য হদিশটা আসবে $F_2(x,y) = (y+2)e^y\sin(x)$-কে y-এর সাপেক্ষে integrate করে--

$$\phi(x,y) = (y+1)e^y\sin(x) + (x\text{-এর কোনো function}).$$

এইটা পেতে খানিকটা integration by parts করতে হয়েছে। দুটো চেহারা মিলিয়ে ϕ নেওয়া যেতে পারে

$$\phi(x, y) = (y+1)e^y \sin(x).$$

ব্যস্, এইটুকু রাফ করে এবার সমাধান লেখা শুরু করা যাক।

> Here **F** is conservative.
>
> ⟦ Because:
>
> $\mathbf{F} = \nabla\phi$, where $\phi(x, y) = (y+1)e^y \sin(x)$.
>
> ⟧
>
> So the required integral is $\phi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \phi(0, 1) = 1 - 0 = 1.$

■

এবার একটা অংক দিই, যেটা উপরের অংকটা করার পর খুবই সহজে করতে পারবে।

Exercise 15: Let $\vec{F} = (y+1)e^y \cos(x)\hat{i} + (y+2)e^y \sin(x)\hat{j}$. Let C be the curve $(t, \cos t)$ where t goes from $\frac{\pi}{2}$ to 0. Find

$$\int_C \vec{F} \bullet d\,\vec{r}\ .$$

■

এবার একটা ঠকানো প্রশ্ন।

Exercise 16: আবার আগের অংকের vector field-টাই নাও। এবার line integral বার করো এই curve-টা বরাবর--

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

■

Exercise 17: If $\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3yz)\hat{i} + (3xz + 2y)\hat{j} + (3xy + 2z)\hat{k}$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, then which among the following is (are) TRUE?

(A) $\nabla\times \vec{F} = \vec{0}$

(B) $\oint_C \vec{F} \bullet d\,\vec{r} = 0$ along any simple closed curve C

(C) There exists a scalar function $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ such that $\nabla\bullet \vec{F} = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$

(D) $\nabla\bullet \vec{F} = 0$

(JAM.2018.MSQ38)

HINT: এখানে (C) বাদে বাকি option-গুলো পরীক্ষা করে দেখা কঠিন নয়। (C) হল potential function-ঘটিত শর্ত। ধরো $\vec{F}$-এর একটা potential function আছে, ϕ. একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে, সেক্ষেত্রে (C)-টা পালিত হবে। ■

DAY 41
Surface integral (part 1)

Line integral-এর বেলায় আমরা integrate করছিলাম একটা curve বরাবর। যদি integration-টা করতাম একটা surface বরাবর, তবে পেতাম **surface integral**. এখানেও আমরা আলোচনাটা দুভাগে ভেঙে করব, scalar field আর vector field-এর জন্য আলাদা করে।

41.1 Scalar field-এর surface integral

আমরা line integral শেখার সময়ে একটা উদাহরণ নিয়েছিলাম, একটা তারের mass বার করা, যেখানে তারটার density বিভিন্ন জায়গায় বিভিন্ন। আমরা mass-টাকে প্রকাশ করেছিলাম একটা line integral দিয়ে--

$$\int_C f\, d\ell,$$

যেখানে C-এর উপর কোনো $\mathbf{x}$ বিন্দুতে density ছিল $f(\mathbf{x})$. এবার আমরা একই কাজ করব surface-এর বেলাতে। প্রথমে অংকের খুঁটিনাটির মধ্যে না গিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। ধরো একটা ঢেউখেলানো ধাতুর চাদর আছে, E, যার বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন ঘনত্ব। আমাদের উদ্দেশ্য এর মোট mass বার করা। তার জন্য এরকমভাবে চিন্তা করতে চাই--

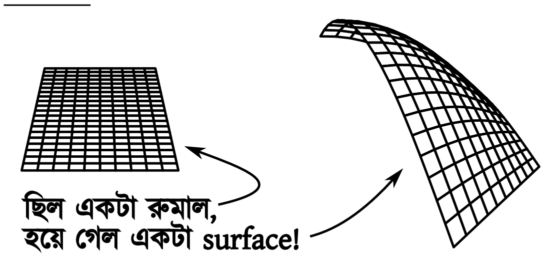
> ঘনত্ব বলতে এখানে বোঝাচ্ছে একক area-র চাদরের mass. সুতরাং যদি চাদরটার density সর্বত্র সমান হত, তবে মোট area-কে density দিয়ে গুণ করে দিলেই চলত। সমস্যা হল বিভিন্ন বিন্দুতে density-টা বিভিন্ন। তাই আমরা চাদরটাকে মনে মনে ছোটো ছোটো অংশে ভেঙে নেব, প্রতিটা টুকরোর বেলাতেই density অপরিবর্তিত থাকছে ধরে নেব, তবে প্রতিটা টুকরোর mass বার করতে পারব density*times*area করে। তারপর সেই mass-গুলোকে সব যোগ করে দিলেই পুরো চাদরটার mass-এর একটা approximation পাব। এবার যদি টুকরোগুলোকে ক্রমশঃই সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করতে থাকি, তবে নিশ্চয়ই limit নিলে সঠিক mass-টা পেয়ে যাব। এই "ছোটো ছোটো অংশের মোট বার করে limit নেওয়া" মানেই যে integration, সে তো জানোই। সুতরাং আমরা বলতে চাই যে mass-টা হল "পুরো E-এর উপরে f-এর integral." একেই বলব surface integral of f over E.

এই পরিকল্পনাটাকেই আমরা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখব। আমরা এগোব ঠিক line integral-এর মত করেই। সেখানে আমরা শুরুতেই curve-এর একটা parametric সংজ্ঞা দিয়েছিলাম $(x(t), y(t))$ হিসেবে (বা $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় $(x(t), y(t), z(t))$ হিসেবে), যেখানে parameter-টা ছিল $t \in [a, b]$. এটাকে কল্পনা করার একটা কায়দা বলেছিলাম পেন দিয়ে কী করে curve-টা আঁকা হচ্ছে সেটা ভাবা। এটাকে আরেকভাবেও ভাবা যায়। ঠিক যেন আমরা $[a, b]$-কে আঁকাবাঁকা করে $\mathbb{R}^2$ বা $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে ভাসিয়ে তুলছি। Surface-এর বেলাতে এই দ্বিতীয়ভাবে ভাবলে সুবিধা হবে। এবার সেটাই আলোচনা করব।

41.2 Parametric surface

একটা surface-কে তুমি মনে করতে পারো যেন একটা রুমাল, যেটা আঁকাবাঁকা হয়ে শূন্যে ভেসে আছে। প্রথমে মনে করো রুমালটা যেন গ্রাফ কাগজের উপর বিছানো ছিল। সুবিধার জন্য ভাবতে পারো যেন রুমালের গায়েও গ্রাফের ছকটা কাটা আছে।

Fig 41



খালি সেখানে x, y-এর পরিবর্তে নাম দেব u, v. ধরো রুমালটা হল $[a, b] \times [p, q]$, মানে $u \in [a, b]$ এবং $v \in [p, q]$. এটাকে $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে কোথাও আঁকাবাঁকা করে রুমালের মত ভাসিয়ে তুলব (Fig 41)।

রুমালের প্রতিটা বিন্দুকে (u, v) হিসেবে লেখা যায়। এবার ধরো আমি প্রতিটা (u, v)-কে নিয়ে ফেলব (x, y, z)-এ যেখানে এই ভাসিয়ে তোলা ব্যাপারটা করবে তিনটে function, যাদের বলব $x(u, v)$, $y(u, v)$ এবং $z(u, v)$. অর্থাৎ আমি যদি rectangle-টার মধ্যে কোনো বিন্দু (u, v) নিই, তবে ভাসিয়ে তোলার পর সেটা গিয়ে উপস্থিত হবে $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$-তে। লক্ষ করো, যেকোনো একটা (u, v) দিলেই আমরা তা থেকে surface-এর উপরে একটা বিন্দু পেয়ে যাচ্ছি। Surface-এর উপর প্রতিটা বিন্দুর জন্যই এভাবে (u, v) পাওয়া যাবে।

এই তিনটে function-কে ব্যবহার করে যে নানারকমের surface হতে পারে। তার মধ্যে তিনটে বহুলব্যবহৃত ক্ষেত্রের আলোচনা করব এবার।

41.2.1 কোনো function-এর গ্রাফ

ধরো একটা function আছে $f(x, y)$, যার গ্রাফটা একটা surface-এর মত। এখানে xy-plane-এর কোনো বিন্দু (u, v)-র উপর surface-টার উচ্চতা হল $f(u, v)$. তার মানে প্রতিটা বিন্দুই হল $(u, v, f(u, v))$ আকারের। এটাই হল এরকম surface-এর একটা parametric রূপ, অর্থাৎ $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$ এবং $z(u, v) = f(u, v)$.

Example 17: ধরো $f(x, y) = x^2 + y$ নিলাম, যেখানে $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. এর গ্রাফটা একটা surface. একে parametric form-এ লেখো।

SOLUTION: এক্ষুণি যে কায়দাটা বললাম, সেটা অনুযায়ী নিতে পারি--

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u, \\ y(u, v) &= v, \\ z(u, v) &= u^2 + v, \end{aligned}$$

যেখানে $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. ছবিটা দেখিয়েছি Fig 42-এ। ■

Exercise 18: তিনটে surface দেখিয়েছি Fig 43, Fig 44 এবং Fig 45-এ। বলে দিচ্ছি যে প্রতিক্ষেত্রেই $x(u, v) = u$ আর $y(u, v) = v$. তোমাকে বলতে হবে z-টা কোন্ ক্ষেত্রে কী নেওয়া হয়েছে।

(1) $z(u, v) = u^2$, **(2)** $z(u, v) = \sin u$, **(3)** $z(u, v) = v^2$. ■

Exercise 19: $f(x, y) = x^2 + y^2$-এর গ্রাফটাকে parametric form-এ প্রকাশ করো, যেখানে $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$. ■

Fig 42

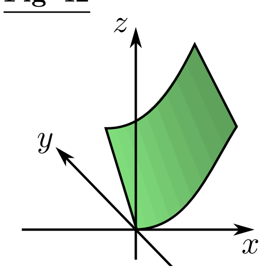


Fig 43

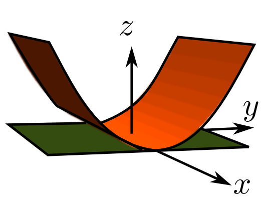


Fig 44

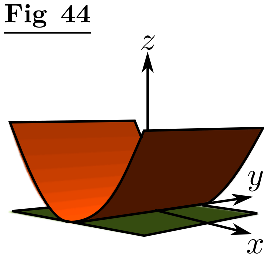
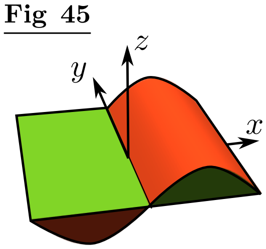


Fig 45



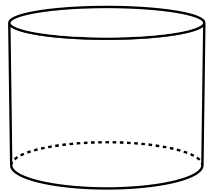


Fig 46

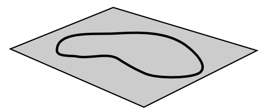


Fig 47

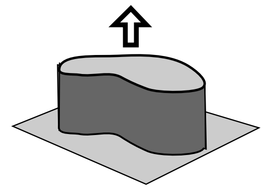


Fig 48

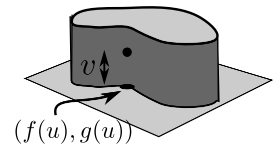


Fig 49

41.2.2 Cylinder

আমরা cylinder বলতেই সাধারণতঃ Fig 46-এর মত কিছু একটা বুঝি। অংকের দুনিয়ায় কিন্তু cylinder শব্দটা অনেক সময়ে আরো general অর্থে ব্যবহৃত হয়। তার একটার কথা এখানে বলব। ধরো মাটিতে একটা লুপের মত লাইন টানলাম (Fig 47)। এবার ধরো লুপের ভিতরে যে অংশটা আছে সেটাকে খাড়া টেনে তুললাম Fig 48-এর মত। তবে যে পদার্থটা পাওয়া গেল তাকেও বলে একটা cylinder. এর দুপ্রান্তটা flat, আর খাড়া পাশগুলো আঁকাবাঁকা। যদি গোড়ার লুপটা গোল হত, তবে এই cylinder আমাদের পূর্বপরিচিত cylinder-এর সঙ্গে এক হত। এর খাড়া দেয়ালটা একটা surface. তাকে parametric form-এ লেখার একটা কায়দা আছে। ধরো গোড়ার লুপটা ছিল xy-plane-এ। প্রথমে তার একটা parametric form নিয়ে শুরু করো, $(f(u), g(u))$. এবার সেটাকে যখন z-axis-এর সমান্তরালে টেনে তুলছ, তার যেকোনো বিন্দুকে আমরা লিখতে পারি $(f(u), g(u), v)$ হিসেবে। এখানে $(f(u), g(u))$ হল বিন্দুটা প্রথমে লুপের যেখানে ছিল, আর v হল কতটা টেনে তোলা হয়েছে (Fig 49)।

এ জায়গাটা একটু অ্যানিমেশন দিয়ে বুঝলে হয়তো সুবিধা হবে। পরের অধ্যায়ে cylinder-এর আরো general একটা সংজ্ঞা আসবে। তারও পূর্বাভাস এই ভিডিওতে পাবে। তার জন্য পাশের QR code-টা স্ক্যান করো, বা নীচের address-টা Google-এ ঢোকালেই হবে। অসুবিধা হলে আমাকে জানাতে ভুলো না।

`https://arnabc74.github.io/mult/cyl.html`

Example 18: এটা কোন্ ধরণের surface-এর parametric form?

$$x(u,v) = v, \quad y(u,v) = 2\cos u, \quad z(u,v) = \sin u,$$

যেখানে $u \in [0, 2\pi)$ এবং $v \in [0, 1]$.

SOLUTION: এখানে শুরু করা হয়েছিল yz-plane-এ একটা ellipse নিয়ে, যার parametric form ছিল $(2\cos u, \sin u)$. তারপর সেটাকে x-axis বরাবর এক ঘর টানা হয়েছে। ■

Exercise 20: ধরো $x(u,v) = 1 + \cos u$, $y(u,v) = v$, $z(u,v) = \sin u$, যেখানে $u \in [0, 2\pi)$ আর $v \in [1, 2]$. এটা কীরকম surface? ■

Cylinder-এর জন্য আমরা একটা লুপ নিয়ে শুরু করছিলাম। যদি অন্য কোনো curve নিয়ে শুরু করি, তাহলেও সেটাকে টেনে একটা surface বানানোর চেষ্টা করা যেতে পারে। সেরকম একটা উদাহরণ দিলাম নীচে।

Example 19: ধরো

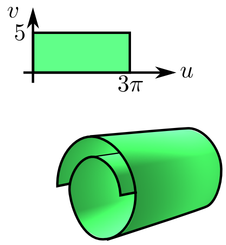


Fig 50

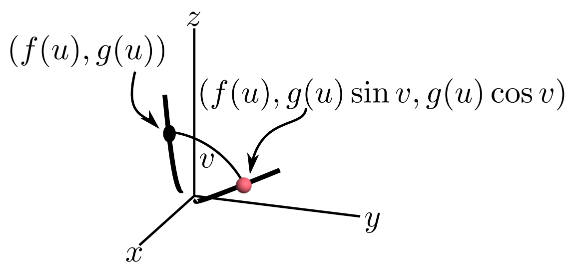


Fig 51

$$x(u,v) = \left(1+\tfrac{u}{10}\right)\cos u,$$
$$y(u,v) = v,$$
$$z(u,v) = \left(1+\tfrac{u}{10}\right)\sin u,$$

যেখানে $(u,v)\in[0,3\pi]\times[0,5]$. এটার ছবিটা কল্পনা করতে পারো?

SOLUTION: এখানে প্রথমেই যেটা চোখে পড়া উচিত, সেটা হল x এবং z খালি u দিয়ে তৈরী, আর ওদিকে $y=v$ আছে। এর মানে হল xz-plane একটা curve আছে (যার parameter হল u), এবং সেই curve-টাকেই y-axis বরাবর খানিকটা টেনে নেওয়া হয়েছে। এবার x আর z-এর দিকে তাকালে আরেকটা জিনিস চোখে পড়া উচিত। সেটা হল দুজনেই $r\cos\theta$ এবং $r\sin\theta$-র মত দেখতে, যেখানে θ-র বদলে u রয়েছে, আর r-এর বদলে $\left(1+\frac{u}{10}\right)$. যেহেতু $0\le u\le 3\pi$, তার মানে এখানে θ-টা দেড় প্যাঁচ খেয়েছে, আর যতই θ বাড়ছে, ততই r বাড়ছে। তার মানে একটা জিলিপির প্যাঁচ খোলা টাইপের curve[3] পাওয়া যাচ্ছে। সব মিলিয়ে surface-টা হবে Fig 50-এর মত। ■

41.2.3 Surface of revolution

এবার আরেক ধরণের surface-এর parametric form বার করা শিখব। এদের বলে **surface of revolution**. গত অধ্যায়ে আমরা solid of revolution শিখেছিলাম। তার সঙ্গে এর ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক। বস্তুতঃ একটা solid of revolution-এর গা-টাই হল একটা surface of revolution.

যারা ভিডিওটা দেখতে পারছ না, তারা Fig 51-এর দিকে চোখ রাখো। বেশ জটিল ছবি, ধাপে ধাপে বোঝাচ্ছি। আমরা শুরু করেছি xz-plane-এ একটা curve নিয়ে, যাকে আমরা $(f(u),g(u))$ আকারে লিখতে পারি। আমরা x-axis-কে কেন্দ্র করে curve-টাকে v কোণে ঘোরাব। Curve-টার উপরে একটা বিন্দু নিলাম $(f(u),g(u))$. তবে এই বিন্দুটা কোনো একটা (x,y,z)-এ এসে উপস্থিত হবে। একটু ভাবলেই বুঝবে যে $x=f(u)$ হবে। এখানে কোনো v নেই, কারণ ঘোরানোটা যেহেতু x-axis-কে কেন্দ্র করে, তাই যতই ঘোরাও না কেন x-টা একই থাকবে। কিন্তু ঘোরানোর ফলে $g(u)$-টা y-axis এবং z-axis-এর মধ্যে দুটো component-এ ভেঙে যাবে। ছবিটা দেখলেই বুঝবে y-axis-এর দিকে component-টার দৈর্ঘ্য হবে $g(u)\sin v$ আর z-axis-এর দিকে component-টা হবে $g(u)\cos v$. সুতরাং পেলাম--

$$\mathbf{x}(u,v) = (\ x(u,v),\ \ y(u,v),\ \ z(u,v)\ ) = (f(u), g(u)\sin v, g(u)\cos v).$$

এই চেহারাটা মনে রেখো--এখানে y আর z-এর একটা $r\cos\theta$ আর $r\sin\theta$ জাতীয় ব্যাপার আছে। ওই মার্কামারা চেহারাটা দেখলেই surface of revolution চেনা যায়। এই প্যাটার্নের বাইরে আছে x-টা। তা থেকেই মালুম হচ্ছে যে, ঘোরানোটা হয়েছে x-axis-কে ঘিরে।

Example 20: এইটা দেখতে কীরকম?

[3] অংকের ভাষায় এরকম curve-কে বলে একটা spiral.

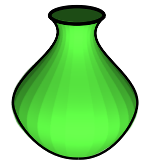


Fig 52

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (1.1+\sin v)\cos u, \\ y(u,v) &= (1.1+\sin v)\sin u, \\ z(u,v) &= v, \end{aligned}$$

যেখানে $(u,v) \in [0, 1.6\pi] \times [0, 2\pi]$.
SOLUTION: এখানে x আর y-এর $r\cos\theta$ আর $r\sin\theta$ প্যাটার্নটা চোখে পড়ার মত। এই প্যাটার্নের বাইরে আছে z. সুতরাং আমরা এখানে এমন কোনো একটা surface of revolution নিয়ে কাজ করছি, যেটা পাওয়া গেছে কোনো curve-কে z-axis-কে কেন্দ্র করে ঘুরিয়ে। Curve-টার parametric form-এর হদিশ পাওয়া শক্ত নয়, $(v, 1.1+\sin v)$. সব মিলিয়ে surface-টাকে দেখতে হবে Fig 52-এর মত। ■

41.3 Surface integral-এর সংজ্ঞা

কোনো surface-কে কী করে parametric form-এ প্রকাশ করতে হয় শিখলাম। এবার আমরা surface integral-এর সংজ্ঞা শিখব। মূল ধারণাটা আগেই দিয়েছি। আমরা যেন একটা ধাতুর চাদরের মোট mass বার করার চেষ্টা করছি। Surface-টা হল আমাদের সেই ধাতুর চাদর। এর বিভিন্ন বিন্দুতে ঘনত্ব বিভিন্ন। ধরো, চাদরের উপর (x,y,z) বিন্দুতে ঘনত্ব হল $f(x,y,z)$. আমরা এটাকেই integrate করতে চাই। তার জন্য "surface integral of f over E"-এর সংজ্ঞা হল--

DEFINITION: **Surface integral**

Let E be a surface given by $\mathbf{x}(u,v) \equiv (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ for $(u,v) \in [a,b]\times[c,d]$. Let f be some real-valued function defined over S. Then the **surface integral** of f over E is defined as

$$\iint_E f\, dS = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(\mathbf{x}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv.$$

If the surface is closed, then we also use the notation

$$\oiint_E f\, dS.$$

কি সাংঘাতিক! এই জিনিসটা কোথা থেকে এল, সে রহস্য এই অধ্যায়ের শেষে গিয়ে আলোচনা করব। খালি আপাততঃ notation সম্পর্কে কয়েকটা কথা বলে নিই--

- ওই যে $\times$ লিখেছি, ওটা কিন্তু এমনি গুণ নয়, cross product. সংজ্ঞাটা মনে করিয়ে দিই--

$$(x_1,x_2,x_3)\times(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1).$$

- Integral-এর শেষে ওই যে dS লিখেছি, ওটা থেকেই বোঝা যাচ্ছে এটা একটা surface integral. তাছাড়া integral-এর নীচে রয়েছে E, যেটা একটা surface. তা থেকেও surface integral বলে চেনা যাচ্ছে।

- অনেক সময়ে লোকে dS-এর বদলে dA-ও লিখে থাকে।

- Notation-এর সঙ্গে সংজ্ঞাটার একটা সম্পর্ক থাকলে মনে রাখতে সুবিধা হয়, তাই লোকে এইরকম একটা জিনিস কল্পনা করেছে--

$$dS=\left\|\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right\|\,dudv.$$

  এর একটা নামও দিয়েছে--**scalar surface element**. এখানে "scalar" শব্দটা কেন লিখেছে সেটা একটু পরে স্পষ্ট হবে, যখন আমরা এই notation-এর একটা vector-সংস্করণ শিখব।

- Closed surface মানে হল বেলুন-জাতীয় কোনো surface, যার কোনো প্রান্ত নেই। যেমন একটা ফুটবলের গা হল একটা closed surface, কিন্তু একটা বাটি closed surface নয়, কারণ বাটির কিনারা আছে।

এবার কিছু অংক করে সংজ্ঞাটা সড়গড় হয়ে নিই।

41.3.1 হাতেকলমে

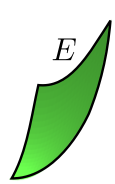
Example 21: আমাদের surface-টা হল Fig 53-এর মত, যার parametric form হচ্ছে (u,v,u^2+v^2) যেখানে $0\le u,v\le 1$. তোমার কাজ হল $\iint_E f\,dS$ বার করা, যেখানে $f(x,y,z)=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$.
SOLUTION: এখানে $x=u,\ y=v$ এবং $z=u^2+v^2$. সুতরাং

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right) &= (1,0,2u),\\ \left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right) &= (0,1,2v).\end{aligned}$$

এদের cross product হল

$$(1,0,2u)\times(0,1,2v)=(-2u,-2v,1),$$

Fig 53



যার norm হল

$$\|(-2u,-2v,1)\| = \sqrt{(-2u)^2+(-2v)^2+1^2} = \sqrt{4u^2+4v^2+1}.$$

যেহেতু $f(x,y,z) = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$, তাই

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = \sqrt{4u^2+4v^2+1}.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়াচ্ছে--

$$\iint_E f\,dS = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (4u^2+4v^2+1)\,dudv = \ldots.$$

বাকিটুকু করার দায়িত্ব তোমাকেই দিলাম। ■

Example 22: Let S be the part of the cone $z^2 = x^2+y^2$ between the planes $z=0$ and $z=1$. Then the value of the surface integral $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$ is

(A) π (B) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(JAM.2020.MCQ25)

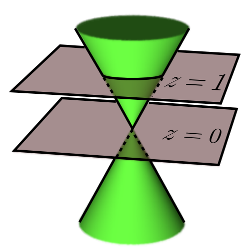
SOLUTION: এখানে $z^2 = x^2+y^2$-এর surface-টা দেখতে Fig 54-এর মত, দুটো cone (শংকু) যেন উল্টো করে ডগায় ডগায় লাগানো। আমরা কাজ করছি $z=0$ থেকে $z=1$-এর মধ্যে। তাই সেখানে আমরা nonnegative square root নিয়ে পাব $z=\sqrt{x^2+y^2}$. এই surface-টার একটা parametric form সহজেই পাওয়া যায়--

> Here S may be parametrised as $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ for $r\in(0,1]$ and $\theta\in[0,2\pi]$.

এটা কী করে পেলাম? আমরা কাজ করছি $x^2+y^2\le 1$ নিয়ে, মানে unit disc-টা নিয়ে। সেখান থেকেই $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$ বসানোর বুদ্ধিটা এসেছে। অমনি $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ পেয়ে গেছি।

> Now
>
> $$\left(\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial y}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\theta,\sin\theta,1),$$
> $$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta},\frac{\partial y}{\partial \theta},\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0).$$

Fig 54



Hence

$$\left\|\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\right\| = \cdots = \sqrt{2}r.$$

ভুল করেছি কিনা একটু মিলিয়ে দেখে নিও।

So the integral becomes

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right)\sqrt{2}r\, drd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\, drd\theta = \cdots = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

■

DAY 42
Surface integral (part 2)

42.1 Surface area

Surface integral ব্যবহার করে কোনো surface-এর area বার করা যায়। তার জন্য integrand-টাকে 1 নিলেই হল, অর্থাৎ যদি E কোনো surface হয়, তবে তার area হবে $\iint_E dS$. এই ফর্মুলার কিছু প্রয়োগ দেখব আজকে।
বিশদ করে লিখলে area-র ফর্মুলাটা দাঁড়ায়--

$$\iint_E \left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| dudv,$$

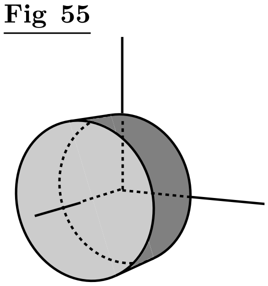
যেখানে E-এর parametric form হল $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \equiv \mathbf{x}(u,v)$. এটা একটা সহজ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে দেখি ঠিকঠাক উত্তর বেরোচ্ছে কিনা।

Example 23: আমরা Fig 55-এর নলটার surface area বার করতে চাই। এর দৈর্ঘ্য 1 এবং radius-ও 1. একটা parametric form হতে পারে এইরকম--

$$x = u, \quad y = \sin v, \quad z = \cos v$$

যেখানে $(u, v) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$. এর ফলে যে নলটা পাব, তার surface area যে 2π, সেটা স্কুলে শেখা cylinder-এর বক্রতলের area-র ফর্মুলা থেকেই বোঝা যাচ্ছে। আমাদের ফর্মুলাটা লাগিয়ে দ্যাখো একই উত্তর পাও কিনা।

Fig 55



SOLUTION: এখানে $\mathbf{x}(u,v) = (u, \sin v, \cos v)$. তাই

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (1,0,0),$$
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0, \cos v, -\sin v).$$

সুতরাং

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0, \sin v, \cos v).$$

এর norm হল $\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\| = 1$. তাই surface area-টা হবে

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{0^2 + \sin^2 v + \cos^2 v}\, du dv = (2\pi - 0)\times(1-0) = 2\pi,$$

ঠিক যেটা আমরা আগেই পেয়েছিলাম। ■

একই কায়দায় নীচের অংকটা করো।

Exercise 21: Find the area of the whole surface of the sphere given by

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \quad y = a\cos\theta\sin\phi, \quad x = a\sin\theta.$$

[3] **(2010.10c)** ■

Example 24: Let S be that part of the surface of the paraboloid $z = 16 - x^2 - y^2$, which is above the plane $z = 0$ and D be its projection on the xy-plane. Then the area of S equals

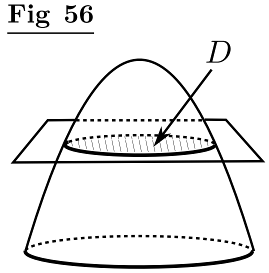
(A) $\iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$

(B) $\iint_D \sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)}\, dxdy$

(C) $\iint_D \sqrt{1 + 4r^2}\, drd\theta$

(D) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{1 + 4r^2}r\, drd\theta$

Fig 56



(JAM.2020.MSQ38)

HINT:
এখানে একাধিক option সঠিক হতে পারে। প্রথমে ছবিটা বুঝে নাও (Fig 56)। দুভাবে parametric form নেওয়া যায়, (x, y) দিয়ে বা (r, θ) দিয়ে। প্রথমে (x, y) দিয়ে শুরু করে তারপর polar coordinate-এর গেলে সহজ হতে পারে। ■

Exercise 22: The area of the surface $z = \frac{xy}{3}$ intercepted by the cylinder $x^2 + y^2 \leq 16$ lies in the interval

(A) $(20\pi, 22\pi]$ (B) $(22\pi, 24\pi]$ (C) $(24\pi, 26\pi]$ (D) $(26\pi, 28\pi]$

(JAM.2017.MCQ16)

HINT: প্রথমে (x, y) দিয়ে parametric form নিয়ে, পরে polar coordinate-এ গেলে সুবিধা হবে। ■

42.2 তিনটে বিশেষ ক্ষেত্র

আমরা যে কায়দাটা শিখলাম, তার জন্য প্রথমে surface-টাকে parametric-ভাবে প্রকাশ করে নিতে হয়। আমরা গতকাল তিনরকমের surface-কে parametric form-এ লিখতে শিখেছি। এবার এদের surface area বার করতে শিখব।

42.2.1 Function-এর গ্রাফ

ধরো একটা function আছে $f(x, y)$, যেখানে $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. এর গ্রাফটা মনে করো একটা শূন্যে ভাসমান রুমালের মত। এই surface-টার একটা parametric form আমরা গতকালই শিখেছি--

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

যেখানে $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$. এর উপরে আমাদের কায়দাটা লাগিয়ে দেখি, কী পাওয়া যায়। এখানে $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (1, 0, \partial_1 f)$ এবং $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0, 1, \partial_2 f)$. সুতরাং

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1).$$

তাই surface area-টা হবে

$$\int_c^d \int_a^b \|(-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1)\| \, dy dx = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2} \, du dv.$$

এবার এটা ব্যবহার করে কিছু অংক করি।

Example 25: Find the area of the surface $x^2 + y$ for $x, y \in [0, 1]$.

SOLUTION: এখানে $f(x, y) = x^2 + y$. সুতরাং সদ্যশেখা ফর্মুলাটা লাগালে হয়--

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (2u)^2 + 1^2} \, du dv = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2 + 4u^2} \, du dv = \int_0^1 \sqrt{2 + 4u^2} \, du = \cdots.$$

এটা বার করা খুব শক্ত কিছু নয়। তোমার জন্যই রেখে দিলাম। ■

Exercise 23: $f(x, y) = 2x - 3y$ হলে $(x, y) \in [-1, 2] \times [0, 1]$-এর জন্য গ্রাফটার surface area বার করো। ■

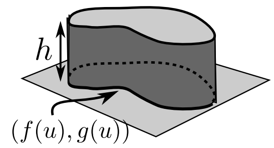


Fig 57

42.2.2 Cylinder

কাকে cylinder বলে সে তো গতকালই বলেছি, এবং তার খাড়া আঁকাবাঁকা দেওয়ালের একটা parametric form-ও শিখেছি। এবার তার area বার করতে শিখব। উত্তরটা অবশ্য আন্দাজ করা মোটেই শক্ত নয়--যে লুপটা নিয়ে শুরু করেছিলাম, তার দৈর্ঘ্যটাকে উচ্চতা দিয়ে গুণ করে দিলেই হবে (Fig 57)। সেটাই এবার আমরা দেখাব আমাদের ফর্মুলা থেকে। Surface-টাকে parametric-ভাবে লেখা যায়--

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v).$$

যেখানে $u \in [a,b]$ আর $v \in [0,h]$. এখানে $\big(x(u), y(u)\big)$ হল cylinder-টার নীচের লুপটার parametric form, আর h হল উচ্চতাটা।

এবার সরাসরি সংজ্ঞার ধাপগুলো লাগিয়ে যাই--

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (x'(u), y'(u), 0),$$

এবং

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0,0,1).$$

সুতরাং

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (y'(u), -x'(u), 0).$$

এর norm বার করলে হয়--

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| = \sqrt{\big(x'(u)\big)^2 + \big(y'(u)\big)^2}.$$

সুতরাং area-টা দাঁড়াচ্ছে--

$$\begin{aligned}\iint_S \left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| du dv &= \int_0^h \int_a^b \sqrt{\big(x'(u)\big)^2 + \big(y'(u)\big)^2} du dv \\ &= h\int_a^b \sqrt{\big(x'(u)\big)^2 + \big(y'(u)\big)^2} du.\end{aligned}$$

এই যে integral-টা রইল, সেটাই হল লুপটার দৈর্ঘ্য।

Example 26: একটা cylinder দিচ্ছি, যার base-টা একটা ellipse. এই ellipse-এর major axis-এর দৈর্ঘ্য 3 আর minor axis-এর দৈর্ঘ্য 1. উচ্চতা হল 5. এই cylinder-টার curved surface-এর (মানে বক্রতলের) area বার করো।

SOLUTION: এখানে উত্তর হবে উচ্চতা গুণ ellipse-টার পরিধির দৈর্ঘ্য। Ellipse-এর পরিধি বার করার একটা ফর্মুলা আছে, $\pi(a+b)$, যেখানে a আর b হল semi-axis দুটোর দৈর্ঘ্য। সুতরাং কোনো integration ছাড়াই উত্তর বেরিয়ে যাচ্ছে 10π. ■

Exercise 24: Consider the region of the xy-plane bounded by the parabolas $y = x^2 - 1$ and $y = 1 - x^2$. Find the total surface area of the cylinder of height 2 erected on this region.
HINT: মনে রেখো যে, এখানে "total surface area" বার করতে বলেছে, মানে দুই প্রান্তের (মেঝের আর ছাদের) area-ও যোগ করতে হবে। ■

42.2.3 Surface of revolution

এবার আমরা কোনো surface of revolution-এর area বার করা শিখব। যে curve-টাকে ঘোরাচ্ছি সেটার parametric form যদি $\big(f(u), g(u)\big)$ নিই (যেখানে $u \in [a, b]$),)আর ঘোরানোটা হয় x-axis-কে ঘিরে, তবে surface-টার parametric form নিতে পারি $\mathbf{x}(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v)$. এর উপরেই আমাদের ফর্মুলাটা আমরা লাগাব। কিন্তু ঘোরানোর সময়ে যাতে surface-টা নিজেই নিজের ঘাড়ে না উঠে পড়ে, তার জন্য ধরে নেব যে, curve-টা x-axis-এর এক পাশে আছে, ধরো x-axis-এর উপরে, মানে $g(u) \geq 0$.
উপকরণগুলো সংগ্রহ করে নিই--

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} &= (f'(u), g'(u)\cos v, g'(u)\sin v) \\
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} &= (0, -g(u)\sin v, g(u)\cos v) \\
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} &= (g(u)g'(u), -f'(u)g(u)\cos v, -f'(u)g(u)\sin v).
\end{aligned}$$

সুতরাং

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\|^2 = \big(g(u)\big)^2 \left[\big(g'(u)\big)^2 + \big(f'(u)\big)^2\right].$$

অতএব, যেহেতু $g(u) \geq 0$ ধরেছি,--

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| = g(u)\sqrt{\big(g'(u)\big)^2 + \big(f'(u)\big)^2}.$$

সব মিলিয়ে area-টা পাচ্ছি এরকম--

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b g(u)\sqrt{\big(g'(u)\big)^2 + \big(f'(u)\big)^2}\,du\,dv.$$

একে সহজ করে লেখা যায়--

$$2\pi\int_a^b g(u)\sqrt{\big(g'(u)\big)^2 + \big(f'(u)\big)^2}\,du.$$

এর কিছু প্রয়োগ দেখি।

Exercise 25: Find the surface area of the solid generated by revolving the cycloid

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

about the line $y = 0$.[6] **(2006.10b)**
HINT: এখানে ধরে নাও $0 \leq \theta \leq 2\pi$. ■

Exercise 26: The area of the surface generated by rotating the curve $x = y^3$, $0 \leq y \leq 1$, about the y-axis, is

(A) $\frac{\pi}{27}10^{3/2}$ (B) $\frac{4\pi}{3}(10^{3/2} - 1)$ (C) $\frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1)$ (D) $\frac{4\pi}{3}10^{3/2}$

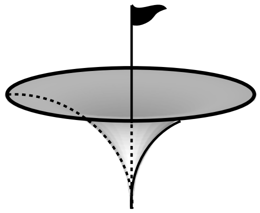


Fig 58

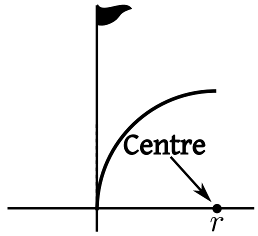


Fig 59

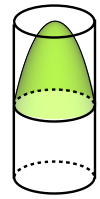


Fig 60

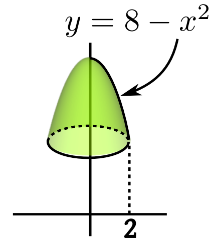


Fig 61

(JAM.2019.MCQ10) ■

Exercise 27: If a quadrant of a circle of radius r revolves about the tangent at an extremity, then find the area of the curved surface generated.[3] **(2005.10cii)**
HINT: Fig 58 দ্যাখো। এতক্ষণ আমরা কোনো একটা axis-কে কেন্দ্র করে ঘোরাচ্ছিলাম। এই অংকে সেরকম কিছু বলা নেই। এখানে যে সরলরেখাকে কেন্দ্র করে ঘোরানো হচ্ছে (যেটাকে ছবিতে ফ্ল্যাগ দিয়ে দেখিয়েছি), আমরা সেটাকেই axis নেব। ফলে quadrant-টা দেখতে হবে Fig 59-এর মত। ■

Exercise 28: The area of the part of the surface of the paraboloid $x^2 + y^2 + z = 8$ lying inside the cylinder $x^2 + y^2 = 4$ is

(A) $\frac{\pi}{2}(17^{3/2} - 1)$ (B) $\pi(17^{3/2} - 1)$ (C) $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$ (D) $\frac{\pi}{3}(17^{3/2} - 1)$

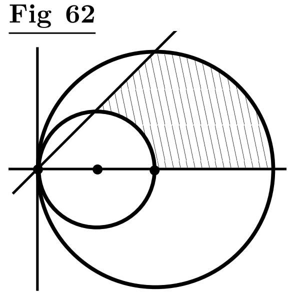
(JAM.2019.MCQ23)
HINT: Surface-টাকে দেখিয়েছি Fig 60-এ। এই অংকটা অন্তত: দুইভাবে করা যায়--এক, surface of revolution হিসেবে, আর দুই, সরাসরি parametric form ব্যবহার করে। সরাসরি parametric form ব্যবহার করতে চাইলে লিখতে পারো $(r\cos\theta, r\sin\theta, 8 - r^2)$, যেখানে $r \in (0, 2]$ আর $\theta \in [0, 2\pi)$. এটা কী করে পেলাম, বুঝলে তো? আমাদের surface-টা শূন্যে ভেসে আছে $x^2 + y^2 = 4$ গোলটার উপরে। এই circle-এর ভিতরের যেকোনো বিন্দুকেই $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ হিসেবে লেখা যায়। এই বিন্দুর উপরে surface-এর উচ্চতা হল $z = 8 - x^2 - y^2 = 8 - r^2$. যদি surface of revolution-এর কায়দায় করতে চাও, তবে Fig 61 দেখে নাও। ■

42.3 যখন integration লাগে না

অনেক surface আছে, যাদের area বার করতে কোন integration-ই লাগে না। এরকম দুটো উদাহরণ দেখাই।

Example 27: The area bounded by the curves $x^2 + y^2 = 2x$ and $x^2 + y^2 = 4x$, and the straight

Fig 62



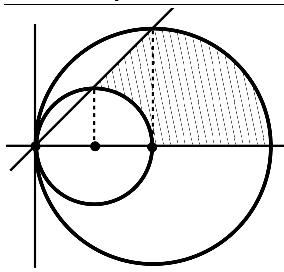


Fig 63

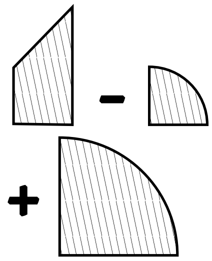


Fig 64

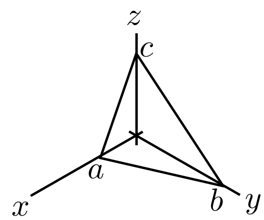


Fig 65

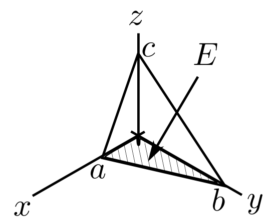


Fig 66

lines $y = x$ and $y = 0$ is

(A) $3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right)$ (B) $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ (C) $2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$ (D) $2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\right)$

(JAM.2020.MCQ18)
SOLUTION:কোনো integration-ই লাগবে না। Fig 62, Fig 63 এবং Fig 64 দেখলেই সেটা বোঝা যাবে। ■

Example 28: Find the area of that part of the plane

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

which lies between the coordinate planes.[3] **(2004.10c)**
SOLUTION: আমাদের surface-টা এখানে একটা ত্রিভুজ (Fig 65)। এর বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো বার করে ফেলা সহজ। তারপর $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ফর্মুলাটা লাগাও।

বিকল্প পদ্ধতি

আমরা এবার অংকটাকে integration লাগিয়ে করব। আমরা আগে parametric-ভাবে রুমালকে শূন্য ভাসিয়ে তোলার গল্প শিখেছিলাম। সেখানে আমরা সবসময়ে রুমালটাকে শুরুতে rectangle নিচ্ছিলাম। সেটা কিন্তু মোটেই গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়। যেমন, এখানে রুমালটাকে ত্রিভুজ নিলে সুবিধা হবে।

> We parametrise the surface as
>
> $$\mathbf{x}(u,v) = \left(\; u, v, c\left(1 - \frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right) \; \right)$$
>
> for $(u,v) \in E = \left\{(u,v) \;:\; u,v \geq 0,\; \frac{u}{a} + \frac{v}{b} \leq 1\right\}$.

এই E-টা একটা ত্রিভুজ (Fig 66)।

> Then $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (1, 0, -c/a)$ and $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0, 1, -c/b)$. So
>
> $$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (c/a, c/b, 1).$$

So the required surface area is

$$\iint_E \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv = \sqrt{\tfrac{c^2}{a^2} + \tfrac{c^2}{b^2} + 1} \times \text{area}(E) = \tfrac{ab}{2} \sqrt{\tfrac{c^2}{a^2} + \tfrac{c^2}{b^2} + 1}.$$

■

DAY 43
Surface integral (part 3)

43.1 Vector field-এর surface integral

আমরা আগে দেখেছিলাম যে, line integral-এর একাধিক সংস্করণ আছে, scalar field-এর জন্য আর vector field-এর জন্য আলাদা করে। Surface integral-এর বেলাতেও তাই। গতকাল পর্যন্ত যে রূপটা আলোচনা করলাম, সেটা ছিল scalar field-এর জন্য। এবার vector field-এর surface integral কী করে বার করে বলি। তার জন্য একটা ব্যাপার কল্পনা করে নিলে সুবিধা হবে।

ধরো একটা হোস পাইপ দিয়ে তোড়ে জল বেরোচ্ছে। যদি তুমি হোস পাইপের মুখটা সামান্য চেপে ধরো, তবে দেখবে জলটা আরো তীব্রভাবে বেরোচ্ছে। ব্যাপারটা একটু অদ্ভুত নয় কি? চেপে ধরলে তো জল বেরোনোর পরিমাণ বরং কমে যাওয়া উচিত! যেমন, যদি একটা বালতি ভরতে চাই, তবে কি পাইপের মুখ একটু চেপে রাখলে বালতিটা তাড়াতাড়ি ভরবে? মোটেই না! আবার এও আমাদের সকলেরই দেখা যে পাইপের মুখ একটু চেপে ধরলেই জলটা কেমন পিচকিরির মত ছুটে গিয়ে দূরের লোককে ভিজিয়ে দেয়। তবে? আসলে এখানে একটা চিন্তার গোলমাল হচ্ছে, কারণ জল বেরোনোর "তীব্রতা"-র সংজ্ঞা আমরা দুরকমভাবে দিতে পারি--

- এক, জলকণাগুলো একটা নির্দিষ্ট সময়ে কত দূরে যাচ্ছে, সেটা দিয়ে। অর্থাৎ যদি হোস পাইপ দিয়ে বেরোনো জলের ধারাটাকে একটা দড়ির মত ভাবি, তবে তার দৈর্ঘ্য কী হারে বাড়ছে।
- আর দুই, একটা নির্দিষ্ট সময়ে মোট কত volume-এর জল বেরোচ্ছে। মানে একটা বালতি কত দ্রুত ভরছে।

আমরা যখন ভাবছি যে পাইপের মুখ একটু চেপে ধরলে জল তো বরং একটু আস্তে বেরোনো উচিত, তখন আমরা দ্বিতীয় সংজ্ঞা অনুযায়ী ভাবছি। আর যখন দেখছি পাইপের মুখ একটু চেপে ধরলে জলের ধারাটা পিচকিরির মত ছুটছে, তখন আমরা ভাবছি প্রথম সংজ্ঞা অনুযায়ী। অংকের ভাষায় এরকম গুলিয়ে যাওয়ার অবকাশ নেই, কারণ সেখানে এই দুটো ধারণার জন্য সম্পূর্ণ আলাদা নাম ব্যবহার করা হয়। প্রথমটাকে বলে **linear velocity** আর দ্বিতীয়টাকে বলে **flux** (ফ্লাক্স্)। এদের দুজনের মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে। যদি linear velocity জানি, আর পাইপের cross-sectional area (মানে প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল) জানি, তবে flux বার করতে পারা উচিত। ঠিক এই কাজটা করতেই গিয়েই surface integral কাজে লাগে। ধাপে ধাপে বোঝা যাক। প্রথম কয়েকটা ধাপটা সহজ বুদ্ধিতেই করা যাবে, integration-ফিন্টিগ্রেশন লাগবে না।

Fig 67

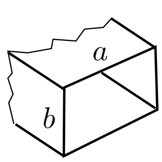


Fig 68

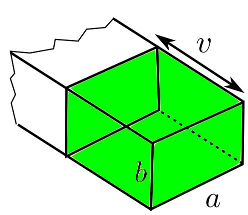
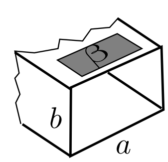


Fig 69



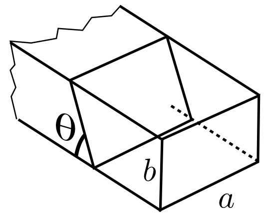


Fig 70

Example 29: ধরো পাইপটা সটান সোজা, তার cross-section একটা rectangle-এর মত, ছবিতে দেখিয়েছি Fig 67-এ। এর মধ্যে দিয়ে জল যাচ্ছে, তার linear velocity হল v. তবে flux কী হবে?

SOLUTION: প্রশ্নটাকে একটু অংকের ভাষায় সাজিয়ে নিই। Flux-এর আলোচনা করার জন্য প্রথমে জলের গতিপথে একটা surface কল্পনা করে নিতে হয়। এখানে এই surface-টা নিচ্ছি পাইপের cross-section-এর rectangle-টাই। প্রশ্ন হল একক সময়ে এই surface পার করে কত volume জল যাচ্ছে। Fig 68-এ যেরকম শেড করে দেখিয়েছি, সেভাবে যদি বেরিয়ে আসা জলটাকে একটা ইঁটের মতো কল্পনা করো, তবে তার দৈর্ঘ্য হবে v আর cross-sectional area হবে ab. তাই volume হবে abv. সেটাই হল উত্তর। ■

এই অংকটা থেকে তুমি ফস্ করে ভেবে বসতে পারো যে, linear velocity-কে surface-টার area দিয়ে গুণ করে দিলেই বুঝি সবসময়ে flux বেরিয়ে যায়। সেটা যে ঠিক নয়, সেটা বোঝানোর জন্যই নীচের বোকা-বোকা অংকটা।

Example 30: ফের সেই পাইপ। এবার আমি পাইপের গায় একটা অংশ ঘিরে দিলাম, যার area হল β. বোঝার জন্য Fig 69 দেখে নাও। এইটাই আমাদের surface. এর মধ্যে দিয়ে flux কত?

SOLUTION: সহজ বুদ্ধিতেই বুঝতে পারা উচিত যে উত্তর হবে 0, কারণ জল তো মোটেই ওখান দিয়ে বেরোচ্ছে না। কিন্তু এখানে আগের অংকের সেই "linear velocity × area" ফর্মুলাটা খাটালে তো flux হওয়া উচিত ছিল βv. সেটা হচ্ছে না কেন? কারণ এখানেও linear velocity-টা v বটে, কিন্তু সেটা আমাদের area-টা ভেদ করে যাচ্ছে না, গা বরাবর পিছলে বেরিয়ে যাচ্ছে। ■

এই দুটো উদাহরণ থেকেই হয়তো বুঝতে পারছ যে, linear velocity-র যে component-টা surface-টার সাথে parallel (মানে গা বরাবর পিছলে চলে যাচ্ছে), flux-এ তার কোনো অবদান থাকতে পারে না। সেই component-টা বাদ দিলে linear velocity-র যে অংশটা বাকি থাকে, যাবতীয় অবদান খালি সেইটারই। মানে, যে component-টা surface-টাকে perpendicular-ভাবে ভেদ করে যাচ্ছে। সুতরাং ফর্মুলাটা হওয়া উচিত এই জাতীয় কিছু--

area ×(linear velocity-র perpendicular component-এর দৈর্ঘ্য).

অবশ্য কেবলমাত্র এই দুটো উদাহরণ দেখেই এতটা বুঝে ফেলা খুব সহজ নয়। আরেকটা মাঝামাঝি উদাহরণ দেখা যাক, তবে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 31: আবার সেই পাইপটাই নেব। এবার যে surface-এর উপর flux বার করব, সেটা হেলানো (Fig 70)। প্রথমে সহজ বুদ্ধিতে flux-টা বার কর, তারপর ফর্মুলাটা লাগিয়ে।

SOLUTION: মনে রেখো flux মানে জল বেরোনোর volume-এর হার। এখানে যে area-টা নিয়ে কাজ করতে বলেছে, সেটা পাইপের পুরো মুখটা জুড়ে আছে, অতএব পাইপ দিয়ে যা জল বেরোবে, পুরোটাই এই surface-কে ভেদ করে যাবে। সুতরাং কষ্ট করে হেলানো surface না নিয়ে আগের অংকের মত cross-section বরাবর নিলেও একই উত্তরই হবে। সুতরাং এখানেও আগের অংকেরই মত উত্তর হবে vab. এই গেল সহজ বুদ্ধির উত্তর।

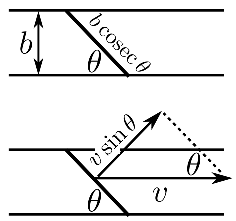


Fig 71

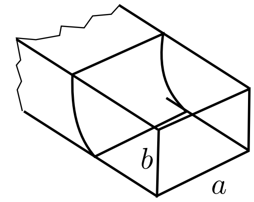


Fig 72

এবার ফর্মুলা লাগিয়ে দেখি কী হয়। যে surface-টা দিয়েছে, তার area-টা হল $ab\operatorname{cosec}\theta$ (ভালো করে Fig 71 দেখে এটা বুঝে নাও)। এই area-র সঙ্গে perpendicular হবে linear velocity-র যে component-টা, সেটার দৈর্ঘ্য $v\sin\theta$. সুতরাং ফর্মুলা লাগালে পাচ্ছি

$$ab\operatorname{cosec}\theta \times v\sin\theta = vab,$$

ঠিক যেমনটা সহজ বুদ্ধিতেই পেয়েছিলাম। ■

এ যাবৎ কোনো integration লাগে নি, কারণ আমাদের surface-গুলো সব plane ছিল, আর linear velocity-ও সেই surface-এর সর্বত্র একই থাকছিল। এবার একটা উদাহরণ দেখব যেখানে surface-টা plane নয়, বাঁকানো।

Example 32: আবার সেই পাইপটাই। কিন্তু এবার surface-টা Fig 72-এর মত। এখানে flux বার করবে কীভাবে?

SOLUTION: বাঁকা হোক আর যাই হোক, এখনও surface-টা পাইপের পুরো মুখটা জুড়েই আছে, অতএব এখানেও flux সেই vab-ই হবে। কিন্তু ফর্মুলা দিয়ে করবার জন্য এবার integration লাগবে। পুরো surface-টাকে ছোটো ছোটো টুকরোতে ভেঙে নিয়ে প্রত্যেকটা টুকরোকে প্রায় plane বলে মনে করব। এবং সেই plane-এর সঙ্গে normal component-টা নিতে হবে, মানে যে component-টা plane-টার সঙ্গে $90°$-তে আছে। এই component-টাও কিন্তু বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হতে পারে। সব শেষে মোট flux বার করে limit নিতে হবে। "ছোটো ছোটো টুকরো, approximation, মোট বার করা, সবশেষে limit নেওয়া"--নিশ্চয়ই integration-এর গন্ধ পাচ্ছ! সত্যিই লোকে উত্তরটাকে এক ধরণের integral-এর আকারে লিখে থাকে। একে বলে surface integral of vector field, যেটাই আমাদের আজকের আলোচ্য বিষয়। ■

কী করে কোনো vector field-এর surface integral বার করতে হয় সেটা শেখার জন্য প্রথমে জানতে হবে একটা surface-এর normal বলতে কী বোঝায় এবং সেটা কী করে বার করে।

43.2 কোনো surface-এর normal বার করা

প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেব, তারপর অংক কষে বার করতে শিখব।

43.2.1 ব্যাপারটা কী?

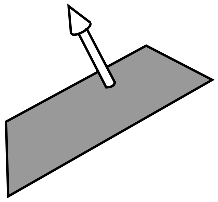


Fig 73



Fig 74

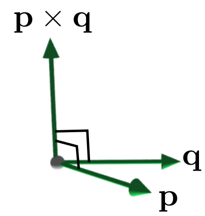


Fig 75

একটা surface-এর normal বলতে কী বোঝায়, সেটা অনুভব করা শক্ত নয়। যদি surface-টা একটা plane হয়, তবে তার সঙ্গে 90° করে একটা কাঠি পুঁতলে (Fig 73), সেটাই হবে normal. আমরা যখন মাটির উপর দাঁড়িয়ে থাকি, তখন আমরা মাটির সঙ্গে normal থাকি। আবার স্পাইডারম্যান যখন একটা দেওয়ালের গায় দাঁড়িয়ে থাকে, তখন সেও দেওয়ালের সঙ্গে normal-ই থাকে। যদি surface-টা plane নাও হয়, তাও একই ধারণা একটু ঘুরপথে লাগানো যাবে। যেমন ধরো পৃথিবীটা গোল। ভূপৃষ্ঠের বিভিন্ন বিন্দুতে মানুষজন হেঁটে বেড়াচ্ছে (Fig 74)। তারা সকলেই মনে করছে যে, তারা পৃথিবীর উপর খাড়া দাঁড়িয়ে আছে, কারণ তারা সকলেই নিজ নিজ অবস্থানে ভূপৃষ্ঠের সঙ্গে normal. এই গেল ছবি দিয়ে বোঝা। এবার প্রশ্ন হল-- একটা surface দেওয়া থাকলে কী করে তার কোনো বিন্দুতে normal বার করব?



তার জন্য আমরা যথারীতি শুরু করব surface-টার কোনো parametric form নিয়ে, ধরো $\mathbf{x}(u,v)$. তবে $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ এবং $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ দুজনেই হবে surface-টার সঙ্গে tangent, আর $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ হবে surface-টার সঙ্গে ওই বিন্দুতে normal.

আসলে যদি $\mathbf{p}$ আর $\mathbf{q}$ যেকোনো দুটো vector হয়[4], তবে $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ ওদের দুজনের সঙ্গেই 90° কোণে থাকে (Fig 75)।

এই জায়গাটা একটু ভিডিও দিয়ে বুঝে নিলে মজা লাগতে পারে। হাতের কাছে মোবাইল থাকলে পাশের QR code-টা স্ক্যান করে ফেলো। বা নীচের address-টা টাইপ করে Google করে নাও। তাতেও কাজ না হলে Whatsapp করে আমাকে গালাগালি দিও।
`https://arnabc74.github.io/mult/normal.html`

কয়েকটা অংক করে ব্যাপারটা হজম করে নেওয়া যাক।

Example 33: ধরো xy-plane-টাই নিলাম। এই surface-টা একেবারে মাটিতে শোয়ানো horizontal. সহজ বুদ্ধিতেই বোঝা যাচ্ছে যে, এর সঙ্গে normal হবে vertical দিকে মুখ করা যেকোনো vector. এখন xy-plane-এর যেকোনো বিন্দুকেই $\mathbf{x}(u,v) = (u,v,0)$ আকারে লেখা যায়, তার মানে এটাই একটা parametric form. দ্যাখো তো, এর উপরে আমাদের ফর্মুলাটা লাগিয়ে সত্যিই normal পাওয়া যাচ্ছে কিনা।

SOLUTION: এখানে $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (1,0,0)$ এবং $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0,1,0)$. তাই $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0,0,1)$, যেটা সত্যিই vertical দিকে

[4] যারা একই লাইন বরাবর নেই।

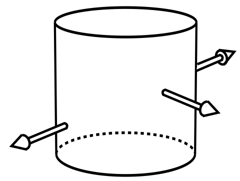


Fig 76

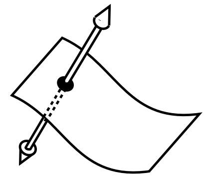


Fig 77

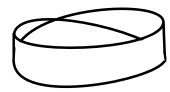


Fig 78



Fig 79

মুখ করে আছে। ■

Exercise 29: একটা cylinder আছে, যার parametric form হল

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2].$$

এর ছবি এবং কয়েকটা বিন্দুতে normal এঁকে দেখিয়েছি Fig 76-এ। আমাদের ফর্মুলাটা লাগিয়ে দ্যাখো কী আসছে। ■

Exercise 30: আগের অংকটাই আবার করো, কিন্তু এবার সামান্য অন্য parametric form নিয়ে--

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos v, \sin v, u), \quad (u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi).$$

এবার উত্তরটা কীভাবে পরিবর্তিত হল? ■

43.2.2 আমার ভিতর বাহিরে...

Fig 77 দেখলেই বুঝবে যে, একটা surface-এর কোনো বিন্দুতে normal-এর মুখটা surface-এর এদিকেও হতে পারে, ওদিকেও হতে পারে। আমাদের ফর্মুলাটা লাগালে যে normal-টা পাবে, তার অভিমুখটা নির্ভর করবে কী parametric form নিয়ে শুরু করেছিলাম, তার উপরে। যেমন, আগের দুটো অংকেই একই cylinder নিয়ে কাজ করেছি, খালি একবার parametric form নিয়েছিলাম $(\cos u, \sin u, v)$ আর অন্যবার $(\cos v, \sin v, u)$. সে অংক দুটো যদি করে থাকো, তবেই দেখেছ যে normal-এর মুখটা উল্টে গেছিল।

Surface integral বার করার সময়ে আমরা যেসব normal নিয়ে কাজ করি, সেগুলোর সবারই মুখই একই দিকে থাকতে হয় (যেমন জল বেরোনোর বেলায়, জলটা যে দিকে বইছে, সেই দিকে)। সেই জন্যে আমরা গোড়াতেই surface-টার একটা পাশকে "বাইরে" আর অন্য পাশটাকে "ভিতর" নাম দিয়ে নিই। কোন্‌টাকে কী বলছ, সেটা সম্পূর্ণই তোমার সুবিধা অনুযায়ী। তবে যে পাশের normal নিয়ে তুমি কাজ করতে চাও, সেই পাশটাকে "বাইরে" বলাই দস্তুর। সেদিকের normal-গুলোকে বলে **outward normal**. আর যদি সেই normal-টার দৈর্ঘ্য হয় 1, তবে বলি **unit outward normal**. যেহেতু outward normal নিয়েই আমাদের আগ্রহ, তাই আমরা এমনভাবে parametric form নিই, যাতে $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$-এর মুখটা বাইরের দিকেই হয়। হাতেকলমে অংক করার সময়ে সে বিষয়ে সতর্ক থাকতে হয়। যদি উল্টোমুখো normal এসে যায়, তবে একটা বাড়তি মাইনাস লাগিয়ে normal-টাকে outward করে নিতে হয়।

এইখানে চুপিচুপি একটা অদ্ভুত কথা বলে রাখি। এমন বিদঘুটে surface সম্ভব, যাদের আবার ভিতর-বাইরে বলে আলাদা কিছু হয় না। এরকম একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 78-এ। চাইলে তুমি এই surface-টা হাতেকলমেও বানাতে পারো (Fig 79)। প্রথমে একটা কাগজের ফালি নাও, তারপর দুই প্রান্তকে আঠা দিয়ে জুড়ে একটা রিং বানাও, খালি জোড়ার আগে যেকোনো একটা প্রান্তকে আধ প্যাঁচ ঘুরিয়ে নিও, মানে যদি ফালিটার একপাশ সাদা আর অন্য পাশ কালো কল্পনা করো, তবে যেন এক প্রান্তের সাদা দিকটা অন্য প্রান্তের কালো দিকের সঙ্গে লাগে। এই surface-টাকে বলে একটা **Möbius surface** (মোবিয়াস সার্ফেইস)।

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এর ভিতর-বাইরে বলে আলাদা করে কিছু নেই, একটা পিঁপড়ে যদি এর "কালো দিক"-এ থাকে, তবে হাঁটতে হাঁটতে এক সময়ে কোনো কিনারা না পেরিয়েই আঠার জায়গাটা দিয়ে "সাদা দিক"-এ পৌঁছে যাবে। তাই "কালো দিক" আর "সাদা দিক" বলে আলাদা করে কিছু আসলে নেইই। এরকম surface-কে বলে **non-orientable**. আমরা কোনো vector field-এর surface integral বার করার সময়ে এরকম বিদ্ঘুটে surface-দের সযত্নে এড়িয়ে চলব। অবশ্য কোনো scalar field-এর surface integral বার করতে এখানেও অসুবিধা নেই।

ঘর কৈল বাহির, বাহির কৈল ঘর

--চণ্ডীদাসের পদাবলী

43.3 সংজ্ঞা

এইবার আমরা অংকের ভাষায় একটা vector field-এর surface integral-এর সংজ্ঞা দেব।

> DEFINITION: **Surface integral of vector field**
>
> Let E be a surface in $\mathbb{R}^3$ with parametric form $\mathbf{x}(u,v)$ such that $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ gives outward normal. Let $\mathbf{f}: E\to\mathbb{R}^3$. Then we define the **surface integral f** over E as
>
> $$\iint_E \mathbf{f}\bullet\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right)dudv.$$
>
> It is denoted by either $\iint_E \mathbf{f}\bullet\mathbf{n}\,dS$ or $\iint_E \mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}$, where $\mathbf{n}$ denotes the unit outward normal, and $d\mathbf{S}=\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right)dudv$ is called the **vector element of surface**.

এর মধ্যে অনেক তথ্য রয়েছে। ধীরে ধীরে হজম করব। আপাততঃ dS আর $d\mathbf{S}$-এর সূক্ষ্ম পার্থক্যটা লক্ষ করো। প্রথমটা আমাদের পূর্বপরিচিত scalar element of surface,

$$dS=\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\|dudv,$$

আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে **S**-টা vector হিসেবে মোটা করে লেখা, মানে vector element of surface,

$$d\mathbf{S}=\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right)dudv,$$

এটা কোথা থেকে এল, এবং আগেকার সেই নল দিয়ে জল বেরোনোর উদাহরণগুলোর সঙ্গে এর যোগই বা কোথায়, সেটা অবশ্য মোটেই বোঝা যাচ্ছে না। আপাততঃ মনে করো সেটা একটা ম্যাজিক। রহস্যটা একটু পরেই বোঝাব, কিন্তু আগে কয়েকটা অংক করে সংজ্ঞাটা সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

43.3.1 হাতেকলমে

Example 34: Consider the surface $S=\{(x,y,xy)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\le 1\}$. Let $\vec{F}=y\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k}$. If $\hat{n}$ is the continuous unit normal field to the surface S with positive z-component, then

$$\iint_S \vec{F}\bullet\hat{n}\,dS$$

equals

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

(JAM.2021.MCQ13)

SOLUTION: এখানে $\hat{n}$-কে একটা গালভরা নাম দিয়েছে "continuous unit normal field"। এটাকে field বলেছে, কারণ surface-টার বিভিন্ন বিন্দুতে এর value বিভিন্ন হতে পারে, তাই এটা একটা vector field. যেহেতু surface-টা চমৎকার smooth, তাই বিন্দুটাকে বদলালে normal-টাও continuous-ভাবে বদলাবে। যাই হোক অংকটা করার সময়ে এতসব নিয়ে মাথা ঘামাতে হবে না। এখানে "ভিতর-বাইরে" আলাদা করে বলে নি। খালি বলে দিয়েছে সেই normal-টা নিয়ে কাজ করতে, যার z-component-টা positive.

প্রথমে parametric form নিই একটা--

$$\mathbf{x}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\sin\theta\cos\theta),$$

যেখানে $r \in (0,1]$ এবং $\theta \in [0,2\pi]$. যেহেতু $x^2+y^2 \leq 1$ দিয়েছে, সেই জন্যই polar coordinate-এর ব্যাপারটা মাথায় এসেছে। অবশ্য অন্য parametric form-ও নেওয়া চলত। যাই হোক, আমাদের parametric form-এর জন্য--

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta} &= (\cos\theta, \sin\theta, r\sin 2\theta)\times\left(-r\sin\theta, r\cos\theta, r^2\cos 2\theta\right)\\ &= (-r^2\sin\theta, -r^2\cos\theta, r).\end{aligned}$$

এই একটা normal পাওয়া গেল। এবার এর দিকটা ঠিক করতে হবে। আমাদের সেই দিকে মুখ করা চাই যেদিকে z-component-টা positive. এখানে z-component হল r, যেটা সত্যিই positive. তাই আমাদের normal-টা ঠিক দিকেই মুখ করে আছে। (না থাকলে আগে একটা মাইনাস লাগিয়ে নিতে হত)। এবার তবে dot product নেওয়া যাক--

$$\vec{F}\bullet\hat{n} = (r\sin\theta, r\cos\theta, 1)\bullet(-r^2\sin\theta, -r^2\cos\theta, r) = r - r^3.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে integral-টা হচ্ছে--

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r - r^3\, d\theta dr = 2\pi\int_0^1 r - r^3\, dr = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exercise 31: আগের অংকটাই আরেকভাবে চেষ্টা করো। কিন্তু এবার এই parametric form-টা দিয়ে--

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, uv) \text{ যেখানে } u^2+v^2 \leq 1.$$

■

Exercise 32: Find the upward flux of $F(x,y,z) = (x, y^2, z)$ through the surface

$$S = \{(x,y,z) \ : \ x^2+z^2 = 4, \ 0 \leq y \leq 1, \ x, z \geq 0\}.$$

HINT: Surface-টার ছবি দেখিয়েছি Fig 80-এ। ■

43.4 ম্যাজিকের পিছনের রহস্য

আমরা দুরকমের surface integral আলোচনা করেছি, scalar field-এর জন্য আর vector field-এর জন্য। দুই ক্ষেত্রেই সংজ্ঞার মধ্যে খানিকটা ম্যাজিক ছিল, যেটা আমরা বোঝাই নি। সেটা না বুঝেই অবশ্য অংকগুলো করে ফেলা যাচ্ছিল। যারা সব কিছু ভালো করে বুঝতে চাও, তাদের জন্য ম্যাজিক দুটোর রহস্য উদ্ঘাটন করি।

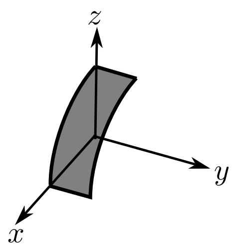


Fig 80

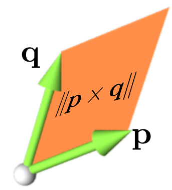


Fig 81

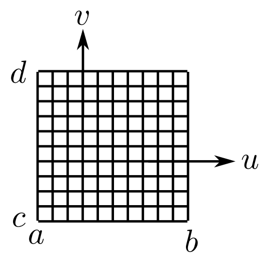


Fig 82

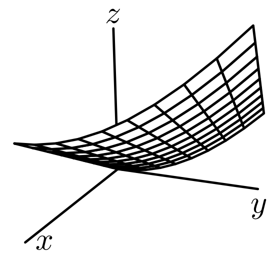


Fig 83

43.4.1 Scalar field-এর বেলায়

Scalar field-এর বেলায় সংজ্ঞাটা ছিল এইরকম--

$$\iint_E f\, dS = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(\mathbf{x}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv.$$

এই সাংঘাতিক দেখতে জিনিসটা কোথা থেকে এসেছিল সেটা কিন্তু আমরা তখন বলিনি। এবার সে বিষয়ে ছবি দিয়ে একটু ধারণা দেব।

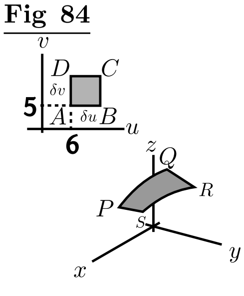
শুরুতে একটা ফর্মুলা বলে রাখি, parallelogram-এর area বার করার জন্য (Fig 81)। দুটো vector রয়েছে $\mathbf{p}$ আর $\mathbf{q}$. এদের মধ্যে যে parallelogram-টা আছে তার area হল $\|\mathbf{p}\times\mathbf{q}\|$. আমরা আগেই এরকম একটা ফর্মুলা শিখেছিলাম। সেটা ছিল determinant দিয়ে। সেটা কাজে লাগত যখন vector দুটো $\mathbb{R}^2$-তে থাকে। এই নতুন ফর্মুলাটা কাজ লাগে যখন vector-গুলো $\mathbb{R}^3$-র সদস্য।

যেকোনো integration-এর পিছনেই মূল ধারণা হল ছোটো ছোটো টুকরো করে প্রতিটা টুকরোতে কিছু approximation করা, তার পরে যোগ করে limit নেওয়া। এখানেও আমরা শুরু করব surface-টাকে ছোটো ছোটো টুকরো করে। আমরা প্রথমে ধরে নেব যেন $[a,b]\times[c,d]$-টা গ্রাফ কাগজের উপরে আঁকা আছে (Fig 82)। এবার যখন সেটাকে ভাসিয়ে তুলব (কোনো parametric form ব্যবহার করে, যার নাম দিলাম ধরো $\mathbf{x}(u,v)$), তখন গ্রাফ কাগজের লাইনগুলো surface-এর গায় জালের মত দেখাবে (Fig 83)। গ্রাফের ছোটো ছোটো rectangle-গুলো surface-টার গায় কতকটা parallelogram-এর মতো দেখাবে। এদেরকে বর্ণনা করার একটা কায়দা আছে। সেটা বোঝার জন্য গ্রাফ কাগজের একটা ছোটো rectangle এবং তা থেকে পাওয়া parallelogram-এর মত জিনিসটা বড় করে দেখা যাক (Fig 84)। এখানে rectangle-টার AB বাহু থেকে PQ এসেছে। AB বরাবর $v=5$ স্থির আছে, খালি u বদলাচ্ছে। তাই PQ হল আসলে $\mathbf{x}(u,5)$-এর গ্রাফ। এবার আমরা জানি যে খুব অল্প একটু জায়গা ধরে দেখলে একটা curve-কে সোজা বলে মনে হয়, এবং সেই সোজা লাইনটাই হল সেখানে curve-টার tangent. এখানে tangent-এর slope হল $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$. আমরা partial derivative নিলাম, কারণ v স্থির থাকছে। এখানে A থেকে B পর্যন্ত u বেড়েছে δu পরিমাণ। তাই tangent বরাবর গেলে আমরা সরছি প্রায় $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\delta u$. অর্থাৎ কিনা--

$$PQ \approx \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\delta u.$$

একইভাবে AD থেকে আসছে PS. সেটা হবে মোটামুটিভাবে-- $PS \approx \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\delta v$. একটা parallelogram-এর দুটো বাহু জানা

Fig 84



থাকলে তার area বার করে দেওয়ার কায়দা তো Fig 81 থেকে জানিই--

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| \delta u \delta v.$$

মনে রেখো আমাদের উদ্দেশ্য area বার করা নয়, mass বার করা। তাই density দিয়ে গুণ করতে হবে। এদিকে density-টা বিভিন্ন জায়গায় বিভিন্ন। ধরো $\mathbf{x}(u, v)$ বিন্দুতে density হল $f(\mathbf{x}(u, v))$. যেহেতু আমাদের parallelogram-টা খুবই ছোটো, তাই ওর density সর্বত্রই সমান ধরে নেওয়া যায়। অতএব এই parallelogram-এর mass-টা হবে

$$f(\mathbf{x}(u, v))\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| \delta u \delta v.$$

এই একই যুক্তি আমরা খাটাব প্রতিটা parallelogram-এর বেলাতেই, এবং সবগুলো যোগ করে limit লাগাব। অতএব পাব

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(\mathbf{x}(u, v))\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| du dv.$$

এইটাই ছিল scalar field-এর surface integral-এর ম্যাজিক সংজ্ঞা।

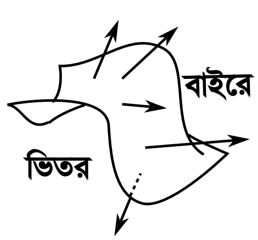
43.4.2 Vector field-এর বেলায়

এবার আমরা শুরু করছি $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে একটা surface নিয়ে, E, আর একটা vector field নিয়ে, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. ছবি দিয়ে বোঝার জন্য Fig 85-এর দিকে চোখ রাখো। ঠিক যেন জলপ্রপাতের জল যেখানে আছড়ে চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়ছে, সেখানে এক জেলে তার জাল ছুঁড়ে দিয়েছে। বিভিন্ন বিন্দুতে জলকণাদের linear velocity হল $\mathbf{f}$, যেগুলোকে তীর চিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি। আর জালটা হল E. এর এক পাশকে আমরা <u>ভিতরের</u> দিক, আর অন্য পাশটাকে আমরা <u>বাইরের</u> দিক বলেছি। এবার E-এর প্রতিটা বিন্দুতে আমরা একটা unit outward normal কল্পনা করব। এইটাকেই $\mathbf{n}$ বলব। তাহলে প্রতিটা বিন্দুতে এখন এক জোড়া করে তীর চিহ্ন রয়েছে--এক, ওই বিন্দুতে জলের linear velocity, এবং দুই, এই normal-টা। এবার ওই normal বরাবর velocity-টার component নিতে হবে। ব্যাপারটা একটা বিন্দুর জন্য আলাদা করে দেখিয়েছি Fig 86-এ। কোনো unit vector বরাবর component নেওয়া মানে খালি dot product নেওয়া। গুছিয়ে বললে, এই component-এর signed length হল $\mathbf{f} \bullet \mathbf{n}$. এখানে "signed" বললাম, কারণ যদি component-টার মুখ বাইরের দিকে হয়, তবে চিহ্নটা প্লাস হবে, আর ভিতরের দিকে হলে মাইনাস। বোঝার জন্য Fig 87 দেখে নাও। এবার তাহলে surface-টার প্রতিটা বিন্দুতে একটা করে real number পেলে, অর্থাৎ $\mathbf{f} \bullet \mathbf{n}$ হল E-এর উপর একটা real-valued function. এবার এর (scalar) surface integral বার করো, মানে $\iint_E \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, dS$. এই জিনিসটার সংজ্ঞা তো আমরা জানিই--

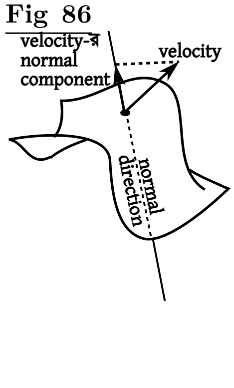
$$\iint_E \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\| du dv.$$

এইবার একটা বড়রকমের কাটাকাটি হতে চলেছে। আমরা আগেই বলেছিলাম যে $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ হবে surface-টার সঙ্গে normal.

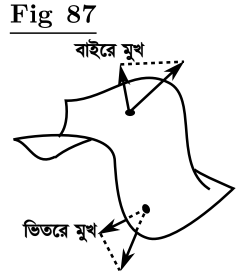
<u>Fig 85</u>



<u>Fig 86</u>



<u>Fig 87</u>



ধরো[5] outward normal. এ থেকে unit outward normal পাব এইভাবে--

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|}.$$

এইবার যখন তুমি surface integral-টা বার করবে, তখন এই $\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|$-টা কাটাকাটি হয়ে গিয়ে পড়ে থাকবে--

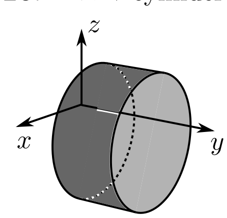
$$\iint_E \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iint_E \mathbf{f} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv.$$

এইটাই ছিল vector field-এর surface integral-এর সংজ্ঞা।

Answers

1. **(1)** $4\sqrt{2}$. **(2)** $-4\sqrt{2}$. **(3)** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. সাবধান, উত্তরটা 0 নয় কিন্তু। মনে রেখো $\sqrt{t^2} = |t|$. **(4)** $\frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)$.

2. **(1)** $6\sqrt{3}$. **(2)** $\sqrt{3} - \frac{(e^4+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$. **(3)** 0. **(4)** $-2\sqrt{2}\pi$. **3.** (A). **4.** **(1)** $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **(2)** 2. **(3)** $\frac{(16\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12} - \frac{1}{12}$. **(4)** $\sqrt{2}\log 2$. **5.** $\int_1^0 x(1-x)\sqrt{2}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{6}$. **6.** -9. **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\cos t\, dt = \cdots = -1$. **8.** -2. **9.** **(1)** $\int_0^1 (t+t) - (t-t)\, dt = 1$. **(2)** $\int_{-1}^1 t - t^2(2t)\, dt = 2.$. **10.** **(1)** $\int_0^{2\pi} (-3) \times 2\, dt = -12\pi$. **(2)** $\int_0^1 \sum_{i=1}^n it \times i\, dt = \cdots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. **11.** $-2 + 0 = -2$. **12.** $\int_0^1 2t + 3t^6 \times 3t^2\, dt = 2$. **13.** C_1 বরাবর $\int_0^1 e^t\, dt = e - 1$. ওদিকে C_2 বরাবর $\int_0^1 \cos(2\pi t)(-2\pi \sin(2\pi t)) + \sin^2(2\pi t)(2\pi \cos(2\pi t) + e^t\, dt = \cdots = e - 1$. দুই ক্ষেত্রেই একই উত্তর আসছে। **15.** আগের অংকের curve-টা বরাবর গেলেই হবে, খালি উল্টোদিকে। তাই উত্তর হবে -1. **16.** যেখানে শুরু সেখানেই শেষ। সুবিধাজনক curve হল যেটা আদৌ ওই বিন্দু থেকে নড়েই না। এর parametric form হল $(x(t), y(t)) \equiv (1, 0)$. সেক্ষেত্রে তো integral-টা 0. অতএব path independence-এর দৌলতে এখানেও শূন্যই উত্তর হবে! **17.** (A),(B),(C) সঠিক, (D) ভুল। **18.** প্রথম ক্ষেত্রে v^2. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে u^2, আর তৃতীয় ক্ষেত্রে $\sin u$. **19.** $x(u,v) = u,\ y(u,v) = v$ এবং $z(u,v) = u^2 + v^2$, যেখানে $(u,v) \in [-1,1] \times [0,1]$. **20.** একটা cylinder,



যার axis-টা y-axis-এর সঙ্গে parallel. এর radius হল 1. এর গা-টা y-axis-কে ছুঁয়ে আছে।
21. $4\pi a^2$. **21.** (A) এবং (D). **22.** Area-টা হবে $2\pi \int_0^4 r\sqrt{1 + \frac{r^2}{9}}\, dr = \cdots = 2\pi \times \frac{98}{9} \in (20\pi, 22\pi]$. তাই উত্তর হবে (A). **23.** $3\sqrt{15}$. **24.** Curved surface-এর area হবে $A = 2 \times 2 \times \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ এবং একেক প্রান্তের area হবে $B = \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx$. সুতরাং উত্তর হবে $A + 2B$. এখানে integration-গুলো লক্ষ্মীটি তুমিই করে

[5] যদি ভিতরের দিকে মুখ করে থাকে, তবে এর আগে একটা মাইনাস লাগিয়ে নিলেই সেটা বাইরের দিকে মুখ করবে।

নিও। আমি করতে গেলেই ভুল করে ফেলব! **25.** Surface area হবে

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(\theta - \sin\theta)\sqrt{\left(a(1-\cos\theta)\right)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \cdots \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (\theta - \sin\theta)\sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \\ &\qquad \text{এবার } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx \text{ লাগাবো--} \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (2\pi - \theta + \sin\theta)\sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \\ &= 4\sqrt{2}\pi^2 a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta - S. \end{aligned}$$

তাই $S = 2\sqrt{2}\pi^2 a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$. এবার $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ব্যবহার করো। Surface area-টা পাবে $16\pi^2 a^2$. **26.** (C). **27.** $2\pi r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **29.** $(\cos u, \sin u, 0)$. **30.** এবার উত্তর হল $(-\cos u, -\sin u, 0)$, মানে আগেরবারের normal-টারই মুখটা খালি উল্টে গেল। **32.** 2π.

Chapter VIII
Divergence, Green এবং Stokes theorem

DAY 44
Divergence theorem (part 1)

44.1 গোড়ার কথা

আমার বয়স তো কত উঠল, কত নামল, আবার উঠল, আবার নামল, এখন আমার বয়স হয়েছে তেরো।

--হ য ব র ল (সুকুমার রায়)

মনে করো একটা মস্ত বাড়ি আছে, তার মধ্যে অনেকগুলো ঘর। ম্যাপের মত করে বাড়িটার নক্সা দেখিয়েছি Fig 1-এ। এক ঘর থেকে অন্য ঘরে যাবার বহু দরজা আছে। তা দিয়ে লোকজন হরদম এঘর ওঘর করছে। গত এক ঘন্টায় প্রতিটা দরজা দিয়ে কতজন লোক কোন্‌দিকে গেছে, সেটা তীর চিহ্নের পাশে সংখ্যা দিয়ে দেখানো আছে। এ থেকে সেই এক ঘন্টায় বিভিন্ন ঘরে লোকসংখ্যা কত বেড়েছে বা কমেছে, সেটার হিসেব তুমি পেয়ে যাবে। যেমন, একেবারে বাঁদিকের পঞ্চভুজের মত ঘরটা দ্যাখো। ওর তিনটে দরজা। তার মধ্যে সবচেয়ে বাঁদিকেরটা দিয়ে ঢুকেছে 1, বেরিয়েছে 4. তার মানে ওই দরজা দিয়ে লোকসংখ্যা কমেছে মোট $4-1=3$. একইভাবে বাকি দুটো দরজা দিয়ে লোকসংখ্যা কমেছে $9-2=7$ এবং $5-2=3$. সুতরাং সব মিলিয়ে লোকসংখ্যা কমল $3+7+3=13$. এটাকে উল্টে বলতে পারি লোকসংখ্যা বেড়েছে -13.

Example 1: এইভাবে প্রত্যেকটা ঘরের জন্য লোকসংখ্যাবৃদ্ধি বার করে যদি সব যোগ করে দেওয়া যায়, বলো তো উত্তরটা কী হবে? একটা কায়দা তো বুঝতেই পারছ-- ধরে ধরে প্রত্যেকটা ঘরের জন্য লোকসংখ্যাবৃদ্ধি বার করে সেগুলোকে যোগ করা। কিন্তু উত্তরটা অতি সহজেই চোখে দেখেই বলে দেওয়া যায়। কী করে বলো তো! নিজে প্রথমে চেষ্টা করে দ্যাখো। নইলে মজা পাবে না।

SOLUTION: কায়দাটা হল এটা লক্ষ করা যে, প্রতিটা দরজাই তুমি দুবার করে হিসেবে নিচ্ছ--একবার এদিক থেকে, আরেকবার ওদিক থেকে। এদিক থেকে যতজন বেরিয়ে যাচ্ছে বলে মনে হচ্ছে, ওদিক থেকে আবার তাদেরকেই ঢুকছে বলে মনে হবে (Fig 2)। সুতরাং যোগ করলে সেগুলো কাটাকাটি হয়ে যাবে। এই নিয়মের ব্যতিক্রম কেবল সেই দরজাগুলো,

Fig 1

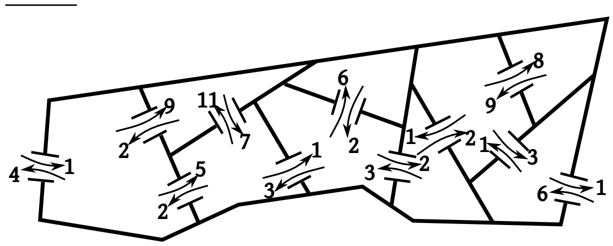
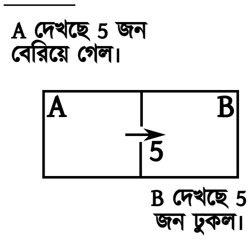


Fig 2



যেগুলো বাড়ির একেবারে বাইরে নিয়ে যায়। সেই দরজাগুলো খালি একবার করেই হিসেবে নেওয়া হয়েছে। এরকম দরজা আছে খালি দুটো, সবচেয়ে বাঁদিকে, আর সবচেয়ে ডানদিকে। সুতরাং হিসেবটুকু খালি তাদের নিয়ে করলেই হবে। সবচেয়ে বাঁদিকের দরজাটার বেলায় $-4+1=-3$ এবং সবচেয়ে ডানদিকেরটার ক্ষেত্রে $-1+6=5$. সুতরাং সব মিলিয়ে উত্তর দাঁড়াল $-3+5=2$. ■

এই অধ্যায়টা পুরোই এই ধারণাটার উপরে দাঁড়িয়ে আছে--

> গায় গায় লেগে থাকা অনেকগুলো জিনিসের মধ্যে কিছু একটা নড়াচড়া চলছে, তাদের মোট প্রভাব বার করতে গেলে এটা প্রায়ই হয় যে, ভিতরের নড়াচড়াগুলো নিজেদের মধ্যে কাটাকাটি হয়ে যায়, তাই খালি একেবারে বাইরের প্রান্তগুলো নিয়ে মাথা ঘামালেই চলে।

এই ব্যাপারটা আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতেও দেখেছিলাম। একটু মনে করে নিই। ধরো $a_0, a_1, ..., a_{100}$ হল কিছু সংখ্যা। এদের ব্যবহার করে আমরা $b_1, ..., b_{100}$ বানাচ্ছি এইভাবে--

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_0 \\ b_2 &= a_2 - a_1 \\ &\vdots \\ b_{100} &= a_{100} - a_{99} \end{aligned}$$

মানে এক কথায় বলতে গেলে

$$b_i = a_i - a_{i-1}.$$

তবে চট্ করে বলতে পারো $\sum_1^{100} b_i$ কত হবে? পুরোটাকে a_i ব্যবহার করে লিখলেই হবে

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{100} - a_{99}).$$

এটা দেখে প্রথমে মনে হতে পারে যেন অনেক যোগবিয়োগ করতে হবে। কিন্তু এটা হল আসলে যাকে বলে একটা **telescopic sum,** ভিতরের a_i-গুলো সব দুবার করে এসেছে, একবার প্লাস একবার মাইনাস। তাই ওরা কাটাকাটি হয়ে যাবে। পড়ে থাকবে খালি দুই প্রান্তের দুজন। সুতরাং উত্তর হবে $a_{100} - a_0$.

> *থাকত দুটো আস্ত বেড়াল, রইল দুটো ল্যাজের ডগা।*
>
> --সুকুমার রায়

এই ব্যাপারটা আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে মাঝেমাঝেই ব্যবহার করতাম। এর একটা বিশেষ প্রয়োগ আছে, যেটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সেটার কথা একটু বলে নিই। ধরো আমাদের কাছে একটা function আছে, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. আমরা $[a, b]$-কে সমান n-টা ভাগে ভাগ করে একটা partition বানাব (Fig 3)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Fig 3

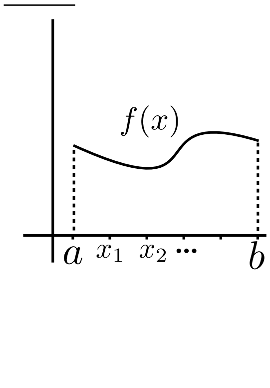
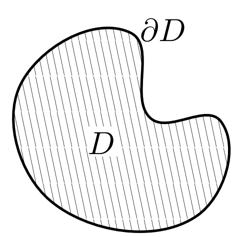


Fig 4



এবার এই telescopic sum-টাকে দ্যাখো--

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

এখানে $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. এই $\frac{b-a}{n}$-কে δx নাম দেওয়া যাক। তবে sum-টাকে এভাবেও লেখা যায়--

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\delta x}\delta x = f(b) - f(a).$$

এবার যদি $n \to \infty$ করো, তবে $\delta x \to 0$ হবে, আর তাই $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\delta x}$-এর limit-কে f-এর derivative, মানে f' দিয়ে লেখা যাবে। ফলে পুরো sum-টা যাবে এই integral-টার দিকে[1]--

$$\int_a^b f'(x)\,dx.$$

এবং এ থেকেই আসে

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

মূল ধারণাটা এখানেও সেই একই, ভিতরের জিনিসগুলো কাটাকাটি হয়ে পড়ে রইল খালি প্রান্তটুকু। এই ধারণাটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। ক্যালকুলাসেও তাই এটাকে **fundamental theorem of calculus** নামে সম্মান জানানো হয়েছে। বস্তুতঃ, যারা হায়ার সেকণ্ডারীতে ক্যালকুলাস খুব ভালো করে নাও পড়ে, তারাও আবছাআবছা মনে রাখে যে, differentiation হল integration-এর উল্টো একটা জিনিস।
"ছোটো ছোটো জিনিস সব ভিতরে ভিতরে কাটাকাটি হয়ে খালি শেষ প্রান্তগুলো পড়ে থাকা"-র ধারণাটার এখানেই ইতি নয়। এই একই ধারণা থেকে আরো গুরুত্বপূর্ণ সব theorem আসে। তাদের মধ্যে কয়েকটা এই অধ্যায়ে আলোচনা করব। একটু আগে ঘরের মধ্যে লোকচলাচলের যে উদাহরণটা দিলাম, সেইটা থেকে আসে একটা বিখ্যাত theorem, যার নাম **divergence theorem**. আজকে আমরা এটা নিয়েই আলোচনা করব। একই ধারণার আরেকটা প্রয়োগ দেখব কালকে, সেখান থেকে আরো দুটো theorem আসবে।

44.2 Divergence theorem-এর প্রস্তুতি

আমরা ঘরের উদাহরণটায় প্রতিটা ঘর থেকে একটা নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কত লোক বেরোচ্ছে, সেটা দেখছিলাম। এটাকে মনে করা যেতে পারে যেন লোক বেরোনোর হার। কোনো কোনো ঘর থেকে প্রচুর লোকজন বেরিয়ে যাচ্ছে, হয়তো সেখানে সিনেমার শো ভেঙেছে, কোথাও আবার লোকে হুড়মুড়িয়ে ঢুকছে কিন্তু বেরোচ্ছে কমই (বোধহয় রেস্টুর‍্যান্ট, যেখানে বিষমেশানো খাবার দেওয়া হয়)। এই সব যোগ করে দিলে পাওয়া যাচ্ছে পুরো বাড়িটা থেকে মোট কত লোক বেরোচ্ছে। তা, যদি ঘরগুলোকে খুব খুব ছোটো করে আনি, তবে সেগুলোকে প্রায় এককেটা বিন্দু বলে ভাবা যায়। আর লোকগুলোকে জলকণা বলে ভাবলে, গল্পটা ঠিক divergence-এর মত শোনাচ্ছে, না? সুতরাং প্রতিটা বিন্দুর divergence যোগ করে গেলে boundary পেরিয়ে কত জল বেরোবে, তার হদিশ পাওয়া যাবে। অবশ্য বিন্দু তো আর একটা দুটো নয়, অসংখ্য। তাই সাধারণ যোগে কাজ চলবে না, integration লাগবে। এই আন্দাজটুকুর ভিত্তিতে আমরা এরকম একটা theorem কল্পনা করতে পারছি--

> $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে খানিকটা জায়গা ঘিরে দেওয়া যাক (Fig 4)। নাম দিয়েছি D. এর যে boundary-টা, সেটাকে লিখে বোঝানোর জন্য একটা notation আছে[2], ∂D. এবার একটা function নেওয়া যাক $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. তবে আন্দাজ করছি যে
>
> $$\iint_D \mathrm{div}(\mathbf{f})\,dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\,d\ell,$$

[1] অবশ্য এর জন্য কিছু শর্ত লাগবে-- এক, f-টাকে differentiable হতে হবে, এবং দুই, $f'(x)$-কে $[a,b]$-র উপর integrable হতে হবে।

[2] ওই ∂ চিহ্ন থেকে যেন ভেবে বোসো না যে এর সঙ্গে partial derivative-এর কোনো সম্পর্ক আছে!

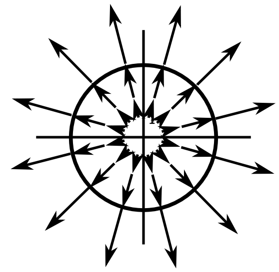


Fig 5

যেখানে **n** হল ∂D-এর outward normal. এটা কী করে আন্দাজ করলাম বুঝলে তো? বাঁদিকটা হল D-এর মধ্যেকার সব বিন্দুর divergence-এর সম্মিলিত প্রভাব। ডানদিকটা বলছে boundary দিয়ে কত জল বেরোচ্ছে।

সত্যিই এটা হয় কিনা একটা সহজ দেখে উদাহরণ নিয়ে পরীক্ষা করা যাক।

Example 2: ধরো $D = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 1\}$ এবং $\mathbf{f}(x,y) = (x,y)$. তবে $\iint_D \operatorname{div}(\mathbf{f})\,dxdy$ আর $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\,d\ell$ দুটোই বার করে দ্যাখো, সমান হচ্ছে কিনা।

SOLUTION: প্রথমে বুঝে নাও যে ছবিটা Fig 5-এর মত । ওই গোলটা হল D (বা বলা উচিত গোলের পরিধি এবং ভিতরটা সবটা মিলে D)। পরিধিটুকু ∂D. আর ওই যে বোমা ফাটার মত করে একরাশ তীর চিহ্ন রয়েছে, ওরা হল $\mathbf{f}(x,y)$ বোঝানোর জন্য। যে কোনো বিন্দু (x,y)-তে যদি ফের (x,y) মাপের একটা তীর চিহ্ন আঁকো, তবে তীর চিহ্নটা origin-এর উল্টো দিকে যাবে, এবং origin থেকে যত দূরে ততই বড় হবে।
এখানে $\mathbf{f}(x,y)$-এর দুটো component হচ্ছে $f_1(x,y) = x$ আর $f_2(x,y) = y$. অতএব--

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2.$$

সুতরাং $\iint_D \operatorname{div}(\mathbf{f})\,dxdy = 2\iint_D dxdy = 2 \times \operatorname{area}(D) = 2\pi$.
এই গেল একটা দিক। এবার অন্য দিকটা দেখা যাক। এখানে--

$$\partial D = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 = 1\},$$

যার একটা parametrisation হল $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$, যেখানে $t \in [0, 2\pi)$. এর normal vector হচ্ছে $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$. এটা দুভাবে দেখা যায়--এক, কোনো circle-এর বেলায় normal থাকে radius বরাবর। আর দুই, normal-এর ফর্মুলা $\big(y'(t), -x'(t)\big)$ ব্যবহার করে।
যেভাবেই করো, শেষ পর্যন্ত হচ্ছে--

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\,d\ell = \int_0^{2\pi} \big(x(t), y(t)\big) \bullet (\cos t, \sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t) \bullet (\cos t, \sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi,$$

ঠিক যেটা আমরা আগেই পেয়েছিলাম। ■

হুমম..., এই উদাহরণে অন্ততঃ আমাদের আন্দাজটা খেটে গেল। আরেকটা উদাহরণ নিয়ে দেখি।

Example 3: এবারও সেই একই D নেব কিন্তু $\mathbf{f}$-টা এবার নেব $\mathbf{f}(x,y) = (-y, x)$. এক্ষেত্রে আমাদের আন্দাজটা খাটে কিনা সেটা অংক কষেও দ্যাখো, এবং ছবি এঁকেও দ্যাখো।

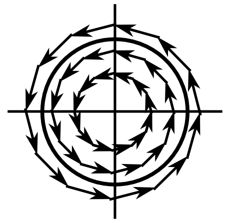


Fig 6

SOLUTION: এখানে ছবিটা Fig 6-এর মত। তীরগুলোর অভিমুখ দেখেই বুঝতে পারছ এখানে জলের মধ্যে ঘুর্ণি রয়েছে, জলকণাগুলো গোলটার গা ঘেঁসে খালি পাক খাচ্ছে, বেরিয়ে যাচ্ছে না। তাই line integral-টার শূন্য হওয়া উচিত। অংক কষে দেখি, তাই পাওয়া যাচ্ছে কিনা। এখানে $\mathbf{f}(x, y)$-এর component দুটো হল

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= -y \\ f_2(x, y) &= x. \end{aligned}$$

সুতরাং divergence হবে

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

অতএব $\iint_D \operatorname{div}(\mathbf{f})\, dxdy = 0$. এবার অন্য দিকটা। আগের অংকের মতই ∂D হল unit circle-টা। তার এই parametrisation-টা নেব, $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$ যেখানে $t \in [0, 2\pi)$. এর outward normal যে $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$, সে তো আমরা আগেই দেখেছি। সুতরাং--

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, d\ell = \int_0^{2\pi} \big(-y(t), x(t)\big) \bullet (\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \bullet (\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$

সুতরাং এখানেও আমাদের অনুমানটা মিলে গেল। ■

আসলে আমাদের অনুমান সত্যিই সব সময়ে খাটবে, যদি না set-টা খুব বিচ্ছিরি কিছু হয়। ভয় নেই, আমরা মোটেই বিচ্ছিরি set-দের নিয়ে কাজ করব না, আমরা কাজ করব খালি খুব ভদ্রসভ্য মিষ্টি মিষ্টি দেখতে set-দের নিয়ে। এবার সেটাই অংকের ভাষায় প্রকাশ করব।

44.3 অংকের ভাষায়

আমাদের অনুমানটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করলে পাওয়া যায় এই গুরুত্বপূর্ণ theorem-টা--

Divergence theorem (for $\mathbb{R}^2$)

Let $V \subseteq \mathbb{R}^2$ be a regular, closed set with boundary ∂V, which is made of one or more piecewise smooth, simple, closed curves. Then, for a continuously differentiable vector field f, we have

$$\iint_V \operatorname{div}(\mathbf{f})\, dxdy = \oint_{\partial V} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, d\ell.$$

Here $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to ∂V.

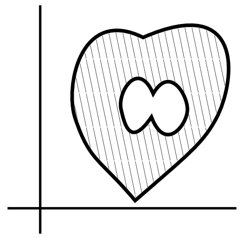


Fig 7

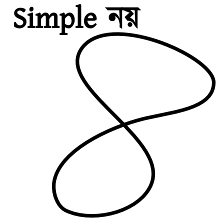


Fig 8

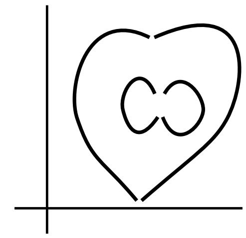


Fig 9

এই খটোমটো চেহারাটা দেখলে ঘুণাক্ষরেও সন্দেহ হয় না যে, সহজ বুদ্ধিতে ঘরের মধ্যে লোকচলাচলের উদাহরণ দিয়ে যা বুঝেছিলাম, এটা সেটাই! খটোমটো জিনিসগুলোর সঙ্গে একে একে বন্ধুত্ব করে নেওয়া যাক।

- ওই যে লিখেছি "regular set", ওটারই মানে হল মিষ্টি মিষ্টি set. তার সম্পূর্ণ সংজ্ঞাটা এক্ষুণি দেখলে তোমার ডায়াবেটিস হয়ে যেতে পারে, এই ভয়ে ওটা একটু পরে দিয়েছি।

- Closed set মানে তো জানোই, সেই প্রথম অধ্যায়েই শিখেছিলে। এরকম set-এর boundary-টা পুরোটাই set-এর অন্তর্ভুক্ত হয়।

- আরো বলেছে যে, boundary-টা এক বা একাধিক piecewise smooth, simple closed curve দিয়ে তৈরী। যেমন ধরো Fig 7-এর set-টা। এটার boundary-টা দুটো টুকরো জুড়ে তৈরী, বাইরের হার্টটা আর ভিতরের আপেলটা। দুটোই simple (অর্থাৎ Fig 8-এর মত নিজেই নিজেকে ছেদ করে নি), এবং closed curve (অর্থাৎ যেখানে শুরু সেখানেই শেষ, একটা পুরো loop, কোনো প্রান্ত ঝুলে নেই)। কিন্তু boundary-তে এখানে সেখানে কয়েকটা খোঁচ আছে, কিন্তু তাদের সংখ্যা finite, সেই খোঁচগুলোতে ভেঙে ফেললে যে টুকরোগুলো পাবে (Fig 9), তারা সকলেই smooth. এই জন্যেই বলেছে piecewise smooth.

- সাবধান, এখানে "closed" শব্দটা দুইক্ষেত্রে দুই অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। যখন closed set বলছে, সেটা প্রথম অধ্যায়ে যেরকম শিখেছিলাম সেই অর্থে। আবার যখন closed curve বলছে, তখন মানে হল curve-টা একটা loop-এর মত।

এই theorem-টা বহু বইতেই দেওয়া থাকে, এবং সর্বত্রই মোটামুটি একই কথা বলা থাকে। কিন্তু খুঁটিনাটি শর্তগুলো এককে বইতে এককেভাবে লেখে। তাই খুঁটিয়ে পড়তে গেলে, বিভিন্ন বইয়ের বয়ানের পার্থক্য দেখে ধাঁধা লেগে যাওয়া বিচিত্র নয়। এরকম ক্ষেত্রে যারা কোনো আন্তর্জাতিক মানের বিদেশী বইয়ের সাক্ষ্যের উপর নির্ভর করতে ভালোবাসো, তারা Adams and Essex-এর Calculus of Several Variables বইটা দেখে নিতে পারো। আমরা সেই বইটা অবলম্বনেই শর্তগুলো সাজিয়েছি। এতক্ষণ $\mathbb{R}^2$-র জন্য divergence theorem আলোচনা করলাম। $\mathbb{R}^3$-এর ক্ষেত্রেও ব্যাপারটা একইরকম--

Divergence theorem (for $\mathbb{R}^3$)

Let $V \subseteq \mathbb{R}^3$ be a regular, closed set, whose boundary is an oriented closed surface, ∂V. Let $\mathbf{f}$ be a continuously differentiable vector field. Then

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{f})\, dxdydz = \oiint_{\partial V} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, dS.$$

Here $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to ∂V.

এখানে আবার বেশ কয়েকটা খটোমটো জিনিস এসেছে। এগুলোর সঙ্গে আগেই আমাদের পরিচয় হয়েছে। আরেকবার মনে করিয়ে দিই--

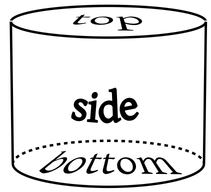


Fig 10

- Closed surface মানে হল দিব্যি বেলুনগোছের surface, যার কোনো কিনারা বলে কিছু নেই। একটা ফুটবলের গা-টা closed surface, কিন্তু একটা বাটি মোটেই closed surface নয়, কারণ ওর কিনারা আছে।
- Oriented surface-রা হচ্ছে সেই সব surface, যাদের দুটো পাশকে আলাদা করা যায় (তা না হলে আমরা outward normal পেতাম না)। চট্ করে এমন surface কল্পনা করাই দুষ্কর, যেটা oriented নয় (আমরা গত অধ্যায়ে একটা উদাহরণ দিয়েছিলাম, Möbius surface.)

আমরা এই theorem-এর প্রমাণের মধ্যে যাব না। খালি একটা উদাহরণ নিয়ে দেখাব যে দুই দিক সত্যিই সমান হয়।

Example 4: Verify *Divergence Theorem* for $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.[5] **(2021.1d)**

SOLUTION: Cylinder-টা দেখিয়েছি Fig 10-এ। প্রথমে লিখে নিই কী দেখাতে হবে--

$$\iiint_V \text{div}(\mathbf{f})\, dxdydz = \oiint_{\partial V} \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, dS,$$

where V is the given region, with boundary ∂V.

চট্ করে শর্তগুলো উল্লেখ করে নিই একবার--

Clearly, V is a regular, closed set, whose boundary is an oriented closed surface, ∂V. Let $\mathbf{f}$ be a continuously differentiable vector field.

তুমি আপত্তি করে বলতেই পারো--আমরা এখনও regular set কাকে বলে তাই বলি না, অথচ কী করে "clearly" বুঝে ফেললাম যে V-টা একটা regular set হবে? ঠিক কথা, কিন্তু খানিক পরে যখন regular set-এর সংজ্ঞা শিখবে, তখন বুঝবে যে এখানে সত্যিই সেটা চোখে দেখেই বোঝা যায়। আর বাকী শর্তগুলো তো এখনই বুঝতে পারছ নিশ্চয়ই!

এবার তবে দেখানো শুরু করি। প্রথমে বাঁদিকটা--

Here $\text{div}(\vec{F}) = 4 - 4y + 2z$.

So

$$
\begin{aligned}
LHS &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\,dxdydz \\
&= \iint_R \left[\int_0^3 4-4y+2z\,dz\right] dxdy \quad [\text{ where } R=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}] \\
&= \iint_R 3(4-4y)+9\,dxdy
\end{aligned}
$$

এবার স্যাণ্ডউইচ-শিককাবাব লাগাব--

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 21-12y\,dxdy \\
&= 42\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy = \cdots = 84\pi.
\end{aligned}
$$

এবার ডানদিকটা, মানে $\oiint_{\partial V} \mathbf{f}\bullet\mathbf{n}\,dS$. এর জন্য আমাদের কাজ করতে হবে cylinder-টার surface নিয়ে। সেটাকে আমরা Fig 10-র মত করে তিনভাগে ভাগ করে নেব-- উপর, নীচ আর পাশ। এই তিনদিকের জন্য outward normal দেখিয়েছি Fig 11-এ।

$$RHS = \oiint_{\partial V} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS = \iint_{\text{top}} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS + \iint_{\text{bottom}} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS + \iint_{\text{side}} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS$$

Top: Here $\vec{n}=(0,0,1)$ and $z\equiv 3$. So $\vec{F}\bullet\vec{n}=z^2\equiv 9$.

Hence $\iint_{\text{top}} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS = 9\times\text{area(top)} = 36\pi$.

Bottom: Here $\vec{n}=(0,0,-1)$ and $z\equiv 0$. So $\vec{F}\bullet\vec{n}=z^2\equiv 0$.

Hence $\iint_{\text{bottom}} \vec{F}\bullet\vec{n}\,dS = 0$.

Side: Here a parametrisation is $(2\cos\theta, 2\sin\theta, z)$ for $\theta\in[0,2\pi)$ and $z\in[0,3]$.
Also, an outward normal is $(x,y,0)=(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$.

এইটা কী করে পেলাম? মনে রেখো একটা circle-এর বেলায় normal থাকে radius- বরাবর। সেই তথ্যটা এখানে কী করে কাজে লাগবে, সেটা বুঝবে Fig 12 দেখলেই।

Fig 11

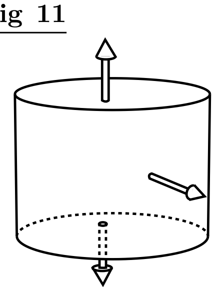
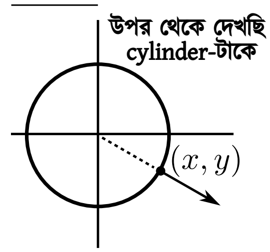


Fig 12



Hence

$$
\begin{aligned}
\iint_{\text{side}} \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (8\cos\theta, -8\sin^2\theta, z^2) \bullet (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)\, dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 16\cos^2\theta - 16\sin^3\theta\, dz d\theta \\
&= 48 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta - \sin^3\theta\, d\theta \\
&= \cdots = 48\pi.
\end{aligned}
$$

এবার উপর, নীচ, পাশ সব যোগ করে ফেলা যাক--

So $RHS = 36\pi + 0 + 48\pi = 84\pi = LHS$, as required.

■

DAY 45 Divergence theorem (part 2)

45.1 প্রয়োগ

Divergence theorem-এর সাহায্যে অনেক সময়ে শক্ত শক্ত integral বার করে দেওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় divergence theorem-টা লক্ষ করো। এর এক দিকে একটা triple integral এবং অন্য দিকে একটা surface integral. অনেক সময়ে এ দুটোর মধ্যে একটা বার করা সহজ, এবং অন্যটা বার করা কঠিন হয়। তখন কঠিন দিকটা বার করার জন্য খালি সহজ দিকটা বার করলেই চলে। প্রথমে কিছু উদাহরণ দেখাই যেখানে surface integral-টা বার করার চেয়ে triple integral-টা বার করা বেশী সহজ।

Example 5: Let $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2,\ x^2y,\ (x^2+y^2)z^2)$. Let S be the boundary of the cylinder

$$R = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2 \le 1,\ z \in [0,2]\}.$$

Find $\oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS$.

SOLUTION:

By divergence theorem, $\oiint_R \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iiint \text{div}\mathbf{F}\, dxdydz$.

Here $\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y^2 + x^2 + 2(x^2+y^2)z = (x^2+y^2)(1+2z)$.

যেহেতু এখানে cylinder নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই cylindrical coordinates ব্যবহার করলে সুবিধা হবে।

We shall substitute $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$. Then

$$\text{div}(\mathbf{f}) = r^2(1+2z).$$

Also the absolute value of Jacobian determinant is r.

এই Jacobian-এর absolute value-টা যে r হয়, সেটা এই বইতে আগেই তুমি করেছ। এখানে এটা standard result হিসেবে ব্যবহার করে দিলাম।

So

$$\begin{aligned}\iiint \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz &= \iiint r^3(1+2z)\,d\theta drdz\\ &= \int_0^2\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3(1+2z)\,d\theta drdz\\ &= 2\pi\int_0^2\int_0^1 r^3(1+2z)\,drdz\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2(1+2z)\,dz\\ &= 3\pi.\end{aligned}$$

So $\oiint_R \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dS = 3\pi$.

■

Example 6: The flux of $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j} + z^2\hat{k}$ along the outward normal, across the surface of the solid

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\}$$

is equal to

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

(JAM.2017.MCQ18)

SOLUTION: প্রথম কাজ হল solid-টা কীরকম দেখতে সেটা বোঝা। খালি যদি $0\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ বলত, তবে পেতাম একটা উত্তর গোলার্ধ, যার radius হল $\sqrt{2}$. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 13-এ। এর উপরে যখন $0\le x\le 1$ আর $0\le y\le 1$ শর্তটা চাপছে, তখন আমরা এর একটা অংশ কেটে নিচ্ছি (Fig 14)। এর surface-টা ঠিক উপাদেয় ঠেকছে না। তাই এখানে surface integral-টা সরাসরি না করে triple integral-টা বার করাই ভালো।

Fig 13

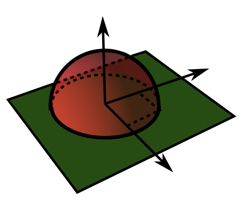
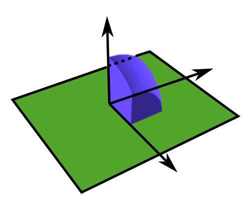


Fig 14



Here $\text{div}(\vec{F}) = 0 + 0 + 2z = 2z$.
Let the solid be E. Then

$$\begin{aligned}\iiint_E \text{div}(\vec{F})\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 2z\, dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2 - x^2 - y^2\, dydx \\ &= \int_0^1 2 - x^2 - \frac{1}{3}\, dx \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

So, by the divergence theorem, the required flux is

$$\oiint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\ dS = \iiint_E \text{div}(\vec{F})\, dxdydz = \frac{4}{3},$$

where S is the boundary surface of E.

যদি divergence theorem-এর ক্ষমতা সম্পর্কে তোমার মনে কিছুমাত্র সন্দেহ থেকে থাকে, তবে এই flux-টা তুমি সরাসরি surface integral দিয়ে বার করার চেষ্টা করো। ■

এবার তোমার করার জন্য একটা অংক।

Exercise 1: Let $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and S be the sphere given by $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$. If $\hat{n}$ is the unit outward normal to S, then

$$\frac{1}{\pi} \iint_S \vec{F} \bullet \hat{n}\, dS$$

is .... **(JAM.2020.NAT42)** ■

Exercise 2: Apply divergence theorem to evaluate $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\ dS$, where $\vec{F} = (x^2 - yz)\ \vec{i} + (y^2 - zx)\ \vec{j} + (z^2 - xy)\ \vec{k}$ and S is the surface of the rectangular parallelopiped $0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b,\ \ 0 \le z \le c$. Here $\vec{n}$ is the unit outward normal drawn to the surface S.[3] **(2021.12b)** ■

এবার উল্টোদিকের একটা অংক দেখাই। এখানে surface integral-টা বার করা সহজতর।

Example 7: Consider the loop

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \cos u, \\ z &= \sin 2u, \end{aligned}$$

for $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Use divergence theorem with $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ to find the volume of the solid obtained by rotating this loop around the z-axis.

SOLUTION: এখানে solid-টা কীরকম দেখতে সেটা নিয়ে মাথা ঘামানোর আগে divergence theorem-এর প্রয়োগ কী করে হবে সেটা বুঝে নাও। প্রথমেই লক্ষ করো $\mathrm{div}(\mathbf{F}) \equiv 1$. সুতরাং যদি solid-টাকে A বলি, তবে $\iiint_A \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dxdydz$ যে A-র volume সেটা বুঝতেই পারছ। এইটা সরাসরি বার করা সহজ নয়। তাই divergence theorem দিয়ে লিখব

$$\iiint_A \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = \iint_{\partial A} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS.$$

এই surface integral-টা বার করা অপেক্ষাকৃত সহজ হবে।

> Let the solid be called A. Since $\mathrm{div}(\mathbf{F}) \equiv 1$, hence volume of A is
>
> $$\iiint_A dxdydz = \iiint_A \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = \iint_{\partial A} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS,$$
>
> by divergence theorem.

এবার solid-টা কীরকম বোঝা যাক। প্রথমে যে loop-টা দিয়েছে, সেটা দেখতে Fig 15-এর মত। এটাকে z-axis বরাবর ঘোরালে হবে Fig 16-এর মত। এটা একটা টায়ারের মত জিনিস, এখানে টায়ারের ভিতরটাকে solid ধরে নিয়েছে।

> A parametrisation of ∂A is
>
> $$\begin{aligned} x &= \cos u \cos v, \\ y &= \cos u \sin v, \\ z &= \sin 2u, \end{aligned}$$
>
> for $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ and for $v \in [0, 2\pi]$.

এটা কী করে পেলাম? বোঝার জন্য Fig 17 দেখে নাও।

Fig 15

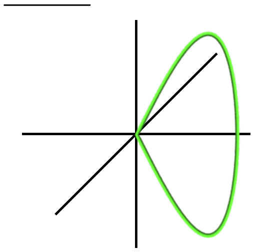


Fig 16

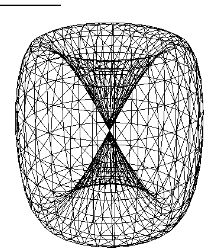
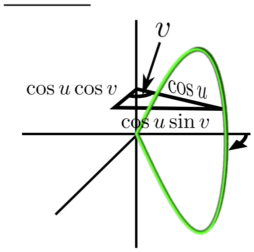


Fig 17



So

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \cdots$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \cdots$$

এখানে ডট্ ডট্ জায়গাগুলো তোমার বার করার জন্য রেখে দিলাম।

Thus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \cdots = -(2\cos u\cos 2u\cos v, 2\cos u\cos 2u\sin v, \cos u\sin u).$$

একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, এটা ভিতরের দিকে মুখ করে আছে। আমাদের দরকার outward normal, তাই এর আগের মাইনাসটাকে বাদ দিয়ে নেব।

So

$$\iint_{\partial A} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2u\cos u\sin u\, dudv = \cdots = \frac{\pi^2}{2},$$

which is the required volume.

■

Exercise 3: Find the volume of the solid generated by revolving the cycloid

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1-\cos\theta)$$

about the line $y = 0$.[3] **(2006.10b)**
HINT: আগের অংকের মতই এগোও। ■

Exercise 4: Let $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ and define $u(x, y, z) = \sin\left((1-x^2-y^2-z^2)^2\right)$ for $(x, y, z) \in B$. Then the value of

$$\iiint_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz$$

is ... . **(JAM.2021.NAT43)**
HINT:
এখানে যেটাকে integrate করতে দিয়েছে তাকে বলে u-এর **Laplacian**. এই জিনিসটার বিভিন্ন প্রয়োগ আছে physics-এ। একটু লক্ষ করলে দেখবে Laplacian-কে divergence এবং grad দিয়ে লেখা যায়। প্রথমে u-এর grad নাও, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$. এবার যদি এর divergence নাও, তবে পাবে

$$\text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

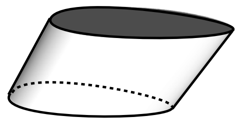


Fig 18

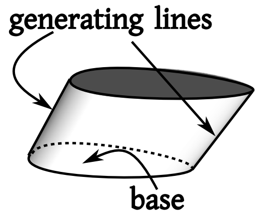


Fig 19

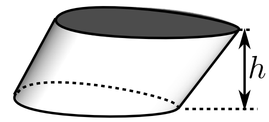


Fig 20

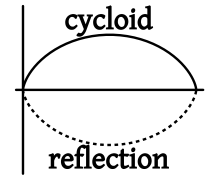


Fig 21

মানে Laplacian. সুতরাং আমাদের অংকে একটা divergence-এর triple integral বার করতে বলেছে। সুতরাং divergence theorem লাগানোর সুযোগ রয়েছে। এগিয়ে পড়। অংকটা কিন্তু খুবই সহজে হবে।
■

এবারের অংকটা সামান্য অন্যরকম।

Exercise 5: Find the volume of the cylinder of height h with its generating lines parallel to the z-axis and having as its base one arch of $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, together with its reflection about the x-axis.[5] **(2009.10bii)**

HINT: এই অংকের ভাষাটা বেজায় খটোমটো। প্রথমে সেটা বোঝা যাক।

আমরা **cylinder** বলতে স্কুলে যা বুঝতাম তার থেকে খানিকটা general রূপ শিখেছিলাম গত অধ্যায়ে, যেখানে তলাটা পুরো গোল না হয়ে আঁকাবাঁকা হতে পারত। কিন্তু সেখানেও দেওয়ালটাকে আমরা খাড়া রাখছিলাম। কিন্তু এখানে আমরা cylinder শব্দটা আরো general অর্থে Fig 18-এর মত জিনিসকে বোঝাতেও ব্যবহার করব, যাদের দেওয়ালটাও হেলানো হতে পারে। এদের বর্ণনা করার জন্য যথারীতি একটা loop নিয়ে শুরু করতে হয়। তারপর তার কোনো বিন্দু দিয়ে একটা লাইন টানা হয়। এবার সেই লাইনটাকে একইভাবে হেলিয়ে রেখে পুরো loop বরাবর ঘোরানো হয়। ফলে যে 3D জিনিসটা পাওয়া যায়, সেটাকে বলে একটা cylinder. যে loop দিয়ে ঘেরা অঞ্চলটা নিয়ে শুরু করেছিলে, তাকে বলে base, আর লাইনটাকে বলে **generating line**. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 19-এ। এইরকম যেকোনো cylinder-এর ফর্মুলা হয়--

volume = base-এর area × খাড়া উচ্চতা।

খাড়া উচ্চতা বলতে কী বোঝাচ্ছি সেটা Fig 20 দেখলেই বুঝবে।

এই অংকে base-টা নিয়েছে cycloid-টার একটা arch এবং তার reflection. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 21-এ। এটা শোয়ানো আছে xy-plane-এ, আর generating line-রা রয়েছে z-axis-এর সঙ্গে সমান্তরালভাবে, মানে খাড়াভাবে। সুতরাং এই আকারের একটা বাগানের চারপাশে খাড়া খাড়া খুঁটি পুঁতে বেড়া দিলে যেমন দেখাবে, আমাদের cylinder-টাও দেখতে সেরকম হবে।

এরকম cylinder-এর volume পাওয়া যায় base-এর area-কে উচ্চতা দিয়ে গুণ করে। এবার প্রশ্ন হল base-এর area কী করে বার করা যায়। যেহেতু base-টা x-axis-এর উপরে-নীচে symmetric, তাই খালি উপরের area বার করে তার দ্বিগুণ নিলেই হবে। কিন্তু cycloid-টাকে parametric form-এ দিয়েছে, y-কে x-এর function হিসেবে নয়, তাই সাধারণ integration-এর কায়দাটা খাটছে না। এখানে তুমি divergence theorem লাগাতে পারো। একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। প্রথমে $\mathbf{f}(x, y) = (x, 0)$ নাও। এটা এমন একটা function, যার divergence হল 1. তাই $\iint \operatorname{div}(\mathbf{f})\, dxdy$ বার করা মানে area বার করা। Divergence theorem লাগাচ্ছি Fig 21-এর উপরের অর্ধেকে, যার boundary-র দুটো অংশ, horizontal মেঝে, এবং ধনুকের মত বাঁকানো ছাদ। একটু কষলেই দেখবে মেঝে বরাবর $\int \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, d\ell = 0$ হচ্ছে। সুতরাং খালি ছাদ বরাবর line integral-টা বার করলেই হবে।
■

45.2 সখী, regular কারে কয়?

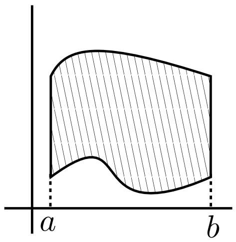


Fig 22

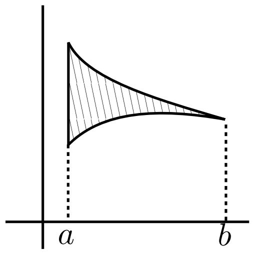


Fig 23

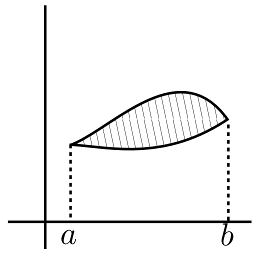


Fig 24

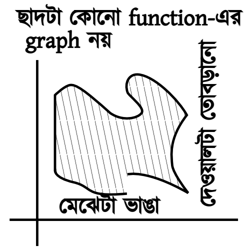


Fig 25

এই অধ্যায়ে আমরা খালি মিষ্টি মিষ্টি set-দের নিয়ে কাজ করছি, অংকের পোশাকি ভাষায় যাদের নাম হল regular set. এদের সংজ্ঞা কিন্তু আমরা এখনো আলোচনা করি নি। এবার সেটা করব। এই অংশটা চাইলে হাল্কা করে চোখ বুলিয়ে ছেড়ে দিতে পারো।
ওই একটা শব্দ "regular"-এর মধ্যে একগুচ্ছ শর্ত লুকিয়ে আছে।
সেই যেমন বাবুরাম সাপুড়েকে কেউ একজন সাপের অর্ডার দিয়েছিল, তাতে হাজারো শর্ত ছিল। তার কারণটা আর কিছুই নয়, সাপটা নিয়ে যেন ভুলেও কোনো বিপদ না হয়, তার ব্যবস্থা করা।

যে সাপের চোখ নেই, শিং নেই নখ নেই
ছোটেনা কি হাঁটে না, কার্ডকে যে কাটে না
করে না কো ফোঁসফাঁস, মারে না কো ঢুঁশ ঢাঁশ্
নেই কোনো উৎপাত খায় শুধু দুধ ভাত

--সুকুমার রায়

এমন নিরীহ নির্বিরোধী সাপ পেলে তাকে "তেড়েমেরে ডাণ্ডা" ঠাণ্ডা করে দিতে কিছুমাত্র সমস্যা নেই। Regular-এর ব্যাপারটাও তাই। শর্তগুলো দেখলে কান্না পেতে পারে, কিন্তু ওরা যতক্ষণ আছে, ততক্ষণ বিপদ বাঁধার ভয় নেই। আমরা আলোচনাটা দুভাগে করব, প্রথমে $\mathbb{R}^2$-এর জন্য, তারপর $\mathbb{R}^3$-এর জন্য।

45.2.1 $\mathbb{R}^2$-এর জন্য

প্রথম শর্ত হল y-**simple** (এবং তারই অনুকরণে x-**simple**)। এদের সঙ্গে পঞ্চম অধ্যায়েই আমাদের সাক্ষাৎ হয়েছিল। পাছে ভুলে গিয়ে থাকো, তাই ছবি দিয়ে মনে করিয়ে দিই। Fig 22-এ একটা y-simple set-এর উদাহরণ দেখিয়েছি। লক্ষ করো এই set-টা এই শর্তটা পালন করে--

> কোনো একটা $x = a$ থেকে একটানা কোনো একটা $x = b$ পর্যন্ত গেছে, এই দুটো দেয়ালের মধ্যে মাথার উপরে একটা continuous function-এর গ্রাফ রয়েছে ছাদ হিসেবে। একইভাবে পায়ের নীচে একটা মেঝে রয়েছে সেটাও একটা continuous function.

সব সময়েই যে দেওয়ালদুটো স্পষ্ট বোঝা যাবে, এমন কোনো কথা নেই। Fig 23-এ যেমন ডানদিকের দেওয়ালটা একটা বিন্দুতে পরিণত হয়েছে। আবার Fig 24-তে দুটো দেওয়ালেরই সেই দশা! এরা সকলেই y-simple set-এর উদাহরণ। এদের সঙ্গে Fig 25-এর set-টার তুলনা করো। তবেই বুঝবে কেন এটা y-simple নয়। যে কয়টা বৈশিষ্ট্যের কথা লিখলাম, তার যেকোনো একটা না থাকলেই y-simple হওয়ার আশায় ছাই।
অংকের ভাষায়--

> **DEFINITION: y-simple (in $\mathbb{R}^2$)**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}^2$ is called y-**simple** if it is of the form
>
> $$A = \{(x, y) \;:\; f(x) \le y \le g(x), \quad x \in [a, b]\}$$
>
> for some $a \le b$ and some continuous functions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

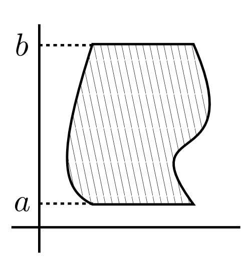


Fig 26

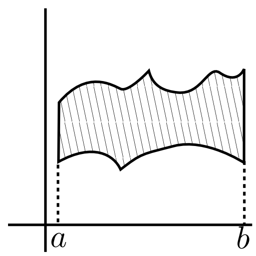


Fig 27

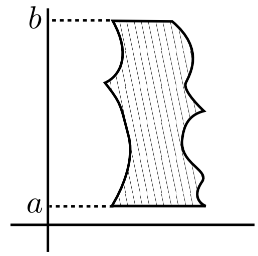


Fig 28

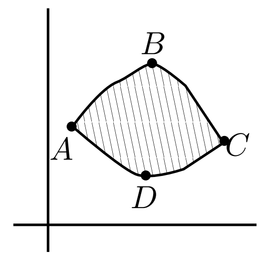


Fig 29

একইভাবে x-simple set-দের সংজ্ঞাও দেওয়া যায় (Fig 26)--

> **DEFINITION: x-simple (in $\mathbb{R}^2$)**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}^2$ is called ***x*-simple** if it is of the form
>
> $$A = \{(x, y) \ : \ f(y) \leq x \leq g(y), \quad y \in [a, b]\}$$
>
> for some $a \leq b$ and some continuous functions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

এদের ছবিও কল্পনা করা বেশ সহজ। এক্ষুণি যে y-simple-দের উদাহরণ দিলাম, তাদেরকে কাত করে শুইয়ে দিলেই হল। যেমন Fig 27-কে কাত করলে পাবে Fig 28।

এমন কোনো set কি সম্ভব যেটা একই সঙ্গে x-simple এবং y-simple? আলবত সম্ভব! একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 29-এ। এদের চেনার কায়দা এইরকম-- প্রথমে সবচেয়ে বাঁদিকের আর সবচেয়ে ডানদিকের বিন্দুদুটো নাও (A আর C)। তবে এদের মধ্যে উপরে একটা ছাদ এবং নীচে একটা মেঝে পাবে (ABC এবং ADC), যাদেরকে কোনো vertical লাইন একাধিকবার ছেদ করে না। একইভাবে যদি সবচেয়ে উপরের আর সবচেয়ে নীচের বিন্দুদুটোকে নাও (B আর D), তবে ওদের মধ্যে দুটো যোগসূত্র পাবে (BAD আর BCD), যাদেরকে কোনো horizontal লাইন একাধিকবার ছেদ করে না।

এরকম set-দের নিয়ে কাজ করা খুবই সুবিধাজনক। কিন্তু এমন বহু set-ই আছে যেগুলো এই চেহারার নয়, অথচ যেগুলো বাস্তবে প্রয়োজন হয়। তাই এবার আমরা শর্তে একটু ছাড় দেব। আমরা সেই সব set-দের নিয়েও কাজ করব, যারা এই দুটো শর্তই একই সঙ্গে পালন নাও করতে পারে, কিন্তু ওদেরকে এমন কিছু set-এ ভেঙে প্রকাশ করা যাবে, যেগুলো দুটো শর্তই পালন করে। গুলিয়ে গেল? আচ্ছা, ছবি দিয়ে ভাবা যাক। Fig 30-এ যে set-টা দেখিয়েছি সেটা x-simple বা y-simple কোনোটাই নয়। কিন্তু এটাকে চারটে এমন টুকরোতে ভেঙে ফেলা যায়, যারা প্রত্যেকেই x-simple এবং y-simple. তার জন্য প্রথমে Fig 31-এর মত করে set-টাকে একটা rectangle-এর মধ্যে টাইট-টাইট করে ফিট্ করে দেখে নাও সবচেয়ে বাঁদিকের, সবচেয়ে ডানদিকের, সবচেয়ে উপরের আর সবচেয়ে নীচের বিন্দু কী কী। ভিতরের ফুটোটার বেলাতেও একই কাজ করো। এবার ভিতরের আর বাইরের বিন্দুগুলোকে লাইন টেনে যোগ করে দাও Fig 32-এর মত। অমনি চারটে টুকরো পেয়ে

Fig 30

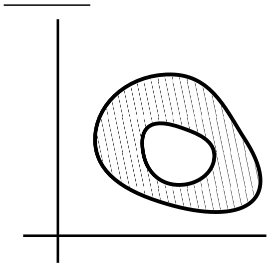


Fig 31

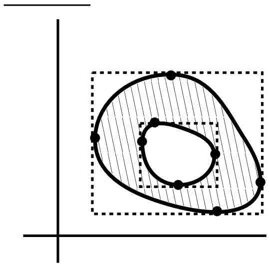
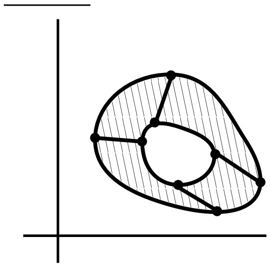


Fig 32



যাবে, যারা প্রত্যেকেই x-simple এবং y-simple. লক্ষ করো টুকরোগুলোর মধ্যে কোনো overlap নেই, খালি boundary বরাবর লেগে আছে।
এরকম set-দের বলব **regular**. সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখে রাখি।

> DEFINITION: **Regular set in $\mathbb{R}^2$**
>
> A set in $\mathbb{R}^2$ is called **regular** if it can be expressed as the union of finitely many sets $A_1, ..., A_n$ that are both x-simple and y-simple, and A_i's have disjoint interiors.

ওই শেষের "disjoint interiors" শর্তটার মানে হল দুটো set বড়জোর boundary বরাবর লেগে থাকতে পারে।
এই হল $\mathbb{R}^2$-এর বেলায় regular set-এর আলোচনা।

45.2.2 $\mathbb{R}^3$-এর জন্য

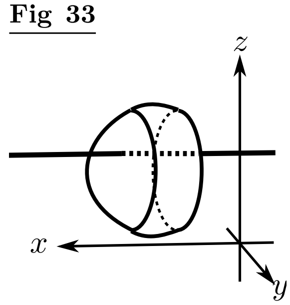
$\mathbb{R}^2$-এর বেলায় খালি x-simple আর y-simple-এর কথাই বলেছি, এবার $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় তার সঙ্গে আসবে z-simple-এর ধারণা।
প্রথমে $\mathbb{R}^3$-এর ক্ষেত্রে x-simple-এর সংজ্ঞাটা ঠিক করা যাক।

> DEFINITION: **x-simple (in $\mathbb{R}^3$)**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}^3$ is called ***x*-simple** if it has a piecewise smooth boundary and every line parallel to the x-axis passing through an interior point of A meets this boundary at exactly two points.

ছবি দিয়ে বুঝতে চাইলে একটা ঢাকনাওয়ালা কৌটো কাত হয়ে আছে বলে ভাবতে পারো (Fig 33)। এর পেটের মধ্যে দিয়ে x-axis-এর সমান্তরালে যেকোনো লাইন টানলে একবার কৌটোর মেঝেকে ফুঁড়ে যাবে, একবার ঢাকনাটাকে। একইভাবে y-simple আর z-simple-এর সংজ্ঞাও দিতে পারবে। এবার regular set-এর সংজ্ঞা--

> DEFINITION: **Regular set in $\mathbb{R}^3$**
>
> A subset of $\mathbb{R}^3$ is called **regular** if it can be expressed as the union of finitely many sets $A_1, ..., A_n$ that are x-simple, y-simple and z-simple, and A_i's have disjoint interiors.

Fig 33



DAY 46
Green's theorem এবং Stokes' theorem

গত দুদিন ধরে আমরা divergence theorem শিখেছি। এবার আমরা একইরকম আরো দুটো theorem শিখব, Green's theorem আর Stokes' theorem. এখানেও ছোটো ছোটো বহু জিনিস মিলে অনেক কাটাকাটি হয়ে একেবারে প্রান্তে কিছু পড়ে থাকবে।

46.1 কী জিনিস?

বোঝার জন্য অনেকগুলো ছোটো ছোটো গীয়ার কল্পনা করো, একটার সঙ্গে একটা দাঁতে দাঁতে লাগানো (Fig 34)। পুরোটাকে ঘিরে একটা বেল্ট জড়ানো আছে। সাইকেলের চেনের মত গীয়ারের দাঁতে আটকানো নয়, কিছুটা ঢিলেভাবে জড়ানো, প্রয়োজন হলে গীয়ারের গায় পিছলে যেতে পারে। এবার যখন গীয়ারগুলোকে ঘোরানো হবে (ছবিতে গীয়ারের গায় তীর চিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি), তখন বেল্টের গায় লেগে থাকা গীয়ারগুলো বেল্টটাকে নিজের নিজের দিকে ঘোরাবার চেষ্টা করবে। লক্ষ করো যে বেল্টের গায় লেগে আছে সাতটা গীয়ার, তার মধ্যে পাঁচটা ঘড়ির কাঁটার দিকে, এবং বাকি দুটো ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে ঘুরছে। ফলে লড়াইতে জিতবে ঘড়ির কাঁটার দিকটাই। পুরো বেল্টটা ঘড়ির কাঁটার দিকেই ঘুরবে, কিন্তু দুটো গীয়ারের বিরোধিতার জন্য কিছুটা আস্তে হয়ে যাবে। বুঝতেই পারছ বেল্টটা যদিও যাবতীয় গীয়ারের সম্মিলিত প্রভাবেই ঘুরছে, তাও ভিতরের গীয়ারগুলো সরাসরি কোনো প্রভাব ফেলছে না বেল্টের উপরে। যেমন, যদি X-চিহ্নিত গীয়ারটা সরিয়েও নাও, বেল্টটা একইভাবে ঘুরতে থাকবে। এই ব্যাপারটাই হল Stokes' theorem-এর মূল কথা।
ব্যাপারটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করার জন্য আমরা গীয়ারের গায়ের বিন্দুগুলো কোন্‌টা কোন্‌দিকে নড়ছে দেখব। Fig 35-এ এরকম কিছু বিন্দুর গতি দেখিয়েছি ছোটো ছোটো তীর চিহ্ন দিয়ে। প্রতিটা বিন্দুতেই এরকম একটা তীর চিহ্ন আছে, কিন্তু সবগুলো আঁকতে গেলে ছবিটা স্রেফ কালো হয়ে যাবে। এইরকম তীর চিহ্নের গুচ্ছকে যে অংকের ভাষায় vector field বলে, সে তো আমরা আগেই জেনেছি। এই সব ঘূর্ণনের সম্মিলিত প্রভাব বেল্টের উপর পড়ছে একেবারে বাইরের তীর চিহ্নগুলোর মাধ্যমে। কোনো বিন্দুতে ঘূর্ণনের পরিমাণ যে curl দিয়ে বার করা যায়, সেটা তো জানোই। সুতরাং অংকের ভাষায় প্রকাশ করলে গীয়ারের গল্পটা এইরকম একটা কিছু দাঁড়াচ্ছে--

> একটা vector field-এর প্রতিটা বিন্দুতে যা curl হয়, তাদের মোট প্রভাব হল একেবারে বাইরের সীমানা বরাবর তীর চিহ্নগুলোর মোট প্রভাবের সমান।

এখানে "মোট প্রভাব" মানে যে integration সেটা নিশ্চয়ই আন্দাজ করতে পারছ? অতএব আমরা এই জাতীয় একটা theorem আশা করতে পারি--কোথাও একটা অঞ্চলে একটা vector field আছে, সেটার curl-টাকে integrate করলে উত্তরটা হবে সেই অঞ্চলের boundary বরাবর vector field-টার line integral.
গুছিয়ে লেখা শুরু করব এইভাবে (Fig 36)--

> Let $A \subseteq \mathbb{R}^2$ be such that the boundary of A is a curve, C, which we shall orient positively.

খেয়েছে, ওই শেষের "orient positively"-টার মানে আবার কী রে বাবা? আসলে line integral শেখার সময়ে বলেছিলাম যে, সেখানে curve বলতে আমরা খালি একটা দাগ বুঝি না, দাগটা কীভাবে পেন চালিয়ে আঁকা হয়েছে সেটাও হিসেবে ধরতে

Fig 34

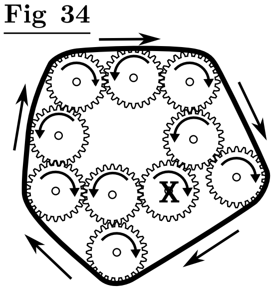


Fig 35

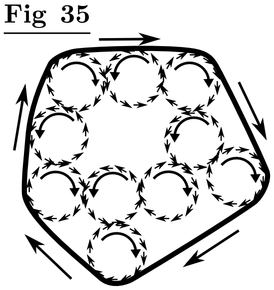
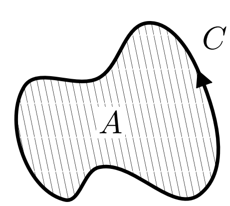


Fig 36



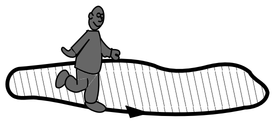


Fig 37

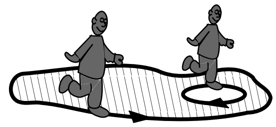


Fig 38

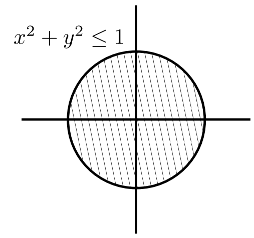


Fig 39

হয়। এখানে orientation হল সেই পেন চালানোর দিকটা। এর মধ্যে একটা দিককে লোকে **positive orientation** নাম দিয়েছে, অন্যটাকে **negative orientation**. সকলেই যাতে positive বলতে একই দিক বোঝে, তাই একটা সর্বজনগ্রাহ্য সংজ্ঞা খাড়া করা হয়েছে। ব্যাপারটা এরকম--

> মনে করো তুমি boundary ধরে হাঁটছ। যদি এমন দিকে হাঁটো যাতে অঞ্চলটা তোমার বাঁদিকে থাকে, তবে বলব তুমি positive দিকে হাঁটছ (Fig 37)। এখানে একটা ব্যাপার মনে রেখো, boundary মানে কিন্তু একটানা একটা curve নাও হতে পারে। যেমন ধরো Fig 38-এর বেলায় boundary-টা আসলে দুটো curve দিয়ে তৈরী। বাইরেরটার বেলায় positive orientation হল ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে, কিন্তু ভিতরেরটার বেলায় ঘড়ির কাঁটার দিকে।

ব্যস্, এবার আমরা theorem-টা লিখে ফেলার জন্য তৈরী--

Green's theorem

Let $A \subseteq \mathbb{R}^2$ be a region whose boundary is a curve, C, which we shall orient positively. Let $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a smooth vector field with components f_1 and f_2. Then

$$\iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy = \oint_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}.$$

আমরা একটু আগে যে curl-এর কথা বলেছিলাম, এই theorem-এ তো কই কোনো curl দেখতে পাচ্ছি না! আসলে curl হল $\mathbb{R}^3$-এর ব্যাপার। আমরা এখানে সহজে বোঝার জন্য $\mathbb{R}^2$ নিয়ে কাজ করছি, তাই মনে করতে পারো যেন x, y-এর সাথে সাথে z-ও আছে, আর f-এরও একটা তৃতীয় component আছে, f_3, যেটা সর্বদাই শূন্য হয়ে আছে বলে টের পাওয়া যাচ্ছে না। যেমন যদি $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x^2y)$ হয়, সেটাকে ভাবো যেন $f(x, y, z) = (x + y, x^2y, 0)$. এবার যদি curl নিই, তবে তার প্রথম আর দ্বিতীয় component হবে শূন্য (কারণ $f_3 \equiv 0$) আর তৃতীয় component-টা হবে $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$. সেটাই আমরা theorem-টায় লিখেছি।
আরো কথা বলার আগে একটা উদাহরণ দেখে theorem-টা হজম করে নেওয়া যাক।

Example 8: ধরো $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x^2y)$ আর A হল unit disc centred at origin মানে যেমন দেখিয়েছি Fig 39-এ। Green's theorem-এর দুই পাশ বার করে দ্যাখো সমান হচ্ছে কিনা।
SOLUTION: এখানে $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy - 1$. সুতরাং

$$\iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy = \iint_A 2xy - 1\, dxdy = 2\iint_A xy\, dxdy - \pi,$$

যেহেতু A-র area হল π.
এবার আমরা $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ বসাব। ফলে Jacobian-এর determinant-এর absolute value হবে r. সুতরাং--

$$\iint_A xy\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta dr = \cdots = 0.$$

সুতরাং--

$$\iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy = -\pi.$$

এই গেল বাঁদিকের খবর। এবার ডানদিকটা নিয়ে পড়া যাক। A-র boundary-কে আমরা এইভাবে parametrise করতে পারি--

$$(\cos\theta, \sin\theta) \text{ যেখানে } \theta \in [0, 2\pi].$$

সুতরাং boundary-টাকে C বললে--

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta, \cos^2\theta \sin\theta) \bullet (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

এখানে প্রায় সবকিছুই integrate করলে 0 হয়ে যাবে। খালি পড়ে থাকবে--

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\theta\, d\theta = -\pi.
\end{aligned}$$

দেখলে, দুটোই একই জিনিস এল? ■

সাধারণতঃ Green's theorem-এর দুই পাশ বার করা সমান সহজ হয় না। তখন আমরা কঠিন পাশটা সরাসরি বার না করে খালি সহজ পাশটা করি। নীচের অংকে তোমাকেও তাই করতে হবে।

Exercise 6: Let C be the circle $(x-1)^2 + y^2 = 1$, oriented counter-clockwise. Then the value of the line integral

$$\oint_C -\frac{4}{3}xy^3\, dx + x^4\, dy$$

is

(A) 6π (B) 8π (C) 12π (D) 14π

(JAM.2019.MCQ24)
HINT:
সরাসরি করে দেখার চেষ্টা করতে পারো। কিন্তু মাথাখারাপ হয়ে গেলে আমাকে দোষ দিও না। ■

এখানে আমরা $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে একটা অঞ্চল নিয়ে কাজ করলাম। যদি একই ধারণা আমরা $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় লাগাতাম, তবে পেতাম Stokes' theorem.

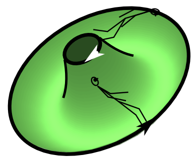


Fig 40

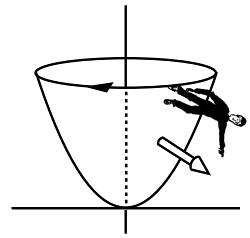


Fig 41

Stokes' theorem

Let $A \subseteq \mathbb{R}^3$ be a surface with outward unit normal $\mathbf{n}$. We give positive orientation to its boundary, ∂A. Let $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a smooth vector field. Then

$$\iint_A \text{curl}(\mathbf{f}) \bullet \mathbf{n}\, dS = \oint_{\partial A} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}.$$

এখানে **smooth** মানে "যতবার খুশি differentiate করা যায়" এমন। আমরা $\mathbb{R}^2$-এর জন্য positive orientation-এর সংজ্ঞা শিখেছিলাম এইরকম--একটা লোক একটা set-এর boundary ধরে হাঁটছে, যাতে set-টা তার বাঁ দিকে থাকে। এই উপমাটার সময়ে আমরা মনে মনে $\mathbb{R}^2$-কে আসলে $\mathbb{R}^3$-এর মধ্যে xy-plane বলে কল্পনা করে নিচ্ছিলাম, এবং লোকটা হাঁটছিল খাড়া হয়ে, মানে positive z-axis-এর দিকে মাথা তুলে। কিন্তু $\mathbb{R}^3$-এর বেলাতে boundary-টা শূন্যে হেলে থাকতে পারে। সেক্ষেত্রে লোকটা কোনদিকে মাথা তুলে হাঁটবে, সেটা ঠিক করতে হবে। আমরা চাই যেন লোকটা $\mathbf{n}$-এর দিকে মাথা তুলে হাঁটে। যেমন Fig 40-এ একটা টুপির মত surface দেখিয়েছি, যার ওপরটা ফুটো (বোধহয় চোখ দুটোকে ছায়ায় রেখে টাকের উপর রোদ খাওয়ানোর জন্য)। যদি এই টুপির উপর দিকটাকে $\mathbf{n}$-এর দিক বলি, তবে surface-টার boundary বরাবর লোকে কীভাবে হাঁটবে সেটা দেখিয়েছি। এখানে boundary-টার দুটো অংশ, প্রত্যেকটাই একটা করে loop. দুজনের ক্ষেত্রেই positive orientation দেখিয়েছি তীর চিহ্ন দিয়ে।

Example 9: Verify Stokes' theorem for $\mathbf{f} = (x, y, z)$ over the paraboloid $z = x^2 + y^2$ where $x^2 + y^2 \le 1$.

SOLUTION: ছবিটা দেখিয়েছি Fig 41-এ। এখানে আমরা outward normal কীরকম নিচ্ছি, তার একটা নমুনাও দেখানো আছে। সেই দিকে মাথা রেখে এবং surface-টাকে বাঁদিকে রেখে হাঁটলে boundary-র কোন্ orientation-টা positive হবে, সেটাও দেখিয়েছি।

প্রথমে কষে দ্যাখো $\text{curl}(\mathbf{f}) = (0,0,0)$ পাবে। অতএব $\iint_A \text{curl}(\mathbf{f}) \bullet \mathbf{n}\, dS = 0$ হয়ে গেল।

এবার ∂A-কে parametrise করব $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ হিসেবে, যেখানে θ যাবে 2π থেকে 0 পর্যন্ত। লক্ষ করো আমরা কিন্তু 0 থেকে 2π বলি নি, কারণ আমরা এখানে boundary-টা বরাবর ঘড়ির কাঁটার দিকে হাঁটছি। তবে--

$$\oint_{\partial A} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x} = \int_{2\pi}^{0} (\cos\theta, \sin\theta, 1) \bullet (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = 0.$$

সুতরাং Stokes' theorem-এর দুই পাশই সমান হল। এই অংকে অবশ্য দু দিকই শূন্য হয়ে যাওয়ায় orientation-টা ভুল হলেও অংকটা মিলে যেত! ■

46.2 Theorem-এর নামাবলী

আমরা এই অধ্যায়ে তিনটে theorem আলোচনা করেছি, divergence theorem, Green's theorem এবং Stokes' theorem. দুঃখের কথা এদের মধ্যে প্রথম দুটোর নামকরণ নিয়ে সামান্য মতপার্থক্য আছে। খুঁটিয়ে দেখলে তিনটে theorem-এর মধ্যে ধারণা কিন্তু কেবল দুটোই--

- এক, এঘর-ওঘর লোক চলাচল,
- আর দুই, চাকা দিয়ে বেল্ট ঘোরানো।

কিন্তু নাম ব্যবহার করেছি তিনটে। দুটো জিনিসের তিনটে নাম দিতে গেলে খানিকটা সমস্যা তো বাঁধবেই। দুটো ধারণাই আমরা $\mathbb{R}^2$ এবং $\mathbb{R}^3$-এর জন্য আলোচনা করেছি। সুতরাং হাতে আছে দুটো ধারণা আর প্রতিটার দুটো কেস, $\mathbb{R}^2$ এবং $\mathbb{R}^3$. আমরা প্রথম ধারণা থেকে পাওয়া theorem-টাকে বলেছি divergence theorem, এবং সেটা $\mathbb{R}^2$ আর $\mathbb{R}^3$ দুই ক্ষেত্রেই। ওদিকে $\mathbb{R}^2$-এর বেলায় দ্বিতীয় ধারণা থেকে পাওয়া theorem-টাকে নাম দিয়েছি Green's theorem, আর $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় সেই একই ধারণার theorem-টাকে বলেছি Stokes' theorem. মানে ব্যাপারটা এই টেবিলটার মত--

	প্রথম ধারণা	দ্বিতীয় ধারণা
$\mathbb{R}^2$	Divergence theorem	Green's theorem
$\mathbb{R}^3$	Divergence theorem	Stokes' theorem

কিন্তু কোনো কোনো বইতে দুটো ধারণার বেলাতেই $\mathbb{R}^2$-এর কেসটাকেই Green's theorem বলা হয়। সেখানে divergence theorem এবং Stokes' theorem নামগুলো ব্যবহার করা হয় কেবল $\mathbb{R}^3$-এর বেলায়--

	প্রথম ধারণা	দ্বিতীয় ধারণা
$\mathbb{R}^2$	Green's theorem (divergence form)	Green's theorem (curl form)
$\mathbb{R}^3$	Divergence theorem	Stokes' theorem

এক্ষেত্রে $\mathbb{R}^2$-এর বেলায় দুটো ধারণা থেকে পাওয়া theorem দুটোর একই নাম হয়ে গিয়েছে। আলাদা করার জন্য একটাকে বলে Green's theorem-এর **divergence form** আর অন্যটাকে বলে **curl form**. আমরা অবশ্য এই নামগুলো ব্যবহার করব না।

পরে যারা অংক নিয়ে আরো পড়াশোনা করবে, তারা দেখবে যে, divergence theorem আসলে Stokes' theorem-এরই একটা বিশেষ ক্ষেত্র। চাইলে আমরা Stokes' theorem-কে $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$ ইত্যাদিদের জন্যও generalise করতে পারি। বস্তুতঃ, এই theorem-গুলো $\mathbb{R}$-এর বেলাতেও খাটে, যদিও সেক্ষেত্রে এরা সকলেই পর্যবসিত হয় fundamental theorem of calculus-এ।

46.3 Polar planimeter

এবার আমরা Green's theorem-এর একটা অদ্ভুত প্রয়োগ দেখব। প্রয়োগটা হল এমন একটা যন্ত্র, যেটা দিয়ে কোনো loop-এর ভিতরের area বার করে দেওয়া যায় (Fig 42)! যন্ত্রটা দেখতে কতকটা কাঁধ থেকে বেরোনো একটা হাতের মত

Fig 42

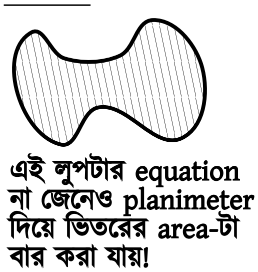
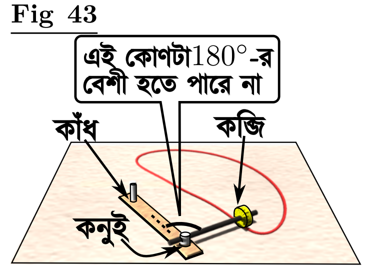


Fig 43



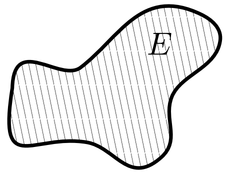


Fig 44

(Fig 43)। কাঁধটা একটা বিন্দুতে স্থির থাকে। কাঁধ থেকে কনুই একটা ডাণ্ডা, কনুই থেকে কব্জি আরেকটা ডাণ্ডা। কব্জিতে একটা চাকা লাগানো, ঠিক যেন হাতঘড়ির ব্যাণ্ড। যন্ত্রের কাঁধটাকে loop-এর বাইরে কোথাও একটা স্থির রেখে এই চাকাটাকে বুলিয়ে যেতে হয় loop-টা বরাবর। চাকাটা কতটা ঘুরছে, সেটাই বলে দেবে area-টা। ঘোরার পরিমাণটা বোঝার জন্য চাকার গায় স্কেল কাটা থাকে।

এই QR code-টা তোমার মোবাইলে স্ক্যান করলেই একটা ভিডিওতে পৌঁছবে। সেখানে একটা planimeter-এর অ্যানিমেশন দিয়েছি। যদি QR code-টা কাজ না করে, তবে নীচের address-টা Google-এ টাইপ করে দাও। সেখান থেকেও একই জায়গায় পৌঁছবে। অসুবিধা হলে আমাকে জানিও। বইয়ের ভূমিকায় আমার Whatsapp নম্বর পাবে।
`https://arnabc74.github.io/mult/plani.html`

বুঝতেই পারছ যন্ত্রটা ব্যবহার করা নিতান্তই সহজ। কিন্তু কেন সেটা কাজ করে সেটা বুঝতে Green's theorem লাগালে সুবিধা হয়। অবশ্য মানুষ এই যন্ত্রটা Green's theorem-এর প্রয়োগ হিসেবে বানায় নি। বস্তুতঃ এই যন্ত্রটার আবিষ্কার হয়েছিল Green's theorem আবিষ্কারেরও আগে। কিন্তু তাও Green's theorem দিয়েই এই যন্ত্রটাকে বুঝতে সবচেয়ে সুবিধা। এবার সেটাই সংক্ষেপে আলোচনা করব।

ধরো একটা loop রয়েছে Fig 44-এর মত। তোমায় বলল শেড করা জায়গাটার area বার করতে। Double integral দিয়ে লিখলে

$$\iint_E dxdy.$$

এবার যদি এমন কোনো $\mathbf{f}(x,y)$ পাও, যাতে $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv 1$ হয়, তবে Green's theorem দিয়ে area-টাকে এইভাবে লিখতে পারো--

$$\oint_{\partial E} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}.$$

প্রথম দর্শনে এই integral-টাকে আগেরটার চেয়ে জটিলতর মনে হওয়াই স্বাভাবিক, কিন্তু অনেক সময়ে এমন $\mathbf{f}(x,y) \equiv \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ পাওয়া যায়, যার জন্য দ্বিতীয় integral-টা সহজতর হয়ে দাঁড়ায়। যেমন $\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$. এক্ষেত্রে $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$. এবার Green's theorem লাগালে আসে

$$\text{area}(E) = \iint_E \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy = \oint_{\partial E} -y\,dx + x\,dy.$$

এরকম $\mathbf{f}(x,y)$ আরও সম্ভব, যেমন $\mathbf{f}(x,y) = (0,x)$ বা $\mathbf{f}(x,y) = (-y,0)$, বা এরকম অন্য কিছু। এদের মধ্যে কোন্‌টা কখন কাজে লেগে যায়, সেটা পরিস্থিতির উপর নির্ভর করে। Polar planimeter নামক যন্ত্রটা এরকমই একটা $\mathbf{f}(x,y)$ নিয়ে কাজ করে। এই $\mathbf{f}(x,y)$-টা লেখার পক্ষে বেশ জটিল (এতই জটিল যে ফর্মুলা দিচ্ছি না), কিন্তু এর একটা আশ্চর্য সুবিধা আছে। সেটা হল এই যে এর জন্য $\oint_{\partial E} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}$-টা কোনো অংক না কষে সম্পূর্ণ যান্ত্রিকভাবে বার করে ফেলা যায়!

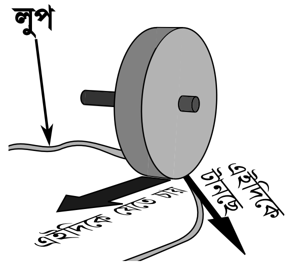


Fig 45

এবার এই $\mathbf{f}(x, y)$-এর একটা বর্ণনা দিই। এটা একটা vector field, অর্থাৎ প্রতিটা বিন্দুতে একটা করে তীর চিহ্ন। ধরো একটা বিন্দু নিলে, (x, y). এবার জানতে চাও সেখানে vector field-টার তীর চিহ্নটা কীরকম দেখতে। তার জন্য planimeter-এর চাকাটাকে সেই বিন্দুতে নিয়ে যাও[3]। এই অবস্থায় চাকাটা ঘড়ির কাঁটার দিকে গড়ালে যে দিকে এগোবে, সেই দিক বরাবর unit vector-টাই হল আমাদের তীর চিহ্ন, মানে $\mathbf{f}(x, y)$. এখানে দেখানো যায়[4] যে, $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv 1$ হবে। সুতরাং এই $\mathbf{f}$-টার line integral বার করতে পারলেই চলবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে চাকাটা কতটা ঘুরছে, সেটা থেকেই এই line integral-টা পেয়ে যাওয়া যায়। ব্যাপারটা বোঝার জন্য Fig 45-এর দিকে চোখ রাখো। এখানে দুটো তীর চিহ্ন দেখতে পাচ্ছ। মোটাটা হল চাকাটা যেদিকে যেতে পারে, অর্থাৎ আমাদের vector field-এর দিকটা। অন্য তীর চিহ্নটা loop-এর সঙ্গে tangent হয়ে আছে, মানে যেদিকে চাকাটাকে টানার (বা ঘষটানোর) চেষ্টা চলছে, অর্থাৎ ওটা হল $d\mathbf{x}$-এর দিকটা। যারা ভিডিওটা দেখতে পেরেছ, তারা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে চাকাটা সবসময়ে একইভাবে ঘুরছে না। আসলে এই দুটো দিকের মধ্যেকার কোণের উপরই নির্ভর করছে চাকাটা কত স্বচ্ছন্দে ঘুরবে--

- এই দুটো দিক যদি একই হয়, তবে চাকাটা তরতরিয়ে ঘুরবে।
- যদি দুটো দিক পরস্পরের সঙ্গে perpendicular হয়, তবে চাকাটাকে আড়াআড়িভাবে টানা হচ্ছে, সেক্ষেত্রে চাকাটা খালি ঘষটে ঘষটে এগোবে, ঘুরবে না।
- ছবিতে যেমন দেখানো আছে, যদি সেরকম কোণাকুণিভাবে টানো, তবে খানিকটা ঘুরবে, খানিকটা ঘষটাবে।

এক কথায়, কোনো বিন্দুতে চাকার ঘোরার হার হল সেই বিন্দুতে চলার দিকটার যে component-টা চাকার দিক বরাবর আছে সেইটা। এবং সেটা থেকেই আসছে $\mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}$. পুরো loop-টা ধরে টানলে মোট ঘোরার পরিমাণ হবে $\oint_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}$. আমরা Green's theorem থেকে জানি যে এটা double integral-টার সমান, এবং সেটাই হল area-টা। এটাই হল planimeter যন্ত্রের রহস্য।

Planimeter আমাদেরকে যান্ত্রিক উপায়ে এমন একটা $\mathbf{f}(x, y)$ দেয়, যাতে $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv 1$ হয়। এক্ষুণি আগেই বললাম যে, এরকম আরো $\mathbf{f}(x, y)$ সম্ভব, যেটা আমরা যন্ত্র ছাড়াই বানাতে পারি। এরকম একটা উদাহরণ দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 7: If $\frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx)$ represents the area bounded by the closed curve C, then find the area bounded by the curve $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$.[3] **(2021.11a)**
HINT: যেহেতু closed curve বলেছে, তাই আমরা $\theta \in [0, 2\pi]$ নেব। ■

Exercise 8: আগের অংকের ফর্মুলাটা কিন্তু divergence theorem দিয়েও দেখানো যায়। কী করে? ■

DAY 47
Line integral বার করতে প্রয়োগ

[3]কনুইয়ের ভাঁজটা 180°-র চেয়ে বেশী খোলে না, তাই কাজটা একভাবেই করা যাবে।
[4]দেখানোটা খুব সহজ নয়।

Green's theorem এবং Stokes' theorem দুজনেরই এক পাশে আছে একটা line integral. অনেক সময়েই দেখা যায় যে, সেই line integral-টা সরাসরি বার করার চেয়ে অন্য পাশটা বার করা সহজতর হয়। তখন আমরা line integral-টা সরাসরি বার না করে অন্য পাশটা বার করেই কাজ সারি। আজ আমরা এরকম কয়েকটা উদাহরণ দেখব। যেসব উদাহরণ $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে সেখানে Green's theorem লাগাব, আর $\mathbb{R}^3$-এর বেলায় Stokes' theorem.

47.1 Green's theorem-এর প্রয়োগ

Example 10: Let C be the boundary of the square with vertices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ and $(0,1)$ oriented in the counter-clockwise sense. Then the value of the line integral

$$\oint_C x^2y^2\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

is .... (rounded off to two decimal places). **(JAM.2020.NAT55)**

SOLUTION:ছবিটা দেখিয়েছি Fig 46-এ। এখানে সরাসরি line integral-টা বার করা খুব কঠিন নয়। কিন্তু Green's theorem লাগানোই বেশী সহজ।

Let $\mathbf{f}(x,y) \equiv \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = (x^2y^2, x^2 - y^2)$.

Then the required line integral is $\oint_C \mathbf{f} \bullet \mathbf{x} = \iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dxdy$, by Green's theorem, where S is the region bounded by C.

Now $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x$ and $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x^2y$.

Hence

$$\iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 2x - 2x^2y\,dxdy = \cdots = \frac{2}{3},$$

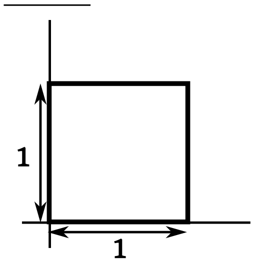
So the required answer, correct to two decimal places, is 0.67.

■

Exercise 9: If $\vec{F}(x,y) = (3x - 8y)\hat{\imath} + (4y - 6xy)\hat{\jmath}$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, then $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, where C is the boundary of the triangular region bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$ oriented in the counter-clockwise direction, is

(A) $\frac{5}{2}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

Fig 46



(JAM.2018.MCQ20)
HINT: আগেরটার মতই। আমরা যেটাকে $d\mathbf{x}$ লিখছিলাম, এখানে সেটাকেই $d\vec{r}$ লিখেছে। ■

Exercise 10: For $a > 0$, $b > 0$, let $\vec{F} = \frac{x\hat{j} - y\hat{i}}{b^2x^2 + a^2y^2}$ be a planar vector field. Let

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$$

be the circle oriented anti-clockwise. Then

$$\oint \vec{F} \bullet d\vec{r} =$$

(A) $\frac{2\pi}{ab}$ (B) 2π (C) $2\pi ab$ (D) 0

(JAM.2017.MCQ17)
HINT: এখানে planar বলতে বোঝানো হচ্ছে যে কাজটা $\mathbb{R}^2$-তে হচ্ছে। ■

Exercise 11: Let $\vec{F}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ and let C be the ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

oriented counter-clockwise. Then the value of $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ (rounded off to 2 decimal places) is .... **(JAM.2019.NAT44)**
HINT: একটা ellipse-এর area-র ফর্মুলা মনে আছে তো? যদি semi-axis দুটোর দৈর্ঘ্য a আর b হয়, তবে ellipse-টার ভিতরের area হবে πab. ■

এইবারের অংকটার মধ্যে একটা নতুন প্যাঁচ আছে।

Example 11: Let $\vec{F} = (3 + 2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$ and let L be the curve

$$\vec{r}(t) = e^t \sin t\hat{i} + e^t \cos t\hat{j}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Then

$$\int_L \vec{F} \bullet d\vec{r} =$$

Fig 47

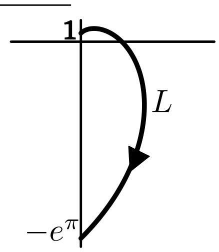
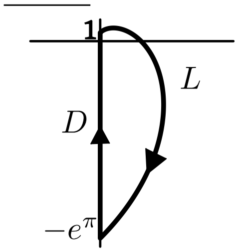


Fig 48



(A) $e^{-3\pi}+1$ (B) $e^{-6\pi}+2$ (C) $e^{6\pi}+2$ (D) $e^{3\pi}+1$

(JAM.2017.MCQ14)

SOLUTION:এই অংকের curve-টা দেখিয়েছি Fig 47-এ। প্রথমেই যেটা চোখে পড়ে, সেটা হল L-টা মোটেই closed নয়, ওর দুপ্রান্ত আলাদা হয়ে ঝুলে আছে, একটা লুপ তৈরী হয়নি। সুতরাং Green's theorem লাগানো যাবে না বলে মনে হওয়াই স্বাভাবিক। আবার যদি সরাসরি line integral-টা বার করতে যাও, তবে একটা দাঁতভাঙা integral কষতে হবে। তবে উপায়? উপায় হল চুপিচুপি $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}$ বার করে দেখা, যদি ভালো কিছু চোখে পড়ে।

> Here $\mathbf{F}$ has components $F_1(x,y)=3+2xy$ and $F_2(x,y)=x^2-3y^2$.
> Hence $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=\cdots=0$.

আরেব্বাস্, একেবারে শূন্য হয়ে গেল! তার মানে যদি L-টা যদি একটা লুপ হত, তবে integral-টা দিব্যি শূন্য হত। কিন্তু L-টা এখানে লুপ নয়। তাহলে ওর দুপ্রান্তকে Fig 48-এর মত লাইন টেনে যোগ করে একটা লুপ বানিয়ে নিলে হয় না? যদি ওই বাড়তি লাইনটাকে D বলি, তবে $\int_L+\int_D=0$ হবে, তার মানে $\int_L=-\int_D$ হবে। যেহেতু D হল y-axis-এর একটা অংশ, তাই $\int_D$ বার করা $\int_L$ বার করার থেকে অনেক সহজ হওয়া উচিত।

> Let D be the curve along the y-axis from $-e^{\pi}$ to 1. Then L and D together make a loop, $L\cup D$.
> So, by Green's theorem, $\oint_{L\cup D}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{x}=\int_{L\cup D}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy=0$.
> Thus $\int_L \mathbf{F}\bullet d\mathbf{x}=-\int_D \mathbf{F}\bullet d\mathbf{x}$.
> We parametrise D as $(0,y)$ for y from $-e^{\pi}$ to 1. Then
> $$-\int_D \mathbf{F}\bullet d\mathbf{x}=\int_{-e^{\pi}}^{1}3y^2,dy=1+e^{3\pi}.$$
> So the answer is (D).

■

47.2 Stokes' theorem-এর প্রয়োগ

Example 12: Evaluate by Stokes theorem $\oint_{\Gamma}(\sin z\,dx-\cos x\,dy+\sin y\,dz)$, where Γ is the boundary of the rectangle $0\le x\le\pi,\ 0\le y\le 1,\ z=3$.[5] **(2021.1b)**

SOLUTION:

> We shall take $\mathbf{f}(x,y,z)=(\sin z,-\cos x,\sin y)$.
> Then $\mathrm{curl}(\mathbf{f})=\cdots=(\cos y,\cos z,\sin x)$.
> Let $E=\{(x,y,z)\ :\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le 1,\ z=3\}$ with upward unit normal $\mathbf{n}=(0,0,1)$.

এখানে বলে দেয় নি Γ-র orientation কী নেব। কিছু বলে না দিলে counter-clockwise নেওয়াই দস্তুর। সেই মত আমরা এমন দিকে normal-টা নিলাম, যাতে counter-clockwise দিকটাই positive orientation হয়।

Then by Stokes theorem, the required integral is

$$\iint_E \text{curl}(\mathbf{f}) \bullet \mathbf{n}\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^1 \sin x\, dy dx$$
$$= \cdots = 2.$$

■

একইরকম একটা অংক তোমার জন্য।

Exercise 12: Use Stokes' theorem to find the line integral

$$\int_C (x^2y^3\, dx + dy + z\, dz),$$

where C is the circle

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

[3] **(2021.12a)** ■

Example 13: Show that the circulation of the vector field $\bar{\alpha} = y^2\hat{i} + z^2\hat{j}$ around the contour $C : x^2 + y^2 = 1, \quad y + z = 1$ is zero.[5] **(2021.1c)**

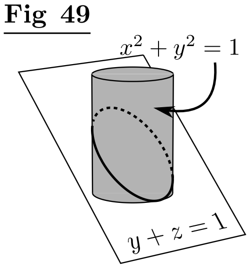
SOLUTION: এই অংকের ভাষাটা একটু বুঝে নাও। প্রথম কথা **circulation**. একটা curve বরাবর একটা vector field-এর circulation বলতে বোঝানো হচ্ছে সেই curve ধরে tangent বরাবর vector field-টার line integral. দ্বিতীয় কথা **contour**. এটা এখানে curve-এরই সমার্থক।

Curve-টার চেহারাটা বুঝে নেওয়া যাক (Fig 49)। যেহেতু এখানে x, y আর z তিনজনেরই উল্লেখ রয়েছে, তার মানে কাজ হচ্ছে $\mathbb{R}^3$-তে। সুতরাং $x^2 + y^2 = 1$ মানে খালি unit circle নয়, একটা আস্ত cylinder. একইভাবে $y + z = 1$ হল একটা plane. এই plane-টা যেখানে cylinder-টাকে ছেদ করছে, সেটাই হল আমাদের curve-টা। এক্ষেত্রে এটা একটা ellipse. এই অংকটাকে Stokes' theorem দিয়েও যেমন করা যায়, তেমনি সরাসরি line integral বার করেও করা যায়। দুটোই প্রায় সমান সহজ। দুভাবেই চেষ্টা করে দ্যাখো। সরাসরি করার জন্য curve-টাকে parametric-ভাবে প্রকাশ করতে হয়। এখানে $x^2 + y^2 = 1$ দেখলেই একটা parametric form-এর কথা মাথায় আসে--

Let $x = \cos\theta, \; y = \sin\theta,$

আর $y + z = 1$ থেকে পাচ্ছি $z = 1 - y$, মানে--

Fig 49



> and $z = 1 - \sin\theta$, where $\theta \in [0, 2\pi]$.

এবার integrand-টাকে নিয়ে পড়া যাক।

> The integrand is $\mathbf{F} = (y^2, z^2, 0)$.

শেষের 0-টা কেন লিখলাম বুঝলে তো? আমরা কাজ করছি $\mathbb{R}^3$-র মধ্যে, তাই। এবার স্রেফ সংজ্ঞা লাগানোর অপেক্ষা--

> So the required circulation is
>
> $$\begin{aligned}\int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz &= \int_0^{2\pi} y^2\,d(\cos\theta) + z^2\,d(\sin\theta)\\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,(-\sin\theta) + (1-\sin\theta)^2\,\cos\theta\,d\theta\\ &= \cdots\\ &= 0,\end{aligned}$$
>
> as required.

Stokes' theorem দিয়ে করার দায়িত্বটা তোমার উপরেই রইল। খালি একটা জিনিস লক্ষ করো--এখানে surface-টা সমতল, যার উপর একটা normal হবে $(1, 1, 0)$. একটু কষলেই দেখবে $\text{curl}(\mathbf{f}) \bullet \mathbf{n}$ এখানে পুরো surface-এর উপরেই constant হচ্ছে। ■

Exercise 13: Let S be the surface defined by

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 1 - x^2 - y^2,\; z \geq 0\}.$$

Let $\vec{F} = -y\hat{i} + (x-1)\hat{j} + z^2\hat{k}$ and $\hat{n}$ be the continuous unit normal field to the surface S with positive z-component. Then the value of

$$\frac{1}{\pi}\iint_S (\nabla\times\vec{F}) \bullet \hat{n}\,dS$$

is ... **(JAM.2021.NAT58)**
HINT: এই অংকটাও Stokes' theorem দিয়ে বা ছাড়া দুভাবেই করা যায়। দুভাবেই বেশ সহজ। ■

Exercise 14: Let S be the surface of the portion of the sphere with centre at the origin and radius 4, above the xy-plane. Let $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j} + yx^3\hat{k}$. If $\hat{n}$ is the unit normal to S, then

$$\int_S (\nabla\times\vec{F}) \bullet \hat{n}\,dS$$

equals

(A) -32π (B) -16π (C) 16π (D) 32π

(JAM.2020.MCQ16)
HINT: আগেরটার মতই। তবে এখানে Stokes' theorem ছাড়া এগোনো মুস্কিল। তাছাড়া এখানে $\hat{n}$-এর অভিমুখটা আমাদের বলে দেয়নি। আমরা ধরে নেব $\hat{n}$-এর অভিমুখ উপরের দিকে (মানে positive z-axis-এর দিকে)। ■

Exercise 15: The line integral of the vector field

$$\vec{F} = zx\hat{i} + xy\hat{j} + yz\hat{k}$$

along the boundary of the triangle with vertices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ and $(0,0,1)$, oriented anti-clockwise, when viewed from the point $(2,2,2)$, is

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(JAM.2017.MCQ15)
HINT: আগের অংকের মতই। এখানেও অংকটা দুভাবে করা যাবে--এক সরাসরি, আর দুই, Stokes' theorem দিয়ে। এখানে ত্রিভুজটার তিনটে বাহু আছে, তাই সরাসরি করতে চাইলে তিনটে line integral-এ ভেঙে নিতে হবে। কিন্তু line integral-এর অভিমুখটা এখানে কী হবে? তার জন্য ছবিটা ভাবো (Fig 50)। তুমি $(2,2,2)$ থেকে দেখলে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে যাবে। তার মানে $(1,0,0)$ থেকে $(0,1,0)$ এবং সেখানে থেকে $(0,0,1)$ এবং অবশেষে ফের $(1,0,0)$-তে ফিরে আসা।
অবশ্য Stokes' theorem লাগানোই বেশী সহজ হবে। তার জন্য মনে রেখো যে *normal*-টা হবে $(1,1,1)$ বরাবর। ■

Exercise 16: Let $\vec{F}(x,y,z) = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} + xy\hat{k}$ and let C be the curve of intersection of the plane $x+y+z=1$ and the cylinder $x^2+y^2=1$. Then the value of

$$\left| \oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} \right|$$

is

(A) π (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) 2π (D) 3π

(JAM.2019.MCQ25)
HINT: এখানে absolute value চেয়েছে, তাই curve বরাবর অভিমুখটা যা খুশি নিতে পারো। এই অংকের curve-টা অনেকটা আগের অংকের curve-টারই মতন। এখানে $d\vec{r}$ লিখেছে। আমরা এটাকেই $d\mathbf{x}$ লিখেছিলাম, মানেটা একই। ছবিটা রয়েছে Fig 51-এ।
■

Fig 50

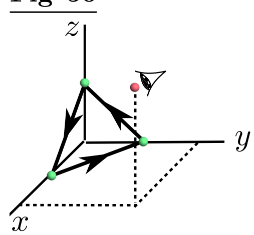
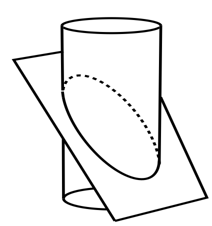


Fig 51



Exercise 17: Let C be the curve where $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ intersects $x + y + z = 1$. We orient C in the counter-clockwise direction when looking from the origin. Compute $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$, where $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
HINT: বেশ শক্ত শোনাচ্ছে, না? কিন্তু একবার খালি curl($\mathbf{F}$) বার করো। অমনি হাসি পেয়ে যাবে! ■

Answers

1. এখানে $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1 + 1 + 1 = 3$. তাই divergence theorem দিয়ে উত্তর পাচ্ছি $\frac{1}{\pi} \iiint_{ball} 3\, dxdydz = \cdots = 32$. **2.** এখানে $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2x + 2y + 2z$. তাই divergence theorem দিয়ে উত্তর পাচ্ছি $2 \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z)\, dzdydx = \cdots = abc(a + b + c)$. **3.** Volume-টাকে $\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz$ ভাবো, যেখানে $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ আর V হল আমাদের solid-টা। তাহলে divergence theorem-এর দৌলতে সেটা $\iint_{\partial V} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS$-এর সমান। এখানে parametric form-টা নিতে পারো $\mathbf{x}(u, v) = \big(a(u - \sin u), a(1 - \cos u) \cos v, a(1 - \cos u) \sin v\big)$. এই u-টা হল যেটাকে প্রশ্ন θ বলেছে, আর v হল ঘোরানোর কোণটা। তবে দেখবে $\iint_{\partial V} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = -a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta(\theta - \sin\theta)\, d\theta d\phi = \cdots = 6\pi^2 a^2$.
4. এখানে $s = x^2 + y^+ z^2$ লিখে নিলে সুবিধা হবে। তাহলে $\frac{\partial u}{\partial x} = -4(1 - s) \cos((1 - s)^2)x$. একইভাবে $\frac{\partial u}{\partial y}$ আর $\frac{\partial u}{\partial z}$ বার করলেই দেখবে $\nabla u = -4(1 - s) \cos((1 - s)^2)(x, y, z)$. এবার লক্ষ করো যে ∂B হল origin-এর centre-ওয়ালা unit sphere-টা। সেখানে সর্বত্রই $s = 1$. তাই $\nabla u = (0, 0, 0)$. সুতরাং divergence theorem বলছে যে, উত্তর হবে $\iint_{\partial B} \nabla u \bullet \mathbf{n}\, dS = 0$. **5.** এখানে এই parametric form-টা নেব, $x(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y(\theta) = a(1 - \cos\theta)$, যেখানে $\theta \in [0, 2\pi]$. তাই outward normal হবে $a(-\sin\theta, 1 - \cos\theta)$. সুতরাং divergence theorem বলছে যে, উত্তর হবে $2h \int_0^{2\pi} (a(\theta - \sin\theta), 0) \bullet (-a \sin\theta, a(1 - \cos\theta))\, d\theta$. এখানে শুরুর 2-টা রয়েছে, কারণ cycloid-টার reflection-টার বেলাতেও একই জিনিস আরেকবার আসবে। খানিকক্ষণ ধস্তাধস্তি করার পর উত্তর আসবে $6\pi a^2 h$. **6.** $\mathbf{f}(x, y) = \left(-\frac{4}{3}xy^3, x^4\right)$. বার করতে বলেছে $\oint_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{x}$. এবার Green's theorem-এর দৌলতে সেটা $\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x^4) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{4}{3}xy^3\right) dxdy$, যেখানে $D = \{(x, y) \ : \ (x - 1)^2 + y^2 \le 1\}$. এবার $x = 1 + \cos\theta$ আর $y = \sin\theta$ বসিয়ে খানিকক্ষণ লড়াই করলে পাবে 8π. তার মানে (B) হল উত্তর।
7. $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos^3\theta)(3a \sin^2\theta \cos\theta) - (a \sin^3\theta)(-3a \cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta = \cdots = \frac{3a^2\pi}{8}$. **8.** যদি $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ নাও, তবে $\operatorname{div}(\mathbf{f}) \equiv 1$ হবে। তাই যদি C দিয়ে ঘেরা অঞ্চলটাকে D বলি, তবে $\iint_D \operatorname{div}(\mathbf{f})\, dxdy = \operatorname{area}(D)$ হবে। এবার divergence theorem লাগালে এটাকে লিখতে পারি $\oint_C \mathbf{f} \bullet \mathbf{n}\, d\ell = \oint_C \frac{x}{2}\, dy - \frac{y}{2}\, dx = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx$. **9.** (B). **10.** (D). **11.** $2 \times 4 \times 3 \times \pi = 24\pi \approx 75.40$.
12. $f(x, y, z) = (x^2 y^3, 1, z)$ নাও। তবে $\operatorname{curl}(f) = (0, 0, -3x^2 y^2)$. সুতরাং Stokes' theorem থেকে পাবে $-3 \iint_D x^2 y^2\, dxdy$, যেখানে $D = \{(x, y, 0) \ : \ x^2 + y^2 \le a^2\}$. এবার $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ বসালে পাবে $-3 \int_0^a \int_0^{2\pi} r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta dr = \cdots = -\frac{a^6\pi}{8}$. **13.** Stokes' theorem ছাড়া করলে লক্ষ করো $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2)$. এখানে S-এর একটা parametric form হল $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$, যেখানে $(x, y) \in$ unit disc. তাই $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$. সুতরাং যে integral-টা বার করতে দিয়েছে, সেটা হল

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1} 2\, dxdy = 2\pi.$$

যদি Stokes' theorem চাও, তবে S-এর boundary-র এই parametric form-টা নিতে পারো, $\mathbf{x}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. সেক্ষেত্রে $\int_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta - 1, 0) \bullet (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
14. এখানে S-এর boundary হল xy-plane-এ origin-এর centre এবং radius 4-ওয়ালা একটা circle. এর একটা parametric form নিতে পারি $\mathbf{x}(\theta) = (4\cos\theta, 4\sin\theta, 0)$. তাই $\int_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} (4\sin\theta, -4\cos\theta, 256 \cos\theta \sin^3\theta) \bullet (-4\sin\theta, 4\cos\theta, 0)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-16)\, d\theta = -32\pi$.

সুতরাং উত্তর হল (A). **15.** (C). **16.** $x = \cos u$, $y = \sin u$ এবং $z = 1 - \cos u - \sin u$. বসাও। তবে পাবে--

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \bullet d\,\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (2\sin u, \cos^2 u, \cos u \sin u) \bullet (-\sin u, \cos u, \sin u - \cos u)\, du \\
&= \int_0^{2\pi} -2\sin^2 u + \cos^3 u + \cos u \sin u(\sin u - \cos u)\, du \\
&= \cdots = -2\pi.
\end{aligned}$$

যেহেতু absolute value চেয়েছে, তাই উত্তর হবে (C). **17.** 0.

Index